بسم الله الرحمن الرحیم

۲۷۹۹۰

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
ثبت مدارک

۱۳۷۸ / ۴ / ۲۷

دانشگاه سیستان و بلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

حل عددی ریشه‌های چند جمله‌ای با استفاده از مقادیر ویژهٔ ماتریس همراه

حسن اسماعیلی

12908

اسفند ۱۳۷۷

۲۷۹۹۰

بسمه تعالی

صفحه الف

این پایان نامه با عنوان حل عددی ریشه‌های چندجمله‌ای با استفاده از مقادیر ویژه ماتریس همراه **قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد** .... ریاضی کاربردی .... **گرایش** .... آنالیز عددی .... **توسط دانشجو** ...... حسن اسماعیلی .... **تحت راهنمائی استاد پایان نامه آقای دکتر** ...... اسماعیل بابلیان ...... **تهیه شده است. استفاده از مطالب آن بمنظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می‌باشد./ح**

امضا دانشجو

این پایان نامه .... ۶ (شش) .... **واحد درسی شناخته می‌شود و در تاریخ** ..۲۵/۱۲/۷۷..... **توسط هیئت داوران بررسی، و نمره** ....۱۷/۷۵.. **با درجه** .... عالی .... **به آن تعلق گرفت./ح**

	نام و نام خانوادگی	***امضاء***	***تاریخ***
۱ـ استاد راهنما:	دکتر اسماعیل بابلیان		۷۷/۱۲/۲۵
۲ـ استاد مشاور:	" پرویز سرگزائی		۷۷/۱۲/۲۵
۳ـ داور ۱:	" سیدکمال میرنیا		
۴ـ داور ۲:	" علیرضا سهیلی		
۵ـ تحصیلات تکمیلی:	" رحمت‌الله لشکری‌پور		۷۷/۱۲/۲۵

تقدیم به

مادر عزیز و مهربانم فاطمه

پدر بزرگوارم بایرام

و

برادر دلسوز و فداکارم علی

که در تمام مراحل زندگی یار و یاورم بوده‌اند

سپاسگزاری

شایسته است که از استاد ارجمند جناب آقای دکتر اسماعیل بابلیان که همواره با راهنمایی های سودمند خود روشنگر مسیر اینجانب در تهیّه و تدوین این رساله بوده‌اند، سپاسگزاری نمایم.

همچنین از جناب آقای دکتر میرکمال میرنیا که اوقات شریف خود را صرف مطالعهٔ این پایان نامه نموده‌اند تشکّر می‌کنم. حضور ایشان در جلسهٔ دفاعیّه موجب افتخار اینجانب است.

لازم می‌دانم که از جناب آقای دکتر رهبر رحیمی ریاست محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان که نهایت همکاری و مساعدت خود را در طول دورهٔ تحصیلی اینجانب مبذول داشته اند، تشکّر کنم.

در پایان مراتب قدردانی خویش را از تمامی اساتید محترم، دوستان عزیز و کارکنان دانشکده که هر یک به نحوی مرا یاری کرده‌اند ابراز می‌کنم.

حسن اسماعیلی

اسفند ۷۷

فهرست مطالب

عنوان	صفحه

عنوان	صفحه

عنوان	صفحه

چکیدهٔ پایان نامه

در جبر خطی کلاسیک ، مقادیر ویژهٔ یک ماتریس اغلب به عنوان ریشه‌های چندجمله‌ای مشخّصه تعریف می‌شود.

یک الگوریتم برای محاسبهٔ ریشه‌های چندجمله‌ای به وسیلهٔ محاسبهٔ مقادیر ویژهٔ ماتریس همراه متناظر آن ، بیانگر تعریف متداول مقدار ویژه است.

در این پایان نامه ابتدا تعاریف و قضایای مهم که زیربنای تعیین ریشه‌های چندجمله‌ای با استفاده از محاسبهٔ مقادیر ویژهٔ ماتریس همراه متناظر با آن است ، بیان می‌گردند.

در ادامه حدود و موقعیّت مقادیر ویژه را به دست خواهیم آورد که این امر از لحاظ تکنیکهای محاسباتی و برنامه‌های کامپیوتری از اهمّیت بالایی برخوردار است.

در فصل دوّم شبه صفرهای چندجمله‌ایها و شبه طیف ماتریسهای همراه را بررسی نموده و تعبیر هندسی و ارتباط آنها را بیان می‌کنیم . در فصل سوّم موازنه و اهمّیت فوق‌العاده آن در محاسبهٔ مقادیر ویژه را بیان نموده و یک الگوریتم پایدار برای موازنهٔ ماتریسهای نامتقارن بررسی می‌شود. در فصل چهارم تجزیه و تحلیل خطای مرتبهٔ اوّل الگوریتم QR صورت می‌گیرد و این امر هندسهٔ اساسی مسأله و خطای عددی الگوریتم را مشخّص می‌سازد.

تجزیه و تحلیل ما وجود یک خطای کوچک مؤلفه‌ای پسرو را در تست هشت چندجمله‌ای تصادفی پیشنهاد شده توسط Toh و Trefethen، پیش بینی می‌کند. در ادامه مثالهایی ارائه می‌دهیم که در آنها خطای نسبی کوچک مؤلفه‌ای پسرو قابل پیش‌بینی نبوده و در عمل نیز به دست نمی‌آید. در فصل پنجم روشهای LR و QR را بیان نموده و الگوریتم QR را طوری اصلاح می‌کنیم که تا حد امکان دقّت محاسباتی بیشتر شود.

فصل اوّل : مسألهٔ ریشهٔ چند جمله‌ایها و مقادیر ویژه

۱ - ۱ : چند جمله‌ایها و ریشه‌های آن

در این بخش تعاریف و قضایای مهم مربوط به چندجمله‌ایها را بیان می‌کنیم.

۱ - ۱ تعریف : عبارت جبری صحیح که فقط شامل عمل ضرب و توان باشد جمله جبری نام دارد، که معمولاً آن را یک جمله‌ای می‌نامند. حاصل ضرب عاملهای عددی و عاملهای معلوم جمله را ضریب آن جمله و نمای متغیّر آن را درجهٔ آن جمله می‌نامند. شکل عمومی یک جمله‌ای به صورت ax^n است که در آن $a\in R$ و $n\in N$.

۱ - ۲ تعریف : مجموع جبری چند یک جمله‌ای که همه آنها با هم متشابه نباشند، چند جمله‌ای نامیده می‌شود. چند جمله‌ای با متغیّر x را معمولاً با $P(x)$ یا $F(x)$ و مانند آن نمایش می‌دهند.

۱ - ۱ مثال : جمله جبری $۲\sqrt{۲}\,x^۳$ نسبت به x از درجهٔ ۳ و ضریب آن $۲\sqrt{۲}$ است.

درجهٔ چند جمله‌ای عبارت است از درجهٔ جمله‌ای از آن که نسبت به دیگر جمله‌های آن بزرگترین درجه را داشته باشد. درجهٔ چند جمله‌ای را با $d^\circ P(x)$ یا $\deg\ P(x)$ نشان می‌دهند.

۱ - ۲ مثال : در چند جمله‌ای $P(x) = ۳x^۷-۴x^۴+۶x^۲-۱$ داریم :

$\deg\ P(x) = ۷$

چند جمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ n را در حالت کلّی به دو گونه نمایش می‌دهند؛ در گونه

نخست ضریبهای جمله‌ها را از بزرگترین درجه تا کوچکترین درجه به ترتیب الفبایی با

$a , b , c , \dots , k , l$ نشان می‌دهند:

$$P(x)= ax^n + bx^{n-1} + \dots + kx + l$$

در روش دوّم ضریب جملهٔ درجهٔ i را با a_i نشان می‌دهند:

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

در روش اخیر معمولاً چند جمله‌ای را به ترتیب توانهای صعودی در نظر گرفته و آن را

تنها با ضریبهایش نشان می‌دهند:

$$P(x) = (a_0 , a_1 , a_2 , \dots , a_{n-1} , a_n)$$

در نرم افزار MATLAB نیز از نمایش اخیر برای چندجمله‌ایها استفاده می‌شود.

۳-۱ تعریف: عدد α را ریشهٔ معادلهٔ $P(x) = 0$ یا صفر چندجمله‌ای $P(x)$ گویند

هرگاه $P(\alpha) = 0$؛ یعنی مقدار چندجمله‌ای $P(x)$ به ازای $x = \alpha$ برابر صفر گردد.

تبصره: در تمام بخشهای این پایان نامه از میدان اعداد مختلط استفاده می‌کنیم و کلّیه

چندجمله‌ایهای مورد بحث با ضرائب حقیقی هستند، یعنی برای

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

داریم: $a_i \in R , i = 0 , \dots , n$.

بر طبق قضیه دالامبر[1] ثابت می‌شود که در مجموعه اعداد مختلط هر چند

جمله‌ای از درجهٔ n دقیقاً n ریشه دارد.

1 - Dalembert

ثابت می‌شود که هر چند جمله‌ای درجهٔ فرد حدّاقل یک ریشهٔ حقیقی دارد، و بنابراین اگر یک چندجمله‌ای درجهٔ زوج یک ریشهٔ حقیقی داشته باشد حدّاقل یک ریشهٔ حقیقی دیگر نیز خواهد داشت.

۲ - ۱ : روابط بین ریشه‌ها و ضریبهای چندجمله‌ای

در این قسمت تا حد امکان روابط بین ریشه‌ها و ضریبهای چندجمله‌ایها را بیان می‌کنیم. لازم به ذکر است روابط اخیر از اهمیّت بسیار بالایی برخوردارند و برای تست جوابهای به دست آمده از الگوریتمهای عددی ریشه‌یابی به کار می‌روند.

فرض کنیم چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ n باشد :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

و فرض کنیم ریشه‌های این چندجمله‌ای عبارت باشند از x_1، x_2، ... و x_n؛ داریم :

$$P(x) = a_n (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

اگر اعمال ضرب را انجام دهیم و حاصل را مرتّب کنیم اتّحاد زیر را خواهیم داشت :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\equiv a_n \left[x^n - (x_1 + x_2 + \dots + x_n) x^{n-1} + \dots + (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n\right]$$

ضریبهای جمله‌های با درجهٔ یکسان در دو طرف اتحّاد فوق با هم برابرند، در نتیجه n رابطهٔ زیر را خواهیم داشت :

$$S_1 = \sum x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$S_2 = \sum_{i<j} x_i x_j = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$S_3 = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$S_n = x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

۳-۱ مثال : برای ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوّم $ax^2 + bx + c = 0$ داریم :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \ , \ x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

۴-۱ مثال : برای ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوّم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ داریم :

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$ و $$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

۴-۱ تعریف : چندجمله‌ای

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

را چند جمله‌ای تکین گویند هرگاه $a_n = 1$.

۳-۱ بدوضعی حل معادلات چندجمله‌ای

مسألهٔ ریشه‌یابی چندجمله‌ایها از جمله مثالهای معروف مسائل بد وضع است.

هرگاه در مسأله‌ای تغییر مختصری در یکی از داده‌ها ایجاد شود (این تغییر اجتناب ناپذیر است) ، جواب مسأله نیز تغییر مختصر کند، گوییم مسأله خوشوضع است. در صورتی که یکی از شرایط سه گانه زیر برقرار نباشد گوییم مسأله بد وضع است :

۱) وجود جواب

۲) یکتا بودن جواب

۳) پیوستگی جواب مسأله نسبت به داده‌ها

چندجمله‌ای زیر را در نظر بگیرید :

$$F(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

فرض کنید r ریشهٔ معادلهٔ $F(x) = 0$ باشد. با مشتق‌گیری داریم :

$$\left(\frac{\delta F}{\delta a_k}\right)_{x=r} = F'(r)\,\frac{\delta r}{\delta a_k} + r^{n-k} = 0$$

و لذا

$$\frac{\delta r}{\delta a_k} = -\frac{r^{n-k}}{F'(r)}$$

معادلهٔ فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{\delta r}{r} = -\frac{a_k \cdot r^{n-k-1}}{F'(r)} \cdot \frac{\delta a_k}{a_k} \qquad (۱)$$

فرض کنید :

$$A_k = \left| \frac{a_k \cdot r^{n-k-1}}{F'(r)} \right| \qquad (۲)$$

آنگاه اگر مقدار A_k بزرگ باشد، بنابر رابطهٔ (۱) یک تغییر کوچک در a_k باعث تغییر بزرگی در r می‌شود. مقدار A_k زمانی بزرگ است که یا r بزرگ باشد یا $F'(r)$ بسیار کوچک باشد.

مثالی که توسط ویلکینسون[1] ارائه شده، نشان می‌دهد که چگونه یک تغییر بسیار کوچک در ضریب یک چندجمله‌ای باعث تغییرات بزرگی در تعدادی از صفرهای آن چندجمله‌ای می‌شود.

فرض کنید :

$$F(x) = (x - ۱)(x - ۲) \ldots (x - ۲۰)$$

$$= x^{۲۰} - ۲۱۰x^{۱۹} + ۲۰۶۱۵x^{۱۱} + \ldots + ۲۰!$$

صفرهای چندجمله‌ی فوق عبارت‌اند از :

$$x_k = k \qquad , \qquad k = ۱, ۲, \ldots, ۲۰$$

بنابراین تمام صفرهای چندجمله‌ای فوق حقیقی‌اند. حال اگر یک تغییر کوچک در ضریب ۲۱۰- اعمال شود، مشاهده می‌شود که برخی از ریشه‌ها از محور حقیقی

1 - Wilkinson