۱۳۷۸/۲/۲۵

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
تهیه مدارک

دانشگاه تهران

دانشکدهٔ علوم، گروه ریاضی

پایان‌نامهٔ دورهٔ کارشناسی ارشد ریاضیات محض

گروههای جایگشتی متناهیک

استاد راهنما

دکتر محمدرضا درفشه

نگارش

مهدی ایرانمنش

زمستان ۱۳۷۷

۲۴۸۶۹

۵۰۴۱/۲

فهرست مطالب

مقدمه .... یک

فصل اول- تاریخچه ۱

فصل دوم- مفاهیم و قضایای مقدماتی ۴

۲.۱. مفاهیم اساسی گروههای جایگشتی ۴

۲.۲. گروههای جایگشتی نامتناهی ۲۵

فصل سوم- قضایای ساختاری ۳۰

۳.۱. رده‌بندی گروههای جایگشتی متناهیک با مدارهای متناهی ۳۱

۳.۲. زیرگروههای نرمالِ یک گروه متناهیک ۴۲

۳.۳. زیرگروههای متناهیکِ ماکسیمال در Sym(Ω) ۵۲

۳.۴. خواص گروههای متناهیک به‌عنوان زیرگروههای Sym(Ω) ۶۲

فصل چهارم- مثالهایی متنوع از گروههای متناهیک ۷۱

۴.۱. مثالی از نظریهٔ گراف ۷۱

۴.۲. گروههای فروبینیوس نامتناهی ۷۳

۴.۳. گروههای برنساید ۷۵

مراجع ۷۷

واژه‌نامه ۷۹

۲۴۸۶۹

مقدمه

رسالهٔ حاضر دربارهٔ نوعِ خاصی از گروههای جایگشتی موسوم به گروههای متناهیک است و بخش اعظم آن از [5] استخراج شده است. به علت نسبتاً جدید بودنِ موضوع، تاکنون مقالات محدودی در این زمینه منتشر شده است. ساختارِ عجیب و پیچیدهٔ این نوع گروهها تاکنون به‌طور کامل روشن نشده است. در این رساله سعی شده که پیچیده بودنِ ساختارهای موجود تا حدِ امکان بیان شوند.

از آنجا که در هر فعالیت علمی، گذشتهٔ موضوعِ موردِ مطالعه، در ادامهٔ راه آینده نقشی اساسی دارد، در فصل اول تاریخچه‌ای فشرده از نظریهٔ گروههای جایگشتی ذکر شده است. در فصل دوم یک سری مفاهیم و قضایای بنیادی گروههای جایگشتی به همراه ایده‌های اساسی آورده شده است که البته شاید شاملِ همهٔ مفاهیم گروههای جایگشتی نباشد. (مرجع [6] منبع نسبتاً جامعی برای مفاهیم بنیادی گروههای جایگشتی است). در ادامهٔ این فصل با تعریفِ گروههای شبه‌متناهی، گروههای جایگشتی نامتناهی مطرح می‌شوند و سپس گروههای متناهیک به عنوان دوگانِ گروههای شبه‌متناهی تعریف شده و یک سری خواصِ مقدماتیِ این نوع گروهها ذکر شده است. جایگشتِ متناهیک تنها تعد د متناهی نقطهٔ ثابت دارد و ترکیب دو جایگشتِ متناهیک، ممکن است متناهیک نباشدز ولی نشان می‌دهیم چنین گروههای وجود دارند. این خاصیت سرمنشاء مشاهده یک سری خواصِ عجیب در این نوع گروهها خو هد بود. در فصل سوم به مطالعهٔ ساختارِ این نوع گروهها خواهیم پرداخت. ابتدا به رده‌بندی گروههای متناهیکی که همهٔ مدارهای آنها متناهی است می‌پردازیم و در بخش ۳.۲ به مطالعهٔ زیرگروههای نرمالِ یک گروه متناهیک خواهیم پرداخت. در بخش ۳.۳ نشان می‌دهیم اگر Ω

شمارا باشد، مجموعهٔ زیرگروههای متناهیک در $\mathrm{Sym}(\Omega)$ ناشماراست و هر زیرگروه متناهیک مشمولِ زیرگروهی متناهیک و ناشماراست. در بخش ۳.۴ گروههای متناهیک را به‌عنوان زیرگروههای $\mathrm{Sym}(\Omega)$ در نظر می‌گیریم. مهمترین نتیجه‌ای که در این بخش می‌گیریم این است که اندیس هر زیرگروهِ متناهیک در $\mathrm{Sym}(\Omega)$ ناشماراست. همچنین در این بخش نشان می‌دهیم هیچ زیرگروهِ متناهیکی از $\mathrm{Sym}(\Omega)$ نمی‌تواند نرمال و یا ماکسیمال باشد. در فصل چهارم مثالهایی متنوع از گروههای متناهیک را معرفی خواهیم کرد. و نشان می‌دهیم یک سری گروههای معروف را می‌توان به‌عنوان گروههای متناهیک در نظر گرفت. از جمله گروههای فروبینیوس نامتناهی خواهیم دید در حالتِ نامتناهی خواصِ شناخته‌شدهٔ گروههای فروبینیوس برقرار نیست. گروه برنساید، $B(n,r)$ یعنی گروهی با n مولد و توانِ r یکی دیگر از گروههای معروف است که متناهیک بودنِ آنها را در حالتی که نامتناهی باشند، نشان خواهیم داد. تعدادی مسألهٔ باز نیز در جای مربوط به خود مطرح خواهند شد.

فصل اول

تاریخچه

این پایان‌نامه دربارهٔ گروههای جایگشتی متناهیک است که عبارتند از نوع خاصی از گروههای جایگشتی که در چند سال اخیر مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. بنابراین قبل از هر چیز تاریخچهٔ مختصری از گروههای جایگشتی را بیان می‌کنم:

نظریهٔ گروههای جایگشتی را می‌توان از نتایج مطالعهٔ گالوا در بررسی حل‌پذیری معادلات جبری دانست. در اواسط قرن نوزدهم موضوع مطالعهٔ گروههای جایگشتی توسط ژوردان و ماتیو به یک موضوع مستقل تبدیل شد. فروبینیوس، برنساید و شور آن را به نظریهٔ نمایش پیوند دادند که منجر به بررسی اولین قضایای طبقه‌بندی عمومی گروهها توسط زازنهاوس و ویت گردید. بین سالهای ۱۹۵۵ تا ۱۹۸۰ نظریهٔ گروههای سادهٔ متناهی باعث رشد و توسعهٔ مطالعهٔ گروههای جایگشتی گردید. در این دوره نظریهٔ گروههای جایگشتی باعث پیدایش تکنیکهای جدیدی شد که این امر را می‌توان به فیشر نسبت داد. وی با استفاده از گروههای جایگشتی به مطالعهٔ گروههای ۳ـانتقالی و ساختن تعداد متعددی از گروههای پراکنده پرداخت. تحقیقات وی در این باره هدف مشخصی داشت:

«آیا هیچ گروه ۶ـانتقالی غیر از گروههای متقارن و متناوب (A_nـها و S_nـها) موجود است؟» همچنین

در این دوره نظریهٔ گروههای جایگشتی در هندسهٔ متناهی و نظریهٔ گرافها مورد استفاده قرار گرفت. دِمبوسکی در یکی از کتابهایش که دربارهٔ هندسه‌های متناهی است، تکنیکهای جدیدی از نظریهٔ گروهها را نشان می‌دهد: «گروههای پراکنده را می‌توان به‌عنوان گروه اتومورفیسم بعضی اشیاء ترکیبیاتی در نظر گرفت».

بنابراین با توجه به نقش گروههای پراکنده در تکمیل رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی، به اهمیت نقش گروههای جایگشتی در پروژهٔ عظیم رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی پی می‌بریم.

در سال ۱۹۸۰ رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی پایان یافت و در نتیجه سیر موضوع عوض شد. تعدادی از مسائل قدیمی گروههای جایگشتی با استفاده از کامپیوتر حل شده بودند و نظریهٔ گروهها به یک ابزار قوی در مطالعهٔ هندسه‌های متناهی تبدیل شده بود. ولی نقش کلیدی مفاهیم ترکیبیاتی در گروههای جایگشتی باعث شد که نظریهٔ نمایش در فهمیدن بهتر ماهیت گروههای سادهٔ متناهی کمک کند.

همانطور که اشاره شد نظریهٔ نمایش و نظریهٔ سرشتِ گروهها با گروههای جایگشتی ارتباطی تنگاتنگ دارد. یکی از مهمترین کاربردها در ترکیبیات، سرشتِ گروههای جایگشتی است. همچنین به تازگی مطالعهٔ الگوریتمهای گروههای جایگشتی به موضوعی مهم تبدیل شده است. به‌عنوان مثال اگر مجموعه‌ای از جایگشتها موجود باشد، می‌خواهیم اطلاعاتی دربارهٔ گروه تولیدشده توسط آن مجموعه به دست آوریم. مثلاً مرتبهٔ آن و تعیین عضویت یا عدم عضویت یک جایگشتِ دلخواه در آن گروه مورد توجه است.

تا اواسط دههٔ ۱۹۷۰، عنوان گروههای جایگشتی نامتناهی به ندرت مطرح شده بود و در Math. Reviews گروههای جایگشتی تا آن موقع همگی متناهی بودند.

اولین دسته از گروههای جایگشتی نامتناهی که در دههٔ ۱۹۷۰ مورد مطالعه قرار گرفتند گروههای جایگشتی شبه‌متناهی بودند. این نوع از گروهها روی یک مجموعهٔ نامتناهی عمل می‌کنند و خاصیتِ اساسی آنها این است که به جز تعدادی متناهی، بقیهٔ نقاط آن مجموعه را ثابت نگه می‌دارند. این خاصیت باعث می‌شود که رفتاری تقریباً شبیه رفتار گروههای جایگشتی متناهی داشته باشیم. کار اصلی روی این نوع گروهها توسط ویلانت و نیومان صورت گرفته است.

گروههای جایگشتی متناهیک را می‌توان به نوعی دوگان گروههای جایگشتی شبه‌متناهی در نظر گرفت.

چر که هر عضوِ غیرهمانی تنها تعداد متناهی نقطهٔ ثابت دارد. اکنون نظریهٔ گروههای جایگشتی نامتناهی به سرعت در حال گسترش است و این نظریه ارتباط نزدیکی با نظریهٔ مدلها، نظریهٔ رمزی، نظریهٔ شمارش و توپولوژی دارد.

فصل دوم

مفاهیم و قضایای مقدماتی

این فصل شامل دو بخش عمده می‌باشد. در بخش اول مفاهیم اساسی گروههای جایگشتی بررسی می‌شوند و در بخش دوم با معرفی گروههای جایگشتی شبه‌متناهی و گروههای جایگشتی متناهیک حالت نامتناهی مطرح می‌شود.

در اینجا سعی شده است که اساسی‌ترین مفاهیم ذکر شوند و از ذکر تعاریف عمومی نظریهٔ گروهها صرف‌نظر شده است. ولی مفاهیم و قضایای مستقل از نظریهٔ گروههای جایگشتی، بسته به اهمیت آنها در جای خود، معرفی خواهند شد.

۲.۱. مفاهیمِ اساسی گروههای جایگشتی

در کتابهای مقدماتی جبری، عمل یک گروه بر یک مجموعه معرفی می‌شود و با استفاده از آن قضایای سیلو به راحتی اثبات می‌گردند که این کاربرد یکی از معروفترین کاربردهای نظریهٔ گروههای جایگشتی به شمار می‌رود. برای شروع کار، این مفاهیم به صورت روان و تا حد امکان رسا بیان شده‌اند.

تعریف ۲.۱.۱. G یک گروه و Ω یک مجموعهٔ ناتهی فرض می‌شوند. اگر نگاشت

$$\mu : \Omega \times G \to G$$

$$(\alpha, g) \mapsto \mu(\alpha, G)$$

دارای خواص زیر باشد

1. $\mu(\alpha, 1) = \alpha \quad \forall \alpha \in \Omega$

2. $\mu(\mu(\alpha, g), h) = \mu(\alpha, gh) \quad , g, h \in G$

μ را تابع عملِ G روی Ω می‌نامیم و می‌گوییم G روی Ω عمل می‌کند و آن را با نماد (G, Ω) نشان می‌دهیم و به هر عضوِ G یک جایگشت می‌گوییم. کاردینال Ω را نیز درجهٔ گروه G می‌نامیم. برای راحتی در نوشتار، از این به بعد به جای $\mu(\alpha, g)$ از نماد $g(\alpha)$ استفاده می‌کنیم. یعنی

$$g(\alpha) := \mu(\alpha, g).$$

تعریف ۲.۱.۲. فرض کنید G روی Ω عمل کند، مجموعهٔ همهٔ عناصر گروه G که روی تمام نقاط Ω همانند تابع همانی عمل می‌کنند، هستهٔ عملِ G بر Ω نامیده می‌شود و آن را با ρ_G نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$\rho_G := \{g \in G | \; g(\alpha) = \alpha, \forall \alpha \in \Omega\}.$$

اگر هستهٔ عمل تنها از همانی تشکیل شده باشد، در این صورت عمل را وفادار می‌نامیم. به راحتی می‌توان نشان داد که هستهٔ عمل، یک زیرگروه نرمالِ G است.

تعریف ۲.۱.۳. Ω را مجموعه‌ای ناتهی فرض کنید. در این صورت مجموعهٔ همهٔ توابع دوسویی از Ω به Ω را با نماد $\mathrm{Sym}(\Omega)$ نشان می‌دهیم که همراه با عمل ترکیب توابع آن را گروه جایگشتی متقارن می‌نامیم. هر زیرگروه $\mathrm{Sym}(\Omega)$ یک گروه جایگشتی روی Ω نامیده می‌شود.

تبصره: در حالتی که عمل G روی Ω وفادار باشد، G با زیرگروهی از $\mathrm{Sym}(\Omega)$ یکریخت است.

برای نمایش یک جایگشت دو روش وجود دارد. روش اول به این صورت است که جایگشتِ g را به صورت نگاشتِ $g : \Omega \to \Omega$ در نظر بگیریم که در حالتی که Ω متناهی باشد می‌توان آن را به صورت زیر نمایش داد.

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$$

که در آن $|\Omega| = n$ و در هر سطر عناصرِ Ω را نوشته‌ایم. با این توضیح که در سطر دوم ترتیب عناصرِ Ω عوض شده است و داریم $\beta_i = g(\alpha_i)$.

روش دوم به این صورت است که g را به صورت حاصلضربی از دورها بنویسیم. به عبارت دقیقتر جایگشت $C \in \mathrm{Sym}(\Omega)$ یک rـدور نامیده می‌شود $(r \in \mathbb{N})$ اگر برای r نقطهٔ مجزای $\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_r$ داشته باشیم

$$C(\gamma_i) = \gamma_{i+1} \qquad 1 \leq i \leq r-1.$$
$$C(\gamma_r) = \gamma_1.$$

و بقیه نقاطِ Ω را ثابت نگه دارد. مفهوم دور را می‌توان برای حالت نامتناهی نیز تعریف کرد. Ω مجموعه‌ای نامتناهی و C جایگشتی روی Ω، C را یک دور نامتناهی می‌نامیم هرگاه دنبالهٔ نامتناهی $\{\gamma_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ موجود باشد به طوری که

$$C(\gamma_i) = \gamma_{i+1}.$$

و بقیهٔ نقاط Ω تحت C، ثابت نگاه داشته شوند.

در این صورت هر جایگشت را می‌توان به دورها تجزیه کرد. برای هر جایگشتِ g تعریف می‌کنیم:

$$T(g) := 1^{\gamma_1}2^{\gamma_2}\cdots n^{\gamma_n}.$$

به‌طوری که $\sum_{i=1}^{n} i\gamma_i = n$ و در g، تعداد دورهای به‌طول i مساوی γ_i است.

مثلاً

ساختار نسبتاً سادهٔ دورها کمک می‌کند که یک سری خواص جایگشتها را ساده‌تر بررسی کنیم.

قضیهٔ جایگشتهای $g, h \in S_n$ در S_n مزدوجند اگر و تنها اگر دارای ساختار دوری یکسان باشند.

برهان. کافی است دقت کنیم که برای هر k-دور مثلِ $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ و جایگشتِ دلخواه t داریم:

$$t^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)t = (t(\alpha_1), t(\alpha_2), \dots, t(\alpha_k)).$$

بنابراین اگر g و h مزدوج باشند آنگاه $t \in S_n$ موجود است به‌طوری که $g = t^{-1}ht$. در این صورت برای هر γ-دور که در h ظاهر می‌شود، یک γ-دور در g داریم و برعکس. بنابراین g و h باید ساختار دوری یکسان داشته باشند.

حال فرض کنید g و h ساختار دوری یکسان داشته باشند. g و h را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$g := (\alpha_{11})(\alpha_{12})\cdots(\alpha_{1s_1})(\alpha_{21}\alpha'_{21})\cdots(\alpha_{n1}\cdots\alpha^{n}_{ns_n})$$

$$h := (\beta_{11})\cdots(\beta_{1s_1})\cdots(\beta_{n1}\cdots\beta^{n}_{ns_n})$$

در این صورت اگر t جایگشتی باشد که $t(\alpha_{11}) = \beta_{11}$، $t(\alpha_{12}) = \beta_{12}$ و به‌طور کلی $t(\alpha_{ij}) = \beta_{ij}$ آنگاه $h = t^{-1}gt$ و در نتیجه h و g در S_n مزدوج خواهند بود.

قضیهٔ فوق نشان می‌دهد اگر $g \in S_n$ آنگاه کلاسِ تزویجِ شاملِ g، دقیقاً از جایگشتهایی تشکیل می‌شود که ساختار دوری آنها با g یکسان است. بنابراین **تعداد کلاسهای تزویجِ S_n برابر تعداد افرازهای n است.**

حال فرض کنید $\alpha \in S_n$ و $\alpha = \beta_1\beta_2\dots\beta_t$ تجزیهٔ α به دورهای مجزا باشد علامتِ α را چنین تعریف می‌کنیم.

$$Sgn(\alpha) := (-1)^{n-t}.$$

در این صورت می‌توان نشان داد که Sgn یک تابع خوش‌تعریف است.

جایگشت α را زوج گوییم هرگاه $Sgn(\alpha) = 1$.

مجموعهٔ جایگشتهای زوج همراه با ترکیب تشکیل یک زیرگروه از S_n می‌دهند که به آن گروه جایگشتهای متناوب می‌گوییم و با نماد A_n نمایش می‌دهیم.

Sgn را می‌توان نگاشتی از S_n به گروه ضربی $\mathbb{Z}_2$ در نظر گرفت و در نتیجه داریم

$$\frac{S_n}{\ker(Sgn)} \cong \mathbb{Z}_2.$$

ولی هستهٔ Sgn، A_n است و در نتیجه

$$[S_n : A_n] = 2.$$

که نتیجه می‌دهد A_n در S_n نرمال است. A_nـها نیز در نظریهٔ گروههای سادهٔ متناهی نقش مهمی دارند چرا که برای $n \geq 5$، A_n ساده است و دستهٔ مهمی از گروههای سادهٔ متناهی به شمار می‌روند.

تعریف ۲.۱.۴. فرض کنید گروه G روی Ω عمل کند. برای نقطهٔ دلخواه $\alpha \in \Omega$ مجموعهٔ همهٔ اعمال عناصر G روی α را مدار α تحت عمل G می‌نامیم و با نماد $\mathcal{O}(\alpha)$ نمایش می‌دهیم یعنی

$$\mathcal{O}(\alpha) = \{g(\alpha) | g \in G\}.$$

واضح است که $\mathcal{O}(\alpha) \subseteq \Omega$.

اگر داشته باشیم $\mathcal{O}(\alpha) = \Omega$ آنگاه عمل G روی Ω را انتقالی می‌نامیم.

در اکثر کتابهای نظریهٔ گروهها، قضیهٔ زیر مطرح شده است.

قضیهٔ ۲.۱.۵. عمل گروه G روی مجموعهٔ ناتهی Ω انتقالی است، اگر و تنها اگر برای هر دو عنصر متمایز α و β از Ω، عضوی مانند $g \in G$ موجود باشد، به طوری که $g(\alpha) = \beta$.

با استفاده از قضیهٔ ۲.۱.۵ می‌توان تعمیمی از مفهوم انتقالی بودن یک عمل بیان نمود. این مفهوم در زیر بیان شده است. در ابتدا توجه داریم که هرگاه G روی Ω عمل کند و k یک عدد طبیعی باشد، گروه G

روی حاصلضرب kـتایی $\Omega^{(k)} = \Omega \times \ldots \times \Omega$ به صورت مؤلفه‌ای به طوری طبیعی عمل می‌کند که به صورت زیر است:

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = (g(\alpha_1), g(\alpha_2), \ldots . g(\alpha_k)).$$

تعریف ۲.۱.۶. فرض کنید گروه G روی مجموعهٔ ناتهی Ω عمل کند و k یک عدد طبیعی باشد. هرگاه برای هر دو kـتایی مختلف از عناصرِ مجزای Ω، عضوی مانند $g \in G$ موجود باشد به طوری که g باعث انتقالِ kـتایی اول به kـتایی دوم گردد، عمل را kـانتقالی می‌نامیم. به عبارت دیگر

$$\exists g \in G, \; g(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) := (\beta_1, \ldots, \beta_k) \quad \forall (\alpha_i), (\beta_i) \in \Omega^{(k)}.$$

اگر عضو gـی که در بالا مطرح شد به طوری یکتا وجود داشته باشد، عمل را قویاً kـانتقالی می‌نامیم.

تبصره: توجه داریم که در تعریف kـانتقالی، در حالتی که $|\Omega| < \infty$ بایستی داشته باشیم $k \leq |\Omega|$. در حالتی که Ω مجموعه‌ای نامتناهی باشد، می‌توان تعمیم دیگری از kـانتقالی، تحت خیلی انتقالی به صورت زیر ارائه داد:

تعریف ۲.۱.۷. فرض کنید گروه G روی مجموعهٔ نامتناهی Ω عمل نماید. اگر برای هر $k \in \mathbb{N}$، عمل G روی Ω، kـانتقالی باشد، عمل G روی Ω را خیلی انتقالی می‌نامیم و در حالتی که عمل G برای هر $k \in \mathbb{N}$، قویاً kـانتقالی باشد، عمل G روی Ω را قویاً خیلی انتقالی می‌نامیم.

با توجه به قضیهٔ ۲.۱.۵ می‌توان تعمیم دیگری از مفهوم انتقالی بودنِ یک عمل بیان کرد. برای رسیدن به تعمیم جدید، توجه داریم که اگر G روی مجموعهٔ ناتهی Ω عمل کند و k یک عدد طبیعی باشد، گروه G می‌تواند روی مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های kـعضوی از Ω به طور طبیعی عمل کند. این عمل به صورت زیر است:

$$\forall\, g \in G, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Omega \quad g(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}) = \{g(\alpha_1), \ldots, g(\alpha_k)\}.$$

تعریف ۲.۱.۸. فرض کنید G روی Ω عمل کند و

$$\Omega^{\{k\}} = \{A \subseteq \Omega | |A| = k\}$$

(یعنی همهٔ زیرمجموعه‌های kـعضوی از Ω). اگر G به طور انتقالی روی $\Omega^{\{k\}}$ عمل کند، عمل G روی Ω را kـهمگن می‌نامیم. به طور مشابه همانند تعریف ۲.۱.۷ مفهومِ خیلی همگن قابل تعریف است.

تعریف ۲.۱.۹. فرض کنید G روی مجموعهٔ ناتهی Ω عمل کند. برای هر عضوِ $\alpha \in \Omega$ و عضوِ $g \in G$ زیرمجموعه‌های G_α و $\mathrm{fix}(g)$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$G_\alpha := \{g \in G | g(\alpha) = \alpha\}.$$

پایاگر

$$\mathrm{fix}(g) = \{\beta \in \Omega | g(\beta) = \beta\}.$$

مجموعهٔ $\mathrm{fix}(g)$ را نقاط ثابتِ g و مجموعهٔ G_α را پایدارساز α در G می‌نامیم.

~~تحت شرایط~~ فوق $\mathrm{fix}(g)$ زیرمجموعه‌ای از Ω و G_α زیرمجموعه‌ای از G است که به راحتی می‌توان نشان داد که G_α زیرگروهی از G است.

هرگاه $\mathrm{fix}(g) = \varnothing$، g را خالی از عنصر ثابت می‌نامیم و اگر $G_\alpha = 1$ برای هر $\alpha \in \Omega$، عمل G را شبه‌منظم می‌نامیم. در صورتی که گروه G انتقالی وشبه‌منظم باشد، عمل G را منظم می‌نامیم.

مجموعهٔ نقاط ثابتِ هر عنصرِ G دارای اهمیت ویژه‌ای است. در تعریف زیر مفهوم نوعِ یک گروه معرفی شده است.

تعریف ۲.۱.۱۰. فرض کنید G روی Ω عمل کند. مجموعهٔ

$$\{|\mathrm{fix}(g)| \, | g \in G\}$$

را نوع گروه G می‌نامیم و با $type(G)$ نشان می‌دهیم. در حالتی که مجموعهٔ فوق کراندار باشد، گروه G را کراندار و در غیر این صورت بیکران می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱۱. فرض کنید G روی مجموعهٔ Ω عمل کند و $\Delta \subseteq \Omega$. آنگاه پایدارساز نقطه‌ای Δ در G چنین تعریف می‌شود:

$$G_{(\Delta)} := \{g \in G |\ g(\alpha) = \alpha\ \forall \alpha \in \Delta\}.$$

همچنین در اینجا تعریف دیگری داریم به نام پایدارساز مجموعه‌ای Δ:

$$G_{\{\Delta\}} := \{g \in G |\ g(\Delta) = \Delta\}.$$

(یعنی g کلِ Δ را پایدار نگاه دارد).

واضح است که $G_{(\Delta)}$ و $G_{\{\Delta\}}$ زیرگروههای G هستند و داریم $G_{(\Delta)} \leq G_{\{\Delta\}}$. با استفاده از تعریف ۲.۱.۱۱ می‌توان عمل G بر Ω را به عمل G به هر زیرمجموعهٔ Ω القا کرد.

تعریف ۲.۱.۱۲. فرض کنید G روی Ω عمل کند. زیرمجموعهٔ Γ از Ω را G-پایدار نامیم هرگاه

$$\forall g \in G \quad g(\Gamma) = \Gamma.$$

یا به عبارت دیگر $G_{\{\Gamma\}} = G$. همچنین تعریف می‌کنیم

$$G^{\Gamma} := G/G(\Gamma).$$

در این صورت G^{Γ} خارج قسمتی از G است که روی Γ عمل می‌کند.

یکی از مفاهیم بسیار اساسی که زیربنای گروههای جایگشتی می‌باشد، مفهوم بلوک است. با استفاده از تعریف بلوک، مفهوم اولیه بودن یک گروه جایگشتی معرفی می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱۳. فرض کنید G روی Ω عمل کند. زیرمجموعهٔ $\Delta \subseteq \Omega$ را یک بلوک می‌نامیم هرگاه برای هر $g \in G$ تنها یکی از حالات زیر موجود باشد.