بسم الله الرحمن الرحيم

پردیس دانشگاهی

گروه ریاضی محض

(جبر)

عنوان:

طیف اول از مدول های تاپ

از:

معصومه ملکی مقدم نژاد

استاد راهنما:

دکتر فرهاد درستکار

شهریور ۱۳۹۳

با حمد و سپاس بیکران بر خداوند قادر و متعال که به حقیر توفیق انجام این پژوهش را مرحمت نمود. و نیز مصداق

((من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق))

کسی که از مخلوق تشکر نکند در واقع خالق و آفریدگار را سپاس نگفته است.

بسی شایسته است از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر فرهاد درستکار که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را بارور ساختند و همواره با صبر و قناعت بی مثال خویش راهنمایی های لازم را در خصوص نحوه تنظیم و سبک نگارش پایان نامه مبذول فرمودند تقدیر و تشکر نمایم.

معلما مقامت ز عرش برتر باد — همیشه توسن اندیشه ات مظفر باد

به نکته های دلاویز و گفته های بلند — صحیفه های سخن از تو علم پرور باد

تقدیم به

همسر مهربانم که در تمام طول تحصیل همراه و همگام من بوده است.

چکیده:

طیف اول از مدول های تاپ

معصومه ملکی مقدم نژاد

در این پایان نامه بعضی از خواص مدول های تاپ و طیف اول آنها را مورد بررسی قرار می دهیم.

کلید واژه:

مدول تاپ ، پرایم فول ، توپولوژی زاریسکی.

فهرست مطالب

پیشگفتار

در سال ۱۹۷۸ میلادی Joun Dauns مفهوم مدول های اول را مورد بررسی قرار داد. سپس در سال ۱۹۸۰ میلادی Joun Dauns به بررسی ارتباط ایده ال های اول یک حلقه و زیر مدول های اول یک مدول بر آن حلقه پرداخت. بعد از وی Chin pilu در سال ۱۹۸۴، قضایای اساسی زیر مدول های اول را اثبات نمود و بعضی از مفاهیم که قبلا برای حلقه ها بررسی شده بود را به مدول ها تعمیم داد.

این پایان نامه شامل سه فصل است. در فصل اول مفاهیم و قضایای اساسی مورد نیاز را بیان می کنیم. در فصل دوم به معرفی مدول های تاپ و خواص آن خواهیم پرداخت. در فصل سوم نیز ویژگی های طیف اول یک مدول تاپ را بررسی می کنیم. در تدوین این پایان نامه از مفاهیم[2] و [15] استفاده شده است.

فصل اول

پیش نیاز

فصل اول . پیش نیاز

در این فصل برخی از مطالب مورد نیاز برای موضوعات مطرح شده در پایان نامه به صورت تعاریف و قضایا آورده می شوند. در سراسر این پایان نامه R یک حلقه جا به جایی با یکه می باشد و تمام مدول ها یکانی هستند. همچنین گردایه تمام ایده ال های اول R را با Spec(R) و مجموعه تمام ایده ال های ماکسیمال آن را با Max(R) نشان می دهیم. به علاوه جهت تعریف توپولوژی زاریسکی از نمادهای به کار رفته در مقاله های ([14] و [15] و [16]) استفاده می نماییم.

تعریف ۱-۱. فرض کنید I یک ایده آل از R باشد. رادیکال ایده آل I از R با نماد $\sqrt{I}$ نمایش داده می شود و آن را برابر اشتراک تمام ایده ال های اول شامل I تعریف می کنیم. از جبر پیشرفته می دانیم:

$$\sqrt{I} = \left\{ x \in R \mid x^n \in I , n \in \mathbb{N} \text{ برای یک } \right\}$$

تعریف ۱-۲. فرض کنید M یک R- مدول و N یک زیر مدول از آن باشد. در این صورت:

$$Ann_R(M) = (O :_R M) = \{ r \in R \mid rM = O_M\}$$

$$(N :_R M) = \{ r \in R \mid rM \subseteq N\}$$

تعریف ۱-۳. *فرض کنید M یک R- مدول باشد. زیر مدول N از M را یک زیر مدول اول گوییم هرگاه:*

۱) $N \neq M$.

۲) برای هر $r \in R$ و $m \in M$ از $rm \in N$ نتیجه شود که $r \in (N :_R M)$ یا $m \in N$.

نکته ۱-۴. اگر N یک زیر مدول اول از M باشد، آنگاه $(N :_R M)$ یک ایده آل اول است. اگر $p = (N :_R M)$ باشد در این صورت N را یک زیر مدول p- اول از M گوییم.

اثبات: چون N یک زیر مدول سره از M است، $(N :_R M)$ نیز یک ایده آل سره از R می باشد. فرض کنید $xy \in (N :_R M)$ نشان می دهیم:

$$x \in (N :_R M) \text{ یا } y \in (N :_R M).$$

چون $xy \in (N :_R M)$ بنابراین $xyM \subseteq N$. فرض کنید $y \notin (N :_R M)$ پس وجود دارد $m \in M$ به طوری که $ym \notin N$ اما $xym \in xyM \subseteq N$. حال چون $x(ym) \in N$ و $ym \notin N$ پس بنا به تعریف زیر مدول اول $x \in (N :_R M)$.

□

مثال ۱-۵. اگر $M \neq 0$ یک R– مدول ساده باشد آنگاه $Spec(M) = \{\{0\}\}$.

اگر $0 \neq x \in M$ و rx=0 چون M یک R- مدول ساده است و $0 \neq x \in M$، M=Rx. اما rx=0. بنابراین rM=0. لذا

$$r \in Ann_R(M) = (0 :_R M).$$

یعنی اگر $rx \in \{0\}$ و $x \notin \{0\}$ آنگاه $r \in (0 :_R M)$. این نشان می دهد که $\{0\}$ یک زیر مدول اول از M است. چون M یک R- مدول ساده است پس تنها زیر مدول سره آن $\{0\}$ است. بنابراین $Spec(M) = \{\{0\}\}$.

تبصره ۱-۶. مجموعه تمام زیر مدول های اول R– مدول M را طیف M گوییم و آن را با نماد spec(M) نشان می دهیم. همچنین برای هر $p \in Spec(R)$ گردایه تمام زیر مدول های p– اول، R– مدول M را با نماد $Spec_p(M)$ نمایش می دهیم.

مثال ۱-۷. برای Z- مدول Z داریم:

$$Spec(Z) = \{\{0\}\} \cup \{pZ \mid \text{یک عدد اول است } p\}$$

مثال ۱-۸. فرض کنیم p یک عدد صحیح اول ثابت باشد و $N_0 = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ در این صورت

$$Z(p^\infty) = \left\{\frac{r}{p^n} + \mathbb{Z} \,\middle|\, r \in \mathbb{Z}, n \in N_0\right\}$$

یک زیر مدول اول از $\frac{Q}{\mathbb{Z}}$ است. زیرا بدیهی است $Z(p^\infty) \subsetneq \frac{Q}{\mathbb{Z}}$. همچنین اگر برای $t \in \mathbb{Z}$ و $\frac{a}{b} + \mathbb{Z} \in \frac{Q}{\mathbb{Z}}$ داشته باشیم:

$$t\left(\frac{a}{b} + \mathbb{Z}\right) = \frac{ta}{b} + \mathbb{Z} \in Z(p^\infty)$$

آنگاه با توجه به $(Z(p^\infty) :_{\mathbb{Z}} Q/\mathbb{Z}) = \{0\}$ می بینیم که اگر $t \neq 0$ باید $b = p^n$ به ازای یک $n \in N$ و در نتیجه

$$\frac{a}{b} + \mathbb{Z} \in Z(p^\infty)$$

پس $Z(p^\infty)$ یک زیر مدول اول از $\frac{Q}{\mathbb{Z}}$ است. از طرف دیگر زیر مدول های $Z(p^\infty)$ به صورت

$$H_n = \left\{\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\right\}$$

به ازای $n \geq 1$ می باشند. اما هیچ کدام از H_n ها به ازای $n \geq 1$ زیر مدول اول نمی باشند. زیرا به ازای $n \geq 1$ می توان یک $\frac{1}{p^k} + \mathbb{Z} \in Z(p^\infty)$ که $k > n$ چنان یافت که برای $t = p^{k-n}$ داریم:

$$t\left(\frac{1}{p^k} + \mathbb{Z}\right) = \frac{p^{k-n}}{p^k} + \mathbb{Z} = \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \in H_n$$

در حالیکه $t \notin (H_n :_R Z(p^\infty))$ و $\frac{1}{p^k} + \mathbb{Z} \notin H_n$. این نشان می دهد که به ازای هر $n \geq 1$، H_n یک زیر مدول اول از $Z(p^\infty)$ نمی باشد و لذا $Spec(\, Z(p^\infty)) = \emptyset$.

قرار داد ۱-۹. از این پس منظور از یک R- مدول M، همواره R- مدولی است ک $Spec(M) \neq \emptyset$.

تبصره ۱-۱۰. فرض کنید مجموعه تمام زیر مدول های ماکسیمال M را با $\mathrm{Max(M)}$ نشان دهیم. در این صورت

$$\mathrm{Max(M)} \subseteq \mathrm{Spec(M)}.$$

اثبات: فرض کنید N یک زیر مدول ماکسیمال از M باشد و فرض کنید $rm \in N$ برای یک $r \in R$ و $m \in M$. نشان می دهیم $m \in N$ یا $r \in (N :_R M)$. فرض کنید $m \notin N$ پس $M = N + Rm$. چون $rm \in N$ پس با توجه به $M = N + Rm$ داریم که:

$$rM = rN + rRm \subseteq N + R(rm) \subseteq N$$

$rM \subseteq N$ یا $r \in (N :_R M)$.

□

نکته ۱-۱۱. فرض کنید M یک R- مدول و N یک زیر مدول از M باشد. در این صورت

$$Spec(M/N) = \{\, P/N \;\big|\; P \in V(N)\}$$

اثبات: فرض کنید $P \in V(N)$. نشان می دهیم $P/N \in Spec(M/N)$. فرض کنید $m + N \in M/N$ و $r(m+N) \in P/N$ نشان می دهیم $m + N \in P/N$ یا $r \in (P/N :_R M/N)$. فرض کنید $m + N \notin P/N$ پس $m \notin P$.

$$r(m+N) = rm + N \in P/N$$

در نتیجه $rm \in P$. چون $P \in V(N)$ پس P یک زیر مدول اول از M شامل N است. لذا از $rm \in P$ و $m \notin P$ نتیجه می گیریم $r \in (P{:_R}\, M)$. بدیهی است $r \in (P/N :_R M/N)$. این نشان می دهد که P/N یک زیر مدول اول از M/N است.

بر عکس: فرض کنید $\overline{P} = P/N \in Spec(M/N)$ نشان می دهیم $P \in Spec(M)$. فرض کنید $r\lambda \in P$ برای $\lambda \in M$ و $r \in R$. فرض کنید $\lambda \notin P$ پس $\lambda + N \notin P/N$ اما از اینکه $r\lambda \in P$ نتیجه می گیریم $r\lambda + N \in P/N$ پس $r(\lambda + N) \in P/N$.

چون $\lambda + N \in M/N$ در حالیکه $\lambda + N \notin P/N$ و $\overline{P} = P/N \in Spec(M/N)$. بنابر تعریف زیر مدول اول از $r(\lambda + N) \in P/N$ و $\lambda + N \notin P/N$ نتیجه می گیریم که $r \in (P/N :_R M/N)$. اکنون نشان می دهیم که $r \in (P{:_R}\, M)$.

برای این کار فرض کنید $m \in M$ دلخواه باشد. پس $m + N \in M/N$ چون $r \in (P/N :_R M/N)$ لذا

$$rm + N = r(m+N) \in P/N$$

بنابراین وجود دارد $a \in P$ به طوریکه $rm + N = a + N$ پس $rm - a \in N$ و در نتیجه وجود دارد $n \in \mathbb{N}$ به طوریکه

$$rm = a + n \in P$$

پس می بینیم به ازای هر $m \in M$ داریم $rm \in P$ یعنی $r \in (P:_R M)$. یعنی P یک زیر مدول اول از M است. چون $N \leq p$ پس $P/N \in V(N)$ و این حکم را نشان می دهد. □

تبصره ۱-۱۲. رادیکال R- مدول M را با rad(M) نشان داده و آن را برابر اشتراک تمام زیر مدول های اول M تعریف می کنیم.

تعریف ۱-۱۳. مدول M را یک مدول نیم موضعی گوییم اگر Max(M) یک مجموعه متناهی غیرتهی باشد.

تبصره ۱-۱۴. برای هر R- مدول M نگاشت

$$\psi : Spec(M) \to Spec(R/Ann_R(M))$$

با تعریف:

$$\psi\,(P) = \frac{(P :_R\ M)}{Ann_R(M)} \qquad\qquad \forall\, P \in Spec(M)$$

را نگاشت طبیعی می گوییم.

تعریف ۱-۱۵. R- مدول M پرایم فول نامیده می شود، هرگاه M=0 یا $M \neq 0$ و برای آن نگاشت ψ یک نگاشت پوشا باشد.

تعریف ۱-۱۶. فرض کنید p یک ایده آل اول از حلقه R و N یک زیر مدول از M باشد. در این صورت انقباض N_p در M نسبت به نگاشت کانونی $M \to M_p$ با تعریف $m \to \frac{m}{1}$ یک زیر مدول از M است. این زیر مدول را با $S_p(N)$ نشان داده و آن را یک اشباع از N نسبت به p گوییم، یعنی:

$$S_p(N) = \left\{m \in M \,\middle|\, \frac{m}{1} \in N_{\,p} \right\} = \{m \in M \mid \exists s \in R\backslash p\ ;\ sm \in N\}$$

بدیهی است $N \leq S_p(N)$.

تعریف ۱-۱۷. (ر.ک. [10]). مدول M را یک مدول ضربی گوییم هرگاه برای هر زیر مدول از آن مانند N ایده آلی مانند I از حلقه R چنان موجود باشد که N=IM. از [10] می دانیم که اگر M یک R- مدول ضربی و N یک زیر مدول از آن باشد آنگاه همواره

$$N = (Ann_R(M/N))M = (N :_R M)M.$$

تعریف ۱-۱۸. (ر.ک. [1] و [4]). R- مدول M را یک مدول ضربی ضعیف گوییم اگر $Spec(M) = \emptyset$ یا $Spec(M) \neq \emptyset$ و برای هر زیر مدول اول از آن مانند P ایده آلی مانند I از حلقه R چنان موجود باشد که P=IM.

تعریف ۱-۱۹. فرض کنید M یک R- مدول باشد. برای هر زیر مدول N از M، V(N) را مجموعه تمام زیر مدول های اول M که شامل N است تعریف می کنیم یعنی:

$$V(N) = \{P \in Spec(M) : P \supseteq N\}.$$

نکته ۱-۲۰ (ر.ک. [18]). فرض کنید M یک R- مدول و X=Spec(M) باشد. فرض کنید

$$\zeta(M) = \{V(N) \mid N \leq M\}$$

بدیهی است

$$V(0) = X = Spec(M) \;\; , \;\; V(M) = \phi.$$

همچنین برای هر خانواده $\{N_i \mid i \in I\}$ از زیر مدول های M داریم:

$$\bigcap_{i\in I} V(N_i) = V\left(\sum_{i\in I} N_i\right).$$

اثبات: زیرا اگر $P \in \bigcap_{i\in I} V(N_i)$ دلخواه باشد آنگاه به ازای هر $i \in I$، $P \in V(N_i)$. درنتیجه $N_i \subseteq \mathrm{P}$ و $P \in Spec(M)$ به ازای هر $i \in I$. پس $\sum_{i\in I} N_i \subseteq \mathrm{P}$ و $P \in Spec(M)$. بنابراین $P \in V(\sum_{i\in I} N_i)$ و در نتیجه

$$\bigcap_{i\in I} V(N_i) \subseteq V(\textstyle\sum_{i\in I} N_i). \qquad (i)$$

اکنون اگر $P \in V(\sum_{i\in I} N_i)$ دلخواه باشد $\sum_{i\in I} N_i \subseteq \mathrm{P}$ و $\mathrm{P} \in Spec(M)$. بدیهی است به ازای هر $i \in I$،

$$N_i \leq \textstyle\sum_{i\in I} N_i \subseteq P$$

پس $P \in V(N_i)$ به ازای هر $i \in I$. بنا براین $P \in \bigcap_{i\in I} V(N_i)$ و در نتیجه

$$V(\textstyle\sum_{i\in I} N_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} V(N_i) \qquad (ii)$$

با بکار بردن (i) و (ii) داریم:

$$\bigcap_{i\in I} V(N_i) = V(\textstyle\sum_{i\in I} N_i).$$

□

نکته بالا نشان می دهد که $\zeta(M)$ نسبت به اشتراک هر خانواده دلخواه بسته است. از طرفی برای زیر مدول های N_1 و N_2 از M داریم:

$$V(N_1) \cup V(N_2) \subseteq V(N_1 \cap N_2)$$

اگر $\zeta(M)$ تحت اجتماع متناهی بسته باشد یعنی برای هر دو زیر مدول N و L از M یک زیر مدول K از M چنان موجود باشدکه

$$V(N) \cup V(L) = V(K)$$

آنگاه M را یک R- مدول تاپ گوییم و در این صورت $\zeta(M)$ یک توپولوژی بر X=Spec(M) القا می نماید. این توپولوژی را توپولوژی زاریسکی بر X=Spec(M) گوییم. در این توپولوژی هر عضو از$\zeta(M)$ یک زیر مجموعه بسته می باشد.

تعریف ۱-۲۱. فرض کنید N یک زیر مدول اول از M باشد. هر عضو مینیمال V(N) نسبت به $\subseteq$ را یک زیر مدول اول مینیمال از N گوییم. هر زیر مدول اول مینیمال از (0)، یک زیر مدول اول مینیمال از M نامیده می شود.

تعریف ۱-۲۲. حلقه جابه جایی غیرنوتری R را یک حلقه شبه نیم موضعی گوییم اگر R فقط یک تعداد متناهی از ایده آل های ماکسیمال را داشته باشد. همچنین حلقه جابه جایی غیرنوتری R را یک حلقه شبه موضعی گوییم اگر فقط یک ایده آل ماکسیمال داشته باشد.

تعریف ۱-۲۳ (ر.ک. [9]). زیر مدول N از M را به طور کامل فشرده گوییم اگر زیر مدول N زیر مجموعه اجتماع خانواده ای از زیر مدول های اول M باشد آنگاه N زیر مجموعه یکی از زیر مدول های اول از آن خانواده باشد.

تعریف ۱-۲۴. زیر مدول N از M به طور قوی تحویل ناپذیر نامیده می شود اگر برای دو زیر مدول N_1 و N_2 از M،

$$N_1 \cap N_2 \subseteq N$$

نتیجه دهد $N_1 \subseteq N$ یا $N_2 \subseteq N$.

مثال ۱-۲۵ (ر.ک. [6, Le. 4.11]). هر زیر مدول اول از یک مدول ضربی، تحویل ناپذیر قوی می باشد.

تعریف ۱-۲۶ (ر.ک. [20] و [21]). مدول M را یک مدول بزوت گوییم اگر هر زیر مدول با تولید متناهی آن دوری باشد.

تعریف ۱-۲۷ (ر.ک. [5]). مدول M را توزیع پذیر گوییم اگر مشبکه حاصل از تمام زیر مدول های آن توزیع پذیر باشد. یعنی برای هر زیر مدول A و B و C از M داشته باشیم:

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$$

و

$$A + (B \cap C) = (A + B) \cap (A + C)$$

لم ۱-۲۸ (ر.ک. [20, cor. 2]). هر R- مدول بزوت توزیع پذیر می باشد.

قضیه ۱-۲۹ (ر.ک. [5, pro. 4]). فرض کنید R یک حلقه نیم موضعی باشد. در این صورت یک R- مدول، مدول ضربی است اگر و تنها اگر دوری باشد.

قضیه ۱-۳۰ (ر.ک. [5, pro. 7])**.** یک مدول توزیع پذیر است اگر و تنها اگر هر زیر مدول با تولید متناهی آن ضربی باشد.

نتیجه ۱-۳۱ (ر.ک. [10, cor. 2.9]). هر R- مدول ضربی آرتینی، دوری است.

نتیجه ۱-۳۲ (ر.ک. [10, Th. 2.8]). اگر M یک R- مدول ضربی باشد که تنها یک تعداد متناهی زیر مدول ماکسیمال داشته باشد آنگاه M دوری است.

قرار داد ۱-۳۳. از این پس برای R- مدول M، Spec(M) را با X نشان می دهیم.

تعریف ۱-۳۴. فضای X را T_0 − فضا گوییم هرگاه به ازای هر دو نقطه x و y که از آن فضا در نظر بگیریم یک مجموعه باز U وجود داشته باشد به طوریکه $x \in U$ و $y \notin U$ و یا $x \notin U$ و $y \in U$.

قضیه ۱-۳۵ (ر.ک. [15, Th. 6.1]). فرض کنید M یک R- مدول باشد. در این صورت گزاره های زیر معادل اند:

۱) X یک T_0 − فضا است.

۲) نگاشت طبیعی $\psi : Spec(M) \rightarrow Spec(R/Ann_R(M))$ که در آن ψ نگاشت کانونی تعریف شده در تبصره ۱-۱۴، می باشد یک به یک است.

۳) اگر V(P)=V(Q) در این صورت P=Q برای هر P و $Q \in X$.

۴) $\left|Spec_p(\mathrm{M})\right| \leq 1$ برای هر $p \in Spec(R)$.

تعریف ۱-۳۶. فرض کنید M یک R- مدول، N نیز یک زیر مدول از M باشد. $V^*(N)$ را به صورت:

$$V^*(N) = \{P \in Spec(M) \mid (P :_R M) \supseteq (N :_R M)\}$$

تعریف می کنیم. بدیهی است $V^*(M) = \emptyset$ و $V^*(0)=\mathrm{Spec(M)}$. همچنین اگر $\{N_i \mid i \in I\}$ خانواده ای از زیر مدول های M باشد آنگاه:

$$\cap V^*(N_i) = V^*(\textstyle\sum_{i\in I}(N_i :_R M)\, M)$$

همچنین برای دو زیر مدول L و N از M داریم:

$$V^*(\mathrm{N}) \cup V^*(\mathrm{L}) = V^*(\mathrm{N} \cap \mathrm{L})$$

بنابراین $\zeta^*(M) = \{V^*(N) \mid N \le M\}$، شامل مجموعه ϕ و Spec(M) می باشد. به علاوه عناصر $\zeta^*(M)$ تحت اشتراک دلخواه و اجتماع متناهی بسته می باشد. لذا در نظر گرفتن عناصر $\zeta^*(M)$ به عنوان زیر مجموعه های بسته از Spec(M) یک توپولوژی بر Spec(M) القا می نماید. این توپولوژی را توپولوژی شبه زاریسکی بر Spec(M) می گوییم.

نتیجه ۱-۳۷ (ر.ک. [15, cor. 6.2]). اگر M یک مدول تاپ باشد در این صورت Spec(M) نسبت به هر دو توپولوژی زاریسکی $\mathcal{T}$ و توپولوژی شبه زاریسکی $\mathcal{T}^*$ یک $T_0 -$ فضا است.

تبصره ۱-۳۸ (ر.ک. [16, cor. 3.7]). برای هر R- مدول M و $p \in Spec(R)$ گزاره های زیر هم ارزند:

۱) $S_p(pM) \neq M$.

۲) $S_p(pM)$ یک زیر مدول اول از M است.

۳) $Spec_p(M) \neq \phi$.

۴) $(pM :_R M) = (S_p(pM) :_R M) = p$.

قضیه ۱-۳۹ (ر.ک. [8, Page. 68, Pro 10]). فرض کنید M یک R- مدول و N′ یک زیر مدول از $S^{-1}R$- مدول، $S^{-1}M$ باشد. فرض کنید $\varphi(N')$ تصویر معکوس از N' تحت نگاشت $M \longrightarrow S^{-1}M$ باشد. در این صورت $S^{-1}\varphi(N') = N'$.

قضیه ۱-۴۰ (ر.ک. [17, Th. 4.1]). برای هر R- مدول M گزاره های زیرمعادل اند:

۱) M یک مدول پرایم فول غیرصفراست.

۲) برای هر $\mathrm{p} \in \mathrm{V(Ann(M))}$، M_p یک R_p- مدول پرایم فول غیرصفراست.

قضیه ۱– ۴۱ (ر.ک. [18, Le. 3.3]). فرض کنید M یک R– مدول تاپ باشد. در این صورت برای هر ایده آل اول p از R، M_p یک R_p– مدول تاپ می باشد.

قضیه ۱–۴۲ (ر.ک. [17, Th. 2.1]). فرض کنید M یک R– مدول و X=Spec(M). در این صورت گزاره های زیر هم ارزند:

۱) نگاشت طبیعی $\psi\colon \mathrm{Spec(M)} \to \mathrm{Spec(R/Ann}_R\mathrm{(M))}$ با تعریف:

$$\psi\,(P) = \frac{(P :_R \;\; M)}{Ann_R(M)} \qquad\qquad \forall\, P \in Spec(M)$$

پوشا است.

۲) برای هر $\mathrm{p} \in \mathrm{V}\big(\mathrm{Ann}_R(\mathrm{M})\big)$ وجود دارد $P \in \mathrm{X}$ به طوریکه $(\mathrm{P} :_R \mathrm{M}) = \mathrm{p}$.

۳) برای هر $\mathrm{p} \in \mathrm{V}\big(\mathrm{Ann}_R(\mathrm{M})\big)$، $\mathrm{pM_p} \neq \mathrm{M_p}$.

۴) برای هر $\mathrm{p} \in \mathrm{V}\big(\mathrm{Ann}_R(\mathrm{M})\big)$ و $S_p(\mathrm{pM})$ یک زیر مدول p- اول می باشد.

۵) برای هر $\mathrm{p} \in \mathrm{V}\big(\mathrm{Ann}_R(\mathrm{M})\big)$، $\mathrm{Spec_p(M)} \neq \phi$.

قرارداد ۱–۴۳. فرض کنید Y یک زیر مجموعه دلخواه از Spec(M) باشد. درابنصورت اشتراک تمام زیر مدول های اول M که به Y تعلق دارند را با $\Im(Y)$ نشان می دهیم یعنی:

$$\Im(Y) = \bigcap_{P \in Y} P$$

تعریف ۱–۴۴ ([ر.ک. $8, \S\, 4.1$]). فضای توپولوژیک X را تحویل ناپذیر گوییم اگر اشتراک هر دو زیرمجموعه باز غیر تهی X غیرتهی باشد. همچنین هر زیر مجموعه از فضای توپولوژیک که شامل یک نقطه منفرد باشد تحویل ناپذیر است . از [8] می دانیم که زیر مجموعه Y از فضای توپولوژیک X تحویل ناپذیر است اگر و تنها اگر بستار Cl(Y) تحویل ناپذیر باشد. هر زیر مجموعه تحویل ناپذیر ماکسیمال Y از X یک مولفه تحویل ناپذیر از X نامیده می شود و همیشه بسته است. یک زیر مجموعه E از فضای توپولوژیک X را یک مجموعه تحویل ناپذیر گوییم اگر زیر فضای E از X تحویل ناپذیر باشد. به عبارت دیگر E یک زیر مجموعه تحویل ناپذیر از X است اگر و تنها اگر برای هر دو زیر مجموعه باز U و V از X که شامل عضوی از E می باشند مجموعه $U \cap V$ نیز شامل عضوی از E باشد.

قضیه ۱– ۴۵ (ر.ک. [7, Th. 3.4]). فرض کنید M یک R– مدول و $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{Spec}(M)$ باشد.

۱) اگر Y تحویل ناپذیر باشد آنگاه $\Im(\mathrm{Y})$ یک زیرمدول اول است.

۲) اگر $\Im(\mathrm{Y})$ یک زیرمدول اول و $\Im(\mathrm{Y}) \in \overline{\mathrm{Y}}$ آنگاه Y تحویل ناپذیراست.

قضیه ۱-۴۶ (ر.ک. [15, Pro. 3.1]). برای هر R- مدول M نگاشت طبیعی ψ از X نسبت به توپولوژی زاریسکی پیوسته است.

قضیه ۱-۴۷ (ر.ک. [7, Lem. 3.3]). فرض کنید M یک R- مدول باشد. در این صورت برای هر $P \in Spec(M)$، $V(P)$ تحویل ناپذیر است.

قضیه ۱-۴۸ (ر.ک. [17, Pro. 3.4]). اگر M یک R- مدول پرایم فول باشد در این صورت:

$$\mathrm{Supp(M) = V(Ann}_R\mathrm{(M))}.$$

تذکر ۱-۴۹. اگر $N \leq L$ آنگاه $V(N) \supseteq V(L)$ و $V^*(N) \supseteq V^*(L)$. علاوه بر این برای هر زیر مدول N از M داریم:

$$V(N) \subseteq V^*(N)$$

قضیه ۱-۵۰ (ر.ک. [15, res. 3]). فرض کنید M یک R- مدول و N یک زیر مدول از M باشد. در این صورت

$$\mathrm{V(N) = V\big((N :_R M)M\big) = V^*\big((N :_R M)M\,\big)}$$

به خصوص $\mathrm{V(IM) = V^*(IM)}$ برای هر ایده آل I از R.

قضیه ۱- ۵۱ (ر.ک. [18, Th. 3.5]). گزاره های زیر را برای یک R- مدول M درنظربگیرید:

۱) M یک مدول ضربی است.

۲) برای هر زیر مدول N از M یک ایده آل A از R وجود دارد به طوریکه $\mathrm{V(N) = V(AM)}$.

۳) M یک مدول تاپ است.

۴) برای هر ایده آل اول p از R، $\mathrm{M_p}$ یک $\mathrm{R_p}$- مدول تاپ است.

۵) برای هر ایده آل اول p از R، $|Spec_{\mathrm{p}}(\mathrm{M})| < 1$.

۶) برای هر ایده آل ماکسیمال p از R، $\mathrm{M/pM}$ دوری است.

در این صورت $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 5 \Longrightarrow 6$. به علاوه اگر M با تولید متناهی باشد آنگاه $6 \Longrightarrow 1$.

تعریف ۱-۵۲. فرض کنید X یک مجموعه باشد یک پایه توپولوژیکی در X گردایه ای از زیر مجموعه های X است به طوری که:

۱) برای هر $\mathrm{x \in X}$ دست کم یک عضو پایه مانند B شامل x وجود دارد.

۲) اگر x متعلق به اشتراک دو عضو پایه مانند $\mathrm{B_1}$ و $\mathrm{B_2}$ باشد آنگاه عضوی از پایه مانند B_3 وجود دارد به طوریکه:

$$\mathrm{x \in B_3\ ,\ B_3 \subseteq B_1 \cap B_2}.$$

تعریف ۱-۵۳. فرض کنید β یک پایه توپولوژیکی در X باشد در این صورت توپولوژی تولید شده به وسیله β را بدین صورت تعریف می کنیم که زیر مجموعه U از X باز است اگر برای هر $x \in U$ عضوی از پایه مانند B وجود داشته باشد به طوریکه:

$$x \in B , B \subseteq U$$

با این تعریف بدیهی است هر عضو β در X باز است بنابراین $\beta \subseteq \mathcal{T}$.

لم ۱-۵۴ (ر.ک. [19, Le. 13.2]). فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. همچنین فرض کنید C گردایه مجموعه های باز X باشد به طوری که برای هر مجموعه باز U از X و هر عنصر $x \in U$ عنصر c از C چنان وجود داشته باشد که $x \in c \subseteq U$، در این صورت C پایه ای برای توپولوژی روی X است.

قضیه ۱-۵۵ (ر.ک. [8, page 87, pro. 8]). فرض کنید A یک حلقه و m یک ایده ال ماکسیمال از A و M یک A- مدول باشد. اگر یک ایده ال a از A چنان موجود باشد که m تنها ایده ال ماکسیمال از A شامل a باشد و aM=0 در این صورت همریختی کانونی $M \longrightarrow M_m$ دوسویی است.

قضیه ۱-۵۶ (ر.ک. *[8, Pro. 14]*). فرض کنید R یک حلقه باشد. یک زیر مجموعه Y از $X = spec(R)$ تحویل ناپذیر است اگر و تنها اگر ایده آل $\mathfrak{I}\,(Y)$ یک ایده آل اول باشد.

تعریف ۱-۵۷. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. همچنین فرض کنید x و y نقاطی در X باشند. می گوییم x و y جدا از هم هستند اگر هر کدام در یک مجموعه باز که شامل دیگری نمی باشد قرار بگیرند.

تعریف ۱-۵۸. فضای توپولوژیک X، T_1 – فضا است اگر هر دو نقطه در X جدا از هم باشند. همچنین فضای توپولوژیک X، T_1 – فضا است اگر و فقط اگر تمام نقاط X در X بسته باشند یعنی برای هر x در X مجموعه $\{x\}$ یک مجموعه بسته باشد.

تبصره ۱-۵۹ (ر.ک. [3, Ex. 21]). فرض کنید $\varphi : A \to B$ یک هومومورفیسم حلقه باشد. فرض کنید

$$Y = Spec\,(A) \quad , \quad X = Spec\,(B)$$

اگر $q \in Y$ آنگاه $\varphi^{-1}(q)$ یک ایده آل اول از A است. همریختی φ یک نگاشت $\varphi^{*} : Y \to X$ با تعریف:

$$\varphi^{*}(q) = \varphi^{-1}(q)$$

را القا می کند. به طوریکه اگر φ پوشا باشد آنگاه φ^{*} همئومورفیسم از Y به توی زیر مجموعه بسته $V(Ker(\varphi))$ از X است.

لم۱-۶۰ (ر.ک. [17, Cor. 3.3]). فرض کنید M یک R-مدول غیرصفر باشد. اگر M پرایم فول باشد در این صورت برای هر $p \in V(Ann(M))$، $(pM :_R M) = p$. ولی عکس آن لزوما درست نیست.

نتیجه ۱-۶۱ (ر.ک. [15 , res. 1]). اگر $(N :_R M) = (L :_R M)$ پس $V(N)=V(L)$. همچنین اگر N و L هر دو اول باشند عکسش نیز درست است.

قضیه ۱-۶۲ (ر.ک. [15 , Pro. 5.1]). فرض کنید M یک R- مدول و $Y \subseteq X$ در این صورت $V(\Im(Y)) = Cl(Y)$. بنابر این Y بسته است اگر و تنها اگر $V(\Im(Y)) = Y$.

قضیه ۱-۶۳ (ر.ک. [15 , Pro. 5.2]). فرض کنید M یک R- مدول و فرض کنید $P \in X = Spec(M)$. در این صورت

۱) $Cl(\{P\})=V(P)$.

۲) برای هر $Q \in X = Spec(M)$، $(Q :_R M) \supseteq (P :_R M)$ اگر و تنها اگر $V(Q) \subseteq V(P)$.

۳) مجموعه $\{P\}$ یک زیر مجموعه بسته از X است اگر و تنها اگر

a) P یک زیر مدول ماکزیمال از M باشد و

b) $Spec_p(M) = \{P\}$ که $p = (P :_R M)$ یعنی $|Spec_p(M)| = 1$.

تبصره ۱-۶۴ (ر.ک. [15]). فرض کنید M یک R- مدول و N یک زیر مدول از آن باشد. در این صورت:

$$V(N) = \bigcup_{P \in V(N :_R M)} Spec_p(M)$$

که در آن

$$Spec_p(M) = \{P \in Spec(M) | (P :_R M) = p\}.$$