دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان‌نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض
گرایش جبر

عنـوان:

وجود زیر گروه های جابه جا گر بزرگ در عامل ها و زیر گروه هایی از گروه های غیر پوچتوان

اسا تید راهنما:
دکتر اشرف دانشخواه
دکتر زهره مستقیم

پژوهشگر:
آذر شاه نظری

مهر ۱۳۸۸

تقدیم به

پدر عزیزم و

مادر مهربانم

قدر دانی

به نام آن که یادش مایه آرامش است.

حمد و سپاس خداوندی را سزاست که هیچ صفتی از صفاتش بر صفت دیگر او پیشی نگرفته است، پس پیش از آن که آخر باشد، اول است و پیش از آن‌که پنهان باشد هویداست.
الهی سپاس تو را بر هر چه می ستانی و می بخشی، زیرا گرفتن و بخشیدن همه از روی حکمت و مصلحت است.

الهی اگر ندانیم چه خواهیم و از درخواست خود سرگردان بمانیم، ما را به آن‌چه صلاحمان است، راهنمایی فرما و دلمان را به آن‌چه خیر و نیکویی در آن است متوجه گردان.

اینک که با لطف و عنایت پروردگار، توفیق تهیه و تدوین این مجموعه را یافته‌ام، بر خود لازم می دانم از تمامی بزرگوارانی که در تمام دوران تحصیل از راهنمایی‌ها و کمک‌هایشان بهره جسته‌ام، سپاس گزاری کنم.

از زحمات بی دریغ استاد راهنمای بزرگوارم سرکار خانم دکتر اشرف دانشخواه، استاد علم و اخلاقم که با سعه صدر و حسن توجه، مراجعت‌های مداوم مرا تحمل نموده و با نکته‌سنجی و دانش عمیق موجب ارتقاء کیفی پایان‌نامه گردیدند،
بسیار سپاس گزارم و همواره خود را وامدار دانش و معرفت ایشان می‌دانم.

و هم‌چنین از سرکار خانم دکتر زهره مستقیم، استاد راهنمای گرامیم به‌جهت تلاش‌های بی وقفه و بی شائبه ایشان در تدوین و پیشبرد این
پایان نامه تقدیر و تشکر می نمایم.

هم چنین از استاد ارجمند، جناب آقای دکتر کریم سامعی، که با دانش عمیق و نگاه ریزبینانه مرا راهنمایی کردند، تشکر کرده و بابت درس های علمی و اخلاقی که فرا گرفته‌ام، ایشان را ارج می‌نهم.

هم چنین تشکر و قدردانی ویژهٔ خود را از خانوادهٔ عزیزم، که در تمام مراحل زندگی یاور وپشتیبان من بوده‌اند و تمام ناملایمات و سختی‌ها را صبورانه تحمل کرده‌اند، ابراز می‌کنم.

بر خود لازم می‌دانم از اساتید محترم گروه ریاضی و کارشناس گروه، سرکار خانم کاشفی و همکلاسی‌های عزیزم خصوصاً خانم داوودی تقدیر و تشکر کنم.

چکیده: فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این پایان نامه به بررسی روابط بین زیرگروه جابه‌جاگر G، مرکز و فراتینی آن می پردازیم. هم چنین نتایجی روی زیرگروه های جابه‌جاگر بزرگ به دست می آوریم، بدون این که فرض کنیم $Z(G) = ۱$ یا $\Phi(G) = ۱$، یا این که G حلپذیر است. به علاوه، ثابت می‌کنیم که گروه غیرپوچتوان G، باید عامل‌های خاص $\frac{K}{M}$ را با یک زیرگروه جابه‌جاگر بزرگ دارا باشد، در حالی که فرض می کنیم M پوچتوان است. این نتایج که به وسیله‌ی هرزوگ و دیگر نویسندگان روی زیرگروه های جابه‌جاگر بزرگ انجام شده‌است، وابسته به نتایج اخیراست.

واژه های کلیدی: زیرگروه جا به جا گر، زیرگروه فیتینگ، زیرگروه فراتینی، زیرگروه پوچتوان مانده

فهرست مندرجات

مقدمه

جهان بر مبنای ریاضیات خلق گردیده و به زبان ریاضی نگاشته شده است. لذا برای درک آن بایستی این زبان را بیاموزیم. مطالعه‌ی ریاضیات، دستگاه ذهن را وسعت بخشیده و فعال می‌سازد که ارزش آن از هزار چشم بیشتر است، زیرا درک حقیقت فقط از راه ریاضی میسر است. بدین منظور است که ما بسیار به ریاضیات می‌پردازیم و نیز احکام آن را به خاطر توان و زیبایی معنوی‌شان تحسین می‌کنیم، چرا که اگر این شعور و هیجان خاموش شود، ما دیگر ریاضیات را نمی‌فهمیم، مفاهیم آن از هم می‌پاشند، برهان‌ها استحکام خود را از دست می‌دهند، ریاضیات بی‌معنی می‌شود و در انبوهی از مکرر گویی‌های پوچ فرو می‌رود.[۱] نظریه‌ی گروه‌ها قدیمی‌ترین و گسترده‌ترین شاخه‌ی جبر است و یکی از مسائل مهم این نظریه، رده‌بندی گروه‌ها بر اساس خواص آن‌ها می‌باشد.از نظر تاریخی مبدأ نظریه‌ی گروه ها به کارهای گالوا بر می گردد. وی برای نخستین بار رابطه‌ی بین گروه ها و معادلات جبری را توصیف کرد.

در این پایان نامه همه‌ی گروه ها متناهی هستند. از نماد مشترک $Z(G)$ و $\Phi(G)$ ، برای مرکز و زیر گروه فراتینی گروه G استفاده می کنیم. در یک مقاله از مرجع [۴]، هرزوگ[۲] و نویسند گان شرایطی که باید، زیر گروه جا به جاگر G' در مقایسه با G بزرگ باشد را مطالعه کردند.

دراین پایان نامه ، نتایجی روی زیر گروه های جابه جاگر بزرگ به دست می آوریم ، بدون این که فرض کنیم $Z(G) = ۱$ یا $\Phi(G) = ۱$، یا این که G حل پذیر است. در قضایای اصلی آورده شده در پایان نامه ، تنها فرض می کنیم ، که گروه G ، غیر پوچتوان است. در این جای گذاری کلی ، ما نمی توانیم ، ادعا کنیم ، که G' در مقایسه با G باید ، بزرگ باشد. اگر چه قضیه‌ی A در فصل ۳ ، وجود عامل $K^* = \frac{K}{\Phi(K)}$ با یک زیر گروه جابه جا گر بزرگ ، که K در G ، زیرنرمال است را محرز می کند. قضیه‌ی B و C در فصل ۳ ، وجود عامل $\frac{K}{M}$ با یک ، زیرگروه جا به جاگر بزرگ ، که K و M در

[۱] پیشگفتار دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده در کتاب جبر فرالی.
[۲] Herzog

G مشخّصِ هستند و M پوچتوان است را محرز می کند. ما توجه می کنیم که عامل در قضیه‌ی A، زیر گروه فراتینی بدیهی دارد و عامل در قضیه‌ی B مرکز بدیهی دارد.در حالی که عامل در قضیه‌ی C خاصیتی دارد که مرکز و زیر گروه فراتینی هر دو بدیهی هستند.

این پایان نامه متشکل از ۳ فصل است. فصل اول را به بیان تعاریف و قضایایی که در فصل های بعدی مورد استفاده قرار می گیرند، می پردازیم. در فصل دوم به مطالعه‌ی زیر گروه پوچتوان مانده و قضایای مربوط به آن می پردازیم. در فصل سوم ، وجود زیر گروه های جابه جاگر در عامل ها و زیرگروه هایی از گروه های غیر پوچتوان را بررسی می کنیم. این پایان نامه برگرفته از مرجع[۷] می باشد.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

مقدمه

در سراسر این پایان نامه، تنها با گروه‌های متناهی سرو کار داریم. ازاین رو G همواره نشان دهنده‌ی یک گروه متناهی است؛ و به ازای عدد اول p، منظور ما از یک p ـ گروه، یک p ـ گروه متناهی است.این فصل شامل ٦ بخش می باشد. در بخش اول به مفاهیم مقدماتی نظریه‌ی گروه هامی پردازیم. بخش دوم مربوط به عمل گروه و قضایای آن می باشد. در بخش سوم گروه های فروبنیوس را معرفی می کنیم. در بخش چهارم به حاصل ضرب نیم مستقیم و قضایای مربوط به آن می پردازیم. در بخش پنجم زیر گروه های جا به جا گر را معرفی می کنیم . بخش ششم مشتمل بر تعاریف و قضایای مربوط به گروه پوچتوان و حلپذیر و هم چنین زیر گروه های فراتینی و فیتینگ می باشد. هم چنین کلیه‌ی تعاریف و قضایا از مراجع [۳]، [۱۱] و [۱۲] آورده شده است.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی نظریه‌ی گروه ها

در ادامه‌ی این بخش مفاهیمی از نظریه‌ی گروه ها را که در فصول بعد به آن نیاز داریم، ارائه می کنیم.

۱–۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه و $H \leq G$ باشد و $H^x = x^{-1}Hx$. در این صورت، زیر گروه $\bigcap\limits_{x \in G} H^x$ را با نماد $Core_G(H)$ نمایش می دهیم و آن را مغز H در G می نامیم.
[۱۲ ، صفحه‌ی ۵]

۱–۲ نتیجه. $Core_G(H)$ بزر گ ترین زیر گروه نرمال G است، که مشمول در H است.

برهان: فرض کنید $K \trianglelefteq G$ و $K \leq H$. در این صورت برای هر $x \in G$، $K^x \leq H^x$. چون $K \trianglelefteq G$ پس، $K^x = K$. در نتیجه $K \leq Core_G(H)$. □

۱–۳ قضیه. (قضیه‌ی اول یکریختی)

الف) اگر $f : G \to H$ یک همریختی باشد، آن گاه $\theta : \frac{G}{Kerf} \to H$ با ضابطه‌ی $((Kerf)x)\theta = (x)f$)، یک تکریختی است. در نتیجه $\frac{G}{Kerf} \cong Imf$.

ب) اگر N زیر گروه نرمال G باشد، آن گاه نگاشت $\nu : G \to \frac{G}{N}$ با ضابطه‌ی $(x)\nu = Nx$ یک بروریختی است که هسته‌ی آن N است (ν را بروریختی طبیعی می نامیم).

برهان: [۱۲ ، قضیه‌ی ۱.۱.۱] □

۱–۴ قضیه. (قضیه‌ی دوم یکریختی)

فرض کنیم G یک گروه باشد و $M \leq G$، $N \trianglelefteq G$. در این صورت $N \cap M \trianglelefteq M$ و $\frac{M}{M \cap N} \cong \frac{NM}{N}$.

برهان: [۱۲ ، قضیه‌ی ۲.۱.۱] □

۱–۵ قضیه. (قضیه‌ی سوم یکریختی)

فرض کنیم M و N زیر گروه های نرمال یک گروه مانند G باشند به طوری که، $N \leq M$. در این صورت $\frac{M}{N} \trianglelefteq \frac{G}{N}$ و $\frac{(\frac{G}{N})}{(\frac{M}{N})} \cong \frac{G}{M}$.

برهان: [۱۲ ، قضیه‌ی ۳.۱.۱] □

۱–۶ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد و $H \leq G$. زیرگروه H را یک زیرگروه مشخّصِ G می نامیم در صورتی که به ازای هر خودریختی G مانند φ، $H\varphi \leq H$ که در آن $H\varphi = \{h\varphi \mid h \in H\}$. به آسانی معلوم می شود که، اگر H زیر گروه مشخصِ G باشد، آن گاه به ازای هر خود ریختی G مانند φ، $H\varphi = H$. هر گاه H زیر گروه مشخّصِ G باشد، می نویسیم $H\ ch\ G$.

[۱۲ ، صفحه‌ی ۹]

۱–۷ مثال. $A_۳\ ch\ S_۳$.

۱–۸ قضیه. فرض کنیم G یک گروه باشد و $K \leq H \leq G$، در این صورت

الف) اگر $K\ ch\ H$ و $H\ ch\ G$ ، آن گاه $K\ ch\ G$.

ب) اگر $H \trianglelefteq G$ و $K\ ch\ H$ باشد. در این صورت $K \trianglelefteq G$.

برهان: [۱۲ ، قضیه‌ی ۵.۱.۱] □

۱–۹ قضیه. فرض کنیم G یک گروه و $H \trianglelefteq G$ باشد. در این صورت اگر $(\mid H \mid, \mid G : H \mid) = ۱$، آن گاه $H\ ch\ G$.

برهان: [۳ ، قضیه‌ی ۳.۱ (فصل دوّم)] □

۱–۱۰ نکته. اگر G یک گروه و A و B زیر گروه های G که $A \leq B$ ، $A\ ch\ G$ و $\frac{B}{A}\ ch\ \frac{G}{A}$، آن گاه $B\ ch\ G$.

برهان: فرض کنیم $\alpha \in Aut(G)$. چون $A\ ch\ G$، $\alpha_A : \frac{G}{A} \to \frac{G}{A}$، با ضابطه‌ی $(Ag)\alpha_A = A(g)\alpha$، یک خود ریختی $\frac{G}{A}$ است. حال اگر $b \in B$، چون $\frac{B}{A}\ ch\ \frac{G}{A}$، پس $(Ab)\alpha_A = A(b)\alpha \in \frac{B}{A}$ و بنابراین $(b)\alpha \in B$ و در نتیجه $B\ ch\ G$. □

۱–۱۱لم. (لم ددکیند[۱]) فرض کنیم A, B, C زیر گروه های G باشند، به طوری که $B \leq A$، در این صورت $A \cap (BC) = B(A \cap C)$.

برهان: می دانیم $B(A \cap C) \leq A \cap (BC)$، چون $B \leq A$. فرض کنیم $a \in A \cap (BC)$ پس، $a = bc$ که $c \in C$ و $b \in B$. بنابراین $b^{-1}a = c \in A \cap C$. لذا $a \in B(A \cap C)$. در نتیجه، $A \cap (BC) = B(A \cap C)$. □

۱–۱۲ **تعریف.** فرض کنیم G یک گروه و p یک عدد اول باشد. گروه G را یک p - گروه می نامیم در صورتی که مرتبه‌ی هر عضو G توان مثبتی از p باشد. زیر گروه H از G را یک p - زیر گروه G گوییم در صورتی که H یک p - گروه باشد.

[۱۲ ، صفحه‌ی ۷۰]

۱–۱۳ **تعریف.** فرض کنیم G یک گروه متناهی از مرتبه‌ی n باشد و $n = p^{\alpha}.n'$، که در آن α یک عدد صحیح نامنفی است و p عدد اولی است که $p \nmid n'$. در این صورت هر زیر گروه G از مرتبه‌ی p را یک p - زیر گروه سیلوی G می نامیم.

[۱۲ ، صفحه‌ی ۷۱]

۱–۱۴ **تعریف.** فرض کنیم G یک گروه متناهی و p عدد اولی باشد. در این صورت مجموعه‌ی همه‌ی p - زیر گروه های سیلوی G را $Syl_p(G)$ می نامیم و عده اعضای مجموعه‌ی اخیر را با $n_p(G)$ یا مختصراً با n_p نمایش می دهیم.

[۱۲ ، صفحه‌ی ۷۳]

---

[۱] Dedekind Rule

۱–۱۵ قضیه. (سیلو[۲]) فرض کنیم G یک گروه متناهی از مرتبه‌ی n باشد که در آن $n = p^{\alpha}.n'$، $\alpha \geq ۰$ و p عدد اولی است که $p \nmid n'$. در این صورت،

الف) G حداقل یک pـ زیر گروه سیلو دارد،

ب) هر pـ زیر گروه G جزء یک pـ زیر گروه سیلوی G است،

ج) هر دو pـ زیر گروه سیلوی G مزدوج‌اند،

د) عده‌ی همه‌ی pـ زیر گروه های سیلوی G همنهشت ۱ به پیمانه‌ی p است.

برهان: [۱۲ ، قضیه‌ی ۷.۱.۴] □

۱–۱۶ قضیه. فرض کنیم G یک گروه متناهی از مرتبه‌ی $p^{\alpha}.n'$ باشد، که در آن p یک عدد اول است، $\alpha \geq ۰$، n' عددی طبیعی است که $p \nmid n'$. در این صورت به ازای هر β صحیح که $۰ \leq \beta \leq \alpha$، گروه G زیر گروهی از مرتبه‌ی p^{β} دارد.

برهان: [۱۲ ، قضیه‌ی ۹.۱.۴] □

۱–۱۷ قضیه. (استدلال فراتینی[۳]) فرض کنیم G یک گروه و $K \trianglelefteq G$ باشد. د راین صورت اگر $P \in Syl_p(K)$، آن گاه $G = N(P)K$.

برهان: [۱۲ ، قضیه‌ی ۱۲.۱.۴] □

۱–۱۸ قضیه. فرض کنیم G یک گروه باشد و $N \trianglelefteq G$ و $N \leq M \leq G$. در این صورت $\frac{M}{N} \in Syl_p(\frac{G}{N})$ اگر و تنها اگر $M = PN$، جایی که $P \in Syl_p(G)$ است.

برهان: [۱۲ ، قضیه‌ی ۱۹.۱.۴] □

۱–۱۹ تعریف. pـ گروه آبلی متناهی G را آبلی مقدماتی (یا مختصراً مقدماتی) گوییم، در صورتی که مرتبه‌ی هر عضو غیربدیهی G، عدد اول p باشد.

[۲] Sylow
[۳] Frattini argument

[۱۲ ، صفحه‌ی ۱۰۳]

۱—۲۰ مثال. $\mathbb{Z}_p \times ... \times \mathbb{Z}_p$ یک گروه آبلی مقدماتی است.

۱—۲۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت مجموعه‌ی عامل های اول شمارنده مرتبه‌ی G را با $\pi(G)$ نمایش می‌دهیم. هم‌چنین گروه G را π ـ گروه گوییم، هر گاه اعداد اول شمارنده‌ی مرتبه‌ی گروه G، در مجموعه π ـ باشند.

[۳ ، صفحه‌ی ۴]

۱—۲۲ تعریف. گروه متناهی G را p' ـ گروه گوییم، هر گاه مرتبه‌ی هر عضو آن نسبت به p اول باشد.(به طور مشابه π' ـ گروه هم تعریف می شود.)

[۳ ، صفحه‌ی ۴]

۱—۲۳ تعریف. زیر گروه M از گروه G را ماکسیمال نامیم و با $M < .G$ نمایش می دهیم، هر گاه :

الف) $M \neq G$;

ب) اگر $H \leq G$ و $M \leq H \leq G$ آن گاه $H = M$ یا $H = G$.

[۱۲ ، صفحه‌ی ۹]

۱—۲۴ مثال. در گروه $\mathbb{Z}$، $p\mathbb{Z}$ ماکسیمال است که‌در آن p یک عدد اول است.

۱—۲۵ نکته. اگر $M \trianglelefteq .G$ و $H \leq G$ به قسمی که $H \not\leq M$، در این صورت $HM = G$.

برهان: اولاً چون $M \trianglelefteq G$، پس $HM \leq G$. ثانیاً $M \leq HM \leq G$. چون $M < .G$، لذا $HM = M$ یا $HM = G$، اگر $HM = M$، آن گاه $H \leq M$، که یک تناقض است. بنابراین $HM = G$. □

۱ــ۲۶ نکته. فرض کنیم G یک گروه متناهی غیر بدیهی باشد. G یک و تنها یک زیر گروه ماکسیمال دارد اگر و تنها اگر G یک گروه دوری از مرتبه‌ی p^m باشد، که p اول و $m \in \mathbb{N}$.

برهان: فرض کنیم M زیر گروه ماکسیمال منحصربه فرد G باشد، می دانیم هر زیر گروه سره G مثل H، زیر گروه M است. حال اگر فرض کنیم G دوری نباشد، در این صورت به ازای هر $x \in G$، $G > < x >$. لذا $M > < x >$ و در نتیجه $G \leq M$، که یک تناقض است. بنا براین G دوری است. حال ثابت می کنیم $|G| = p^m$. فرض کنیم $|G| = p_1^{\alpha_1} \ ... \ p_r^{\alpha_r}$ که، p_i ها اعداد اول متمایز و $\alpha_i \in \mathbb{N}$. اگر $P_i \in Syl_{p_i}(G)$، چون G دوری است پس $P_i \trianglelefteq G$ و $P_1...P_r \leq G$. از طرفی چون G دارای زیر گروه ماکسیمال منحصر به فرد M است، پس $P_i \leq M$ که $1 \leq i \leq r$ و بنابراین $G \leq M$، که یک تناقض است، لذا مرتبه‌ی G توانی از یک عدد اول است.

برعکس فرض کنیم G دوری از مرتبه‌ی p^m باشد. در این صورت G تنها یک زیر گروه از مرتبه‌ی p^{m-1} دارد. فرض کنیم $|H| = p^{m-1}$، بنابراین H در G ماکسیمال است. حال ثابت می کنیم H منحصر به فرد است. می دانیم H دوری است و $H =< x^p >$. اگر K زیر گروه ماکسیمال دیگری از G باشد و $|K| = p^t \ , t < m-1$. چون M هم دوری است، پس M دارای زیر گروه منحصر به فرد از مرتبه‌ی p^t است که در نتیجه $K \leq M$ و یک تناقض است. بنابراین حکم ثابت می شود. $\square$

۱ــ۲۷ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. زیرگروه نرمال غیربدیهی H را زیرگروه نرمال مینیمال G گوییم، هر گاه H حاوی هیچ زیرگروه نرمال G به جز خود H و ۱ نباشد. به عبارت دیگر، هرگاه $N \lhd G$ و $N \subseteq H$، آن گاه $N = H$ یا $N = 1$.
[۱۲ ، صفحه‌ی ۱۰۴]

۱ــ۲۸ مثال. A_3 در S_3 نرمال مینیمال است.

۱—۲۹ نتیجه. زیر گروه نرمال مینیمال هر گروه ساده متناهی G، خود G است.

۱—۳۰ **تعریف.** گروه غیر بدیهی G را مشخصاً ساده گوییم، در صورتی که تنها زیرگروه های مشخّصِ آن ۱ و G باشند.

[۱۲ ، صفحه‌ی ۱۰۶]

۱—۳۱ **قضیه.** فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی (غیر بدیهی) باشد. در این صورت G مشخصاً ساده است، اگر و تنها اگر G مقدماتی باشد.

برهان: [۱۲ ، قضیه‌ی ۴.۲.۵] □

۱—۳۲ لم. فرض کنیم G یک گروه و H زیر گروه نرمال مینیمال از G باشد. در این صورت H مشخصاً ساده است.

برهان: فرض کنیم K زیر گروه مشخّصِ H باشد. در این صورت با توجه به قضیه‌ی ۱—۸، $K \trianglelefteq G$. از آن جایی که H یک زیر گروه نرمال مینیمال از G است، لذا $K = 1$ یا $K = H$، بنابراین H زیر گروه مشخّصِ غیر بدیهی ندارد، لذا H مشخصاً ساده است. □

۱—۳۳ **تعریف.** فرض کنیم G یک گروه و $K \trianglelefteq G$، گوییم G روی K شکافته می شود، هر گاه زیر گروهی از G مانند H موجود باشد، به طوری که $G = KH$ و $H \cap K = 1$. زیر گروه H را یک مکمل K در G گوییم. هم چنین زیرگروه H از G را مکمل مینیمال K در G گوییم، هرگاه هیچ زیرگروه واقعی H مکمل K نباشد.

[۱۱ ، صفحه‌ی ۲۱۲]

۱—۳۴ مثال. S_n روی A_n به ازای $n > ۱$ شکافته می شود.

برهان: قرار می دهیم $H =< (۱۲) >$. پس داریم، $H \leq S_n$ و $H \cap A_n = ۱$. چون $HA_n \leq S_n$ و $|HA_n| = |S_n|$، پس $S_n = HA_n$. □

۲.۱ عمل گروه

در این بخش تعاریف و قضایای مورد نیاز عمل یک گروه بر مجموعه را مورد بررسی قرار می دهیم و برخی از نتا یج مهم را که از این مفهوم ناشی می شود ذکر خواهیم کرد.

۱—۳۵ تعریف. فرض کنیم G یک گروه و X مجموعه‌ای ناتهی باشد. فرض کنیم به ازای هر $g \in G$ و هر $x \in X$ عضو یکتایی از X که آن را با علامت $x \bullet g$ نشان می‌دهیم وجود داشته باشد به طوری که:

الف) به ازای هر $x \in X$، $x \bullet ۱ = x$.

ب) به ازای هر $g_۱, g_۲ \in G$ و هر $x \in X$، $x \bullet (g_۱ g_۲) = (x \bullet g_۱) \bullet g_۲$.

در این صورت گوییم گروه G بر مجموعه‌ی X عمل می‌کند و $\bullet$ را عمل G بر X گوییم. برای سهولت در نوشتن به جای $x \bullet g$ معمولاً می‌نویسیم xg.

[۱۲ ، صفحه‌ی ۲۵]

۱—۳۶ تعریف. فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند و $x \in X$ و $g \in G$. گوییم g عضو(یا نقطه) x را ثابت نگه می دارد هرگاه $xg = x$.

[۱۲ ، صفحه‌ی ۲۵]

۱—۳۷ تعریف. فرض کنیم گروه G روی مجموعه X عمل کند. دراین صورت مجموعه‌ی اعضایی از G که هر عضو X را ثابت نگه می‌دارند، هسته‌ی عمل می نامند.

[۱۲ ، صفحه‌ی ۲۵]

۱–۳۸ مثال. یک گروه روی خود به دو طریق مهم عمل می‌کند(یعنی، $X = G$). یکی از این دو، عمل منتظم است که به ازای هر g و x از G با $x \bullet g = xg$ تعریف می‌شود، جایی که xg به معنی ضرب دو عضو G است. عمل مهم دیگر G بر خود، عبارت است از عمل تزویج، که به صورت $x \bullet g = x^g = g^{-1}xg$ تعریف می‌شود.

[۱۲ ، صفحه‌ی ۲۵]

۱–۳۹ قضیه. فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند. به ازای هر $g \in G$، تابع $\varphi_g : X \to X$ را با ضابطه‌ی $(x)\varphi_g = xg$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $\varphi_g \in S_X$ و نگاشت $\varphi : G \to S_X$ با ضابطه‌ی $g \to \varphi_g$ همریختی است که هسته‌ی آن با هسته‌ی عمل برابر است.

برهان: [۱۲ ، قضیه‌ی ۱.۱.۲] $\square$

همریختی مذکور در قضیه‌ی فوق را نمایش جایگشتی G متناظر با عمل گروه(بر X) می‌نامند. این نمایش را صادق گویند هرگاه φ یک به یک باشد. به عبارت دیگر؛ عضو همانی G تنها عضوی از گروه G باشد که همه‌ی اعضای X را ثابت نگه می‌دارد.

۱–۴۰ مثال. نمایش منتظم G صادق است.

۱–۴۱ تعریف. فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی ناتهی X عمل کند و $x \in X$. در این صورت مجموعه‌ی $\{g \in G | xg = x\}$ را پایدارساز x در G گوییم و آن را با علامت $St_G(x)$ نشان می‌دهیم. هر گاه ابهامی در مورد گروه زمینه G، وجود نداشته باشد، مختصراً می نویسیم $St_G(x)$. (در بعضی از کتب از نماد G_x برای پایدار ساز x در G استفاده می شود.)