وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تربیت معلم آذربایجان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه مقطع کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

عنوان

ارایه شرایط کافی برای تبدیل مساله مقدار مرزی شامل معادله کوشی— ریمان به معادلات انتگرال فردهلم

استاد راهنما

دکتر محمد جهانشاهی

استاد مشاور

دکتر جعفر پورمحمود

پژوهشگر

مجتبی سجاد منش

خرداد ۱۳۸۷

تبریز— ایران

بسم اللّه الرّحمن الرّحيم

قدردانی

اکنون که در سایه‌ی الطاف بی‌کران ایزد منان، این پایان‌نامه به اتمام رسیده است، وظیفه‌ی خود می‌دانم تا از تمامی عزیزانی که در به ثمر نشستن زحمات این حقیر، مرا یاری فرموده‌اند، تشکر و قدردانی نمایم. امید است که سپاس بی‌دریغ اینجانب را بپذیرند.

استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر محمد جهانشاهی که گنجینه‌های دانش خود را در نهایت صبوری و سخاوت در اختیار اینجانب قرار دادند و مرا در مراحل مختلف این پایان‌نامه راهنمایی کردند.

استاد محترم جناب آقای دکتر جعفر پورمحمود که زحمت مشاوره‌ی این پایان‌نامه را تقبل فرمودند.

جناب آقای دکتر حقیقت دوست و جناب آقای دکتر غفاری که داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند.

سایر اساتید محترم که در طول دوران تحصیلم افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام.

خانواده عزیزم و به خصوص پدر و مادر عزیزم که یاور و مشوق همیشگی من در زندگی و به ویژه در دوران تحصیلم بوده‌اند.

برای تمام این عزیزان سربلندی، سلامتی و موفقیت در تمام مراحل زندگی آرزو می‌کنم.

مجتبی سجاد منش

خرداد ۱۳۸۷
تبریز—ایران

فهرست مندرجات

چکیده

مساله‌های مقدار مرزی ریاضی فیزیک از مباحث اساسی ریاضیات کاربردی، فیزیک و مهندسی هستند. این مساله‌ها می‌توانند از جهت معادله دیفرانسیل، ناحیه مربوط به جواب و شرط‌های مرزی داده شده خوش‌طرح نباشند. هانری لبگ عدم وجود جواب مساله‌های مقدار مرزی را از دیدگاه ناحیه معادله دیفرانسیل بررسی کرده و در سال ۱۹۲۴ چنین نواحی را معرفی نمود. هانس لوی مساله‌های مقدار مرزی را از دیدگاه وجود و عدم وجود جواب معادله دیفرانسیل مربوطه مورد بررسی قرار داده و در سال ۱۹۵۷ مثالی ارایه نمود که علیرغم تحلیلی‌بودن ضرایب معادله و بینهایت‌بار مشتق‌پذیربودن تابع طرف راست آن، معادله دیفرانسیل پاره‌ای خطی حتی جواب موضعی هم نداشت.

این پایان‌نامه از دو قسمت مجزا تشکیل یافته است. در قسمت اول، شرط‌های کافی برای تبدیل مساله مقدار مرزی شامل معادله کوشی– ریمان به دستگاه معادلات انتگرال فردهلم ارایه می‌شود و در قسمت دوم به بررسی خوش‌طرح بودن مساله کوشی– ریمان از دیدگاه شرط‌های مرزی پرداخته که به معرفی نوع جدیدی از شرط مرزی، علاوه‌بر حالت‌های کلاسیک، منجر می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: معادله دیفرانسیل پاره‌ای مرکب، مساله مقدار مرزی، معادله انتگرال فردهلم، شرط‌های لازم، جواب اساسی، شرط‌های مرزی موضعی و غیرموضعی، تابع دلتای دیراک.

پیشگفتار

نظریه مساله‌های مقدار مرزی در سال‌های اخیر پیشرفت‌های زیادی داشته‌است و کتاب‌ها و مقاله‌های زیادی در این‌خصوص نوشته می‌شود. یکی از موضوعات اساسی و مهم در مورد این مساله‌ها، خوش‌طرح‌بودن آنهاست. یک مساله مقدار مرزی زمانی خوش‌طرح گفته می‌شود که حایز سه شرط: وجود جواب، یگانگی جواب و پیوستگی جواب نسبت به شرایط اولیه باشد. ریاضیدانان معمولا برای شناخت حریم و حوزه مساله‌های خوش‌طرح و چگونگی توسعه آنها، مساله‌های بدطرح را هم بررسی می‌کنند.

این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل است. در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی آورده می‌شود. در فصل دوم به بررسی خوش‌طرح بودن مساله‌های مقدار مرزی و اولیه پرداخته و به دنبال آن چند نمونه از مساله‌های بدطرح بیان می‌گردد و در بخش آخر این فصل، جواب‌های اساسی برای معادلات عادی و پاره‌ای و نحوه محاسبه آنها با ارایه چند مثال آورده می‌شود. در فصل سوم شرط‌های کافی برای تبدیل مساله مقدار مرزی شامل معادله کوشی– ریمان با شرط‌های مرزی غیرموضعی به دستگاه معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم بیان می‌گردد به‌این‌صورت که ابتدا با استفاده از جواب تعمیم‌یافته معادله الحاقی مساله، شرط‌های لازم برای وجود جواب معادله دیفرانسیل را بدست آورده و سپس با استفاده از روش تحلیلی، تکینی‌ها در عبارت‌های انتگرالی جواب رفع و یا منتظم‌سازی می‌شوند و درنهایت مساله مقدار مرزی داده شده با تعیین شرط‌هایی روی داده‌های آن به دستگاه معادلات

انتگرالی فردهلم نوع دوم تبدیل می‌گردد که با استفاده از معادلات انتگرال بدست آمده و مقادیر مرزی تابع مجهول مساله، می‌توان آن را در داخل ناحیه با روش‌های عددی و تقریبی حل کرد و درنهایت در فصل آخر پایان‌نامه، معادله کوشی– ریمان مورد بررسی قرار می‌گیرد و نشان می‌دهیم که این مساله با شرط‌های مرزی کلاسیک یک مساله بدطرح می‌باشد ولی با شرط مرزی غیرموضعی به یک مساله خوش‌طرح تبدیل می‌گردد. لازم به ذکر است که منابع اصلی این پایان‌نامه، مقالات [۹] و [۱۰] می‌باشند.

فصل ۱

مقدمات و تعاریف اساسی

در این فصل تعاریف، مفاهیم اولیه و قضایای اساسی را که پیشنیاز برای مطالعه فصل‌های بعدی است بیان خواهیم کرد.

۱.۱ معادلات دیفرانسیل پاره‌ای و دسته‌بندی آن

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ تابعی از n **متغیر مستقل** $x_1, x_2, \dots, x_n$ باشد. **معادله دیفرانسیل پاره‌ای** (به‌طور خلاصه PDE)، معادله‌ای شامل متغیرهای مستقل $x_1, x_2, \dots, x_n$، متغیر وابسته یا مجهول u و مشتقات جزیی u نسبت به x_i ها می‌باشد که درحالت کلی به‌شکل

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, \dots, u_{x_i x_j}, \dots) = 0,$$

است که در آن $u_{x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}$ و $u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$؛ $i, j = 1, 2, \dots, n$.

تعریف ۲.۱.۱ منظور از **مرتبه** PDE، بالاترین مرتبه مشتقی است که در آن ظاهر می‌گردد.

تعریف ۳.۱.۱ PDE خطی مرتبه اول خطی دو متغیره به‌شکل

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y), \qquad (۱.۱.۱)$$

است که در آن $a,b,c,d \in C^{۱}(\Omega)$ ، $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{۲}$ و $a^{۲}+b^{۲} \neq ۰$.

تذکر ۱.۱.۱ هرگاه $Lu := F(x_{۱},x_{۲},\ldots,x_n,u_{x_{۱}},\ldots,u_{x_n},u_{x_{۱}x_{۱}},\ldots)$، عملگر L یک **عملگر خطی** نامیده می‌شود اگر و تنها اگر

$$\forall c_{۱},c_{۲} \in \mathbb{C}\ , \qquad L[c_{۱}u_{۱}+c_{۲}u_{۲}] = c_{۱}L[u_{۱}]+c_{۲}L[u_{۲}].$$

نمادگذاری ۱.۱.۱ فرض کنید $\alpha = (\alpha_{۱},\alpha_{۲},\ldots,\alpha_n)$ برداری با مؤلفه‌های صحیح نامنفی α_j ها باشد. مشتق تابع $f(x)$ از مرتبه $|\alpha| = \alpha_{۱}+\alpha_{۲}+\cdots+\alpha_n$ را با $D^{\alpha}f(x)$ نشان داده که به‌صورت

$$D^{\alpha}f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}f(x_{۱},x_{۲},\ldots,x_n)}{\partial x_{۱}^{\alpha_{۱}}\partial x_{۲}^{\alpha_{۲}}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} \ \ , \ \ D^{\circ}f(x) = f(x).$$

تعریف می‌شود. مجموعه همه توابع $f(x)$ که در ناحیه دلخواه $G \subseteq \mathbb{R}^n$ پیوسته بوده و مشتقات $D^{\alpha}f(x)$، برای $|\alpha| \leq k$ موجود باشد با نماد $C^k(G)$ نشان داده و درصورتی‌که $G=\mathbb{R}^n$، با نماد ساده C^k نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱ معادلات هذلولوی و بیضوی مرتبه اول. در معادله (۱.۳.۲) چون $a^{۲}+b^{۲} \neq ۰$ می‌توان فرض کرد، بدون کاستن از کلیت، $a(x,y) \neq ۰$. دسته جواب منحنی‌هایی که از حل معادله $\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}$ بدست می‌آیند، منحنی‌های مشخصه نامیده می‌شوند که در صورت حقیقی‌بودن این منحنی‌ها، معادله متناظر را هذلولوی و در غیر این‌صورت، معادله را بیضوی می‌گوییم.

مثال ۱.۱.۱ در معادله $\frac{\partial u_1(X)}{\partial x_1} + i\frac{\partial u_1(X)}{\partial x_2} = 0$، چون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{1}{i} = -i,$$

منحنی‌های مشخصه به‌صورت $x_2 = -ix_1 + c$ (c ثابت دلخواه) می‌باشند و بنابراین معادله بیضوی است. در معادله $\frac{\partial u_2(X)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2(X)}{\partial x_2} = 0$، چون

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{1}{1} = 1.$$

منحنی‌های مشخصه بصورت $x_2 = x_1 + c$ (c ثابت دلخواه) می‌باشند و لذا این معادله هذلولوی است.

تعریف ۵.۱.۱ PDE **خطی مرتبه دوم دو متغیره، درحالت کلی به‌صورت**

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u = g(x,y), \quad (1.1.2)$$

می‌باشد که درآن $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

تعریف ۶.۱.۱ **معادلات هذلولوی، بیضوی و سهموی مرتبه دوم.** معادله (۱.۱.۲) در نقطه $p_0(x_0, y_0)$ برحسب اینکه مقدار $\Delta = b^2(x_0, y_0) - 4a(x_0, y_0)c(x_0, y_0)$ مثبت، صفر یا منفی باشد به‌ترتیب هذلولوی، سهموی و بیضوی گفته می‌شود. اگر در تمام نقاط ناحیه $G \subseteq \mathbb{R}^2$ مقدار $\Delta = b^2 - 4ac$ مثبت، صفر یا منفی بشود، معادله روی آن ناحیه به‌ترتیب هذلولوی، سهموی یا بیضوی است.

قضیه ۱.۱.۱ فرض کنید معادله (۱.۱.۲) در یک همسایگی نقطه $p_0(x_0, y_0)$ هذلولوی، سهموی یا بیضوی باشد. در این‌صورت، تبدیل مختصات معکوس‌پذیر $\xi = \xi(x,y)$ و $\eta = \eta(x,y)$ وجود دارد که در یک همسایگی نقطه $p_0(x_0, y_0)$ تعریف شده به‌طوری‌که معادله (۱.۱.۲) می‌تواند به

یکی از سه شکل ذیل تبدیل گردد:

۱) اگر $p_\circ(x_\circ, y_\circ)$ یک نقطه هذلولوی باشد

$$u_{\xi\eta} + \psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \circ,$$

که نخستین شکل کانونی معادله هذلولوی نامیده می‌شود.

۲) اگر $p_\circ(x_\circ, y_\circ)$ یک نقطه سهموی باشد

$$u_{\eta\eta} + \psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \circ.$$

۳) اگر $p_\circ(x_\circ, y_\circ)$ یک نقطه بیضوی باشد

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \circ.$$

برهان. به [۲] مراجعه شود. ■

تذکر ۲.۱.۱ درمعادله هذلولوی تبدیل $\beta = \xi - \eta$ و $\alpha = \xi + \eta$ معادله $u_{\xi\eta} + \psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \circ$ را به‌شکل

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) = \circ,$$

تبدیل می‌کند که دومین شکل کانونی معادله هذلولوی نامیده می‌شود.

تذکر ۳.۱.۱ اهمیت طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای (هذلولوی، سهموی یا بیضوی) در درجه اول، به‌خاطر روش‌های حلی است که برای هرکدام از این معادلات به‌کار می‌رود و در درجه دوم، متناظر با نوع معادله، شرط‌های اولیه و مرزی متناسب با آن روی معادله درنظر گرفته می‌شود. به‌عنوان مثال برای معادلات سهموی و هذلولوی، معمولا شرط‌های اولیه و برای معادلات بیضوی، شرط‌های مرزی درنظر گرفته می‌شود.

تذکر ۴.۱.۱ عملگر دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دوم خطی، درحالت کلی به‌شکل

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu,$$

است که در آن a_{ij}، b_i و c توابعی از متغیرهای مستقل $x_1, x_2, \ldots, x_n$ می‌باشند.

عملگر الحاقی $L^*[\ ]$ به‌صورت

$$L^*[w] = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 (a_{ij}w)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (b_i w)}{\partial x_i} + cw,$$

تعریف می‌شود که در آن $a_{ij} \in C^2$ و $b_i \in C^1$؛ $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

اکنون اتحاد لاگرانژ برای زوج توابع $u, w \in C^2$، با استفاده از محاسبات ساده، به‌صورت

$$wL[u] - uL^*[w] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial x_i}\ ,$$

به‌دست می آید که در آن

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} w \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial (a_{ij} w)}{\partial x_j}) + b_i uw.$$

به آسانی می‌توان دید که اگر

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\ , \qquad i = 1, 2, \cdots, n\ .$$

در این‌صورت عملگر L، عملگر خودالحاق می‌باشد، یعنی $L^*[\ ] = L[\ ]$ و داریم:

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\ \frac{\partial u}{\partial x_j}) + cu.$$

مثال ۲.۱.۱ هرگاه L یک عملگر دیفرانسیلی با ضرایب ثابت باشد در این‌صورت، زمانی عملگر L خودالحاق است که جمله مشتق مرتبه اولی نداشته باشد.

۲.۱ شرایط سه‌گانه؛ هولدر، لیپ‌شیتس و خطوط لیاپانوف

تعریف ۱.۲.۱ تابع $f \in C^{1}(G)$ در **شرط هولدر** صدق می‌کند هرگاه، اعداد $c > 0$ و $0 < \alpha \leq 1$ موجود باشند به‌طوری که برای هر $x_1, x_2 \in G$ رابطه

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq c|x_1 - x_2|^{\alpha}.$$

برقرار باشد.

تعریف ۲.۲.۱ تابع F در **شرط لیپ‌شیتس** از مرتبه α در نقطه c صدق می‌کند هرگاه به‌ازای هر x در همسایگی c، رابطه

$$|F(x) - F(c)| \leq L|x - c|^{\alpha},$$

برقرار باشد که در آن L، مقدار ثابت مثبت به‌نام ثابت لیپ‌شیتس است.

تعریف ۳.۲.۱ خم بسته Γ را یک **خم لیاپانوف** گوییم هرگاه

۱) بردار قائم بر خم Γ که با $\vec{n}$ نشان داده می‌شود، به‌طور پیوسته روی آن تغییر کند.

۲) در همسایگی به‌دلخواه کوچک هر نقطه از خم Γ، هر خط موازی با بردار قائم بر خم آن‌را فقط در یک نقطه قطع کند.

۳) برای هر دو نقطه دلخواه y و x که فاصله آنها به‌قدرکافی کوچک باشد، رابطه

$$| < n_x, n_y > | \leq |x - y|^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1$$

برقرار باشد که در آن $| < n_x, n_y > |$، زاویه بین بردار قائم بر خم در نقاط y و x را نشان می‌دهد.

۳.۱ تبدیلات لاپلاس، فوریه و کاربرد آنها برای حل معادلات پاره‌ای

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنید $f(x)$، تابع به‌طورمطلق انتگرال‌پذیر باشد، یعنی $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$. تابع $F(\alpha)$ را به‌صورت $F(\alpha) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\alpha t}\ dt$ درنظر بگیرید، در این صورت

$$f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}\ d\alpha.$$

تابع $F(\alpha)$، **تبدیل فوریه** تابع $f(x)$ و $f(x)$ **تبدیل معکوس فوریه** $F(\alpha)$ نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۳.۱ فرض کنید $f(t)$ برای $t > ۰$ تعریف شده باشد. **تبدیل لاپلاس** $f(t)$ که آن را با $F(s)$ یا $\mathcal{L}\{f(t)\}$ نشان می‌دهیم، به‌صورت

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{۰}^{\infty} e^{-st} f(t)dt, \qquad (۱.۳.۳)$$

تعریف می‌شود که در آن s، یک عدد حقیقی مثبت یا یک عدد مختلط با قسمت حقیقی مثبت بوده به‌طوری‌که انتگرال (۱.۳.۱) همگرا باشد.

تبدیل معکوس لاپلاس که با $\mathcal{L}^{-۱}\{F(s)\} = f(x)$ نشان داده می‌شود به‌صورت

$$f(x) = \mathcal{L}^{-۱}\{F(s)\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{xs} F(s)\ ds, \qquad x > ۰$$

و $f(x) = ۰$ برای $x \le ۰$، تعریف می‌گردد.

تذکر ۱.۳.۱ تابع $f(x)$ بر بازه $a < x < b$ قطعه‌ای پیوسته گفته می‌شود در صورتی‌که، اگر این بازه به تعداد متناهی زیربازه تقسیم گردد:

۱) تابع $f(x)$ در هر زیربازه پیوسته باشد.

۲) ناپیوستگی تابع $f(x)$ در انتهای هر زیربازه، از نوع ناپیوستگی جهشی باشد.

تذکر ۲.۳.۱ تابع $f(x)$ از مرتبه نمایی $e^{\alpha x}$ گفته می‌شود هرگاه، $e^{-\alpha x}|f(x)|$ برای هر x بزرگتر از عدد متناهی A کراندار باشد. یعنی

$$|f(x)| \leq Me^{\alpha x}, \qquad x > A,\ M, \alpha = \text{ثابت} \ .$$

قضیه ۱.۳.۱ قضیه وجودی تبدیل لاپلاس. فرض کنید f تابع قطعه‌ای پیوسته در بازه $[0, T]$ برای هر Tی مثبت باشد و همچنین آن از مرتبه نمایی $e^{\alpha x}$ باشد در این‌صورت، تبدیل لاپلاس $f(t)$ برای $s > \alpha$ وجود دارد.

برهان. به قضیه ۱ بخش ۱.۴.۱ ; [۴] مراجعه شود. ■

مثال ۱.۳.۱ کاربرد تبدیل فوریه در حل مسایل شامل PDE. جواب مساله دیریکله

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad -\infty < x < \infty\ ,\ y > 0. \tag{۱.۳.۴}$$

$$u(x, 0) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

را در نیم‌صفحه $y > 0$ پیدا کنید.

وقتی y به بینهایت میل می‌کند، u کراندار است.

هرگاه $|x|$ به بینهایت میل می‌کند، u و u_x صفر می‌باشد.

حـل: فرض کنید $U(\alpha, y)$ تبدیل فوریه $u(x, y)$ نسبت به متغیر x باشد، در این‌صورت

$$U(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} u(x, y)\ dx.$$

اگر از طرفین معادله (۱.۳.۲)، نسبت به متغیر x، تبدیل فوریه بگیریم داریم:

$$F[u_{xx} + u_{yy}] = F[0] = 0 \ \Rightarrow\ F[u_{xx}] + F[u_{yy}] = 0. \tag{۱.۳.۵}$$

اما با توجه به خواص تبدیل فوریه می‌توان نوشت:

$$F[u_{xx}] = (-i\alpha)^2 F[u] = -\alpha^2 U(\alpha, y).$$

$$F[u_{yy}] = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} u_{yy}(x,y)\ dx = \frac{\partial^۲}{\partial y^۲}[\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y) e^{i\alpha x}\ dx] = \frac{\partial^۲ U(\alpha,y)}{\partial y^۲} .$$

با جایگذاری دو رابطه اخیر در رابطه (۱.۳.۳) داریم:

$$-\alpha^۲ U(\alpha,y) + U''(\alpha,y) = ۰.$$

این معادله، یک معادله دیفرانسیل معمولی نسبت به متغیر y بوده و جواب عمومی آن به‌صورت $U(\alpha,y) = A(\alpha)e^{\alpha y} + B(\alpha)e^{-\alpha y}$ می‌باشد.

چون وقتی y به بینهایت میل می‌کند U کراندار است، پس برای $\alpha > ۰$ باید داشته باشیم:

$$A(\alpha) = ۰ \ \Rightarrow\ U(\alpha, ۰) = B(\alpha). \qquad (۱.۳.۶)$$

همین‌طور، زمانی‌که $\alpha < ۰$ باشد در این‌صورت

$$B(\alpha) = ۰ \ \Rightarrow\ U(\alpha, ۰) = A(\alpha). \qquad (۱.۳.۷)$$

از روابط (۱.۳.۴) و (۱.۳.۵) داریم:

$$U(\alpha,y) = U(\alpha, ۰)e^{-|\alpha| y}.$$

با توجه به اینکه $U(\alpha, ۰) = F[u(x, ۰)] = F[f(x)]$ می‌باشد، داریم:

$$U(\alpha,y) = F[f(x)]\ e^{-|\alpha| y}.$$

در نهایت، از تبدیل معکوس فوریه $U(\alpha,y)$ بدست می آوریم:

$$u(x,y) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\alpha,y) e^{-i\alpha x} d\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\alpha\xi} e^{-|\alpha| y} d\xi] e^{-i\alpha x} d\alpha$$

$$= \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha[i(\xi - x)] - |\alpha| y} d\alpha = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \times \frac{۲y}{(\xi - x)^۲ + y^۲}\ d\xi.$$

پس جواب مساله دیریکله برای نیم‌صفحه $y > ۰$ به‌صورت

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - x)^۲ + y^۲}\ d\xi.$$

است.

مثال ۲.۳.۱ کاربرد تبدیل لاپلاس در حل مسایل شامل PDE. جواب مساله انتشار حرارت

$$u_t = ku_{xx} \ , \qquad 0 < x < l \ , \ t > 0. \tag{۱.۳.۸}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 1. \tag{۱.۳.۹}$$

$$u(x,0) = 1 + \sin(\frac{\pi}{l}x). \tag{۱.۳.۱۰}$$

را پیدا کنید.

حل: فرض کنید $U(x,s)$، تبدیل لاپلاس $u(x,t)$ متناظر با متغیر t باشد. اگر از طرفین روابط (۱.۳.۶) و (۱.۳.۷) تبدیل لاپلاس گرفته شود، بدست می آوریم:

$$sU(x,s) - u(x,0) = kU_{xx}(x,s). \tag{۱.۳.۱۱}$$

$$U(0,s) = U(l,s) = \frac{1}{s} \ . \tag{۱.۳.۱۲}$$

با بکارگیری رابطه (۱.۳.۸) در (۱.۳.۹) یک معادله دیفرانسیل معمولی، بر حسب متغیر x، به همراه شرط مرزی (۱.۳.۱۰) بدست می آید که با حل آن داریم:

$$U(x,s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s + k\frac{\pi^2}{l^2}} \sin\frac{\pi}{l}x.$$

جواب اخیر را می‌توان به‌شکل ساده

$$U(x,s) = \frac{1}{s} + \frac{b}{s-a} \ ,$$

نوشت که در آن

$$a = -k\frac{\pi^2}{l^2} \ , \quad b = \sin\frac{\pi}{l}x$$

در نهایت، با به‌کارگیری تبدیل معکوس لاپلاس $U(x,s)$، جواب

$$u(x,t) = 1 + be^{at} = 1 + (\sin\frac{\pi}{l}x)e^{-k\frac{\pi^2}{l^2}t}.$$

برای مساله حاصل می‌گردد.

۴.۱ معادلات انتگرالی (فردهلم و ولترا)، برخی روش‌های حل و نظریه‌ها

تعریف ۱.۴.۱ شکل استاندارد **معادله انتگرالی خطی ولترا** به‌صورت

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt, \qquad (۱.۴.۱۳)$$

می باشد که در آن $x \in \mathbb{R}$، λ مقدار ثابت و $u(x)$ تابع مجهول معادله انتگرال بوده و زیر علامت انتگرال به‌صورت خطی ظاهر می‌شود. در صورتی‌که $f(x) = 0$، معادله انتگرالی همگن و در غیر این‌صورت، ناهمگن نامیده می‌شود.

توجه شود که منظور از خطی بودن معادله انتگرالی در $u(x)$ این است که هرگاه $u_1(x)$ و $u_2(x)$ جواب‌های بخش همگن معادله انتگرال متناظر باشند در این‌صورت، ترکیب خطی $c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$ نیز یک جواب معادله انتگرال همگن باشد.

تعریف ۲.۴.۱ معادلات انتگرالی ولترا، با توجه به مقدار $\phi(x)$ در معادله (۱.۴.۱)، به دو گروه مهم تقسیم‌بندی می‌شوند:

۱) زمانی‌که $\phi(x) = 0$ باشد: دراین‌صورت معادله (۱.۴.۱) به‌صورت $f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt = 0$ تبدیل می گردد و به معادله انتگرال ولترای نوع اول معروف است که در این حالت، مجهول معادله فقط زیر علامت انتگرال وجود دارد.

۲) زمانی‌که $\phi(x) \neq 0$ باشد: دراین‌صورت معادله (۱.۴.۱)، با تقسیم طرفین تساوی بر تابع $\phi(x)$، به‌صورت $u(x) = g(x) + \lambda \int_a^x k_1(x,t)u(t)dt$ تبدیل گشته که در آن $g(x) = \dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ و $k_1(x,t) = \dfrac{k(x,t)}{\phi(x)}$ که به معادله انتگرال ولترای نوع دوم معروف است و در این‌حالت، مجهول معادله علاوه بر زیر علامت انتگرال در خارج آن نیز وجود دارد.