دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

بررسی همگرایی توابع خودکوواریانس و خودهمبستگی نمونه‌ای فرایندهای α ـ پایدار متقارن

پایان‌نامه کارشناسی ارشد آمار محض

سارا گرمسیری

استاد راهنما

دکتر صفیه محمودی

۱۳۸۶

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار محض سارا گرمسیری

تحت عنوان

بررسی همگرایی توابع خودکوواریانس و خودهمبستگی نمونه‌ای فرایندهای α ـ پایدار متقارن

در تاریخ ۸۶/۸/۱۴ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ــ استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر صفیه محمودی
۲ــ استاد مشاور پایان‌نامه	دکترافشین پرورده
۳ــ استاد داور ۱	دکتر عادل محمدپور (گروه آمار دانشگاه امیرکبیر)
۴ــ استاد داور ۲	دکتر حمید قربانی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده   دکتر رسول نصر اصفهانی

فهرست مطالب

چکیده:

در فرایندهای ایستا با واریانس متناهی، تابع خودکوواریانس و تابع خودهمبستگی نمونه‌ای به مقدار ثابت تابع خودکوواریانس و تابع خودهمبستگی فرایند همگرا هستند. اما در کلاس فرایندهای ایستای اکید با توزیع های کناری دم سنگین و واریانس نامتناهی، در صورتی که تابع خودکوواریانس با ضریب $n^{1-\frac{2}{\alpha}}$ نرمالایز شود، به متغیر تصادفی پایدار با اندیس پایداری $\frac{\alpha}{2}$ میل می‌کند.

یک نوع فرایند ایستای میانگین متحرک آمیخته وجود دارد که با استفاده از یک زنجیر مارکف بازگشتی پوچ ساخته می‌شود. با استفاده از خواص زنجیر مارکف بازگشتی پوچ و با در نظر گرفتن ضریبی کوچکتر از ضریب معمول برای تابع خودکوواریانس در فرایندهای دم‌سنگین، به بررسی رفتار مجانبی تابع خودکوواریانس و تابع خودهمبستگی نمونه‌ای این نوع از فرایندها می‌پردازیم و نشان خواهیم داد که تابع خودکوواریانس این فرایند به یک متغیر تصادفی $\frac{\alpha}{2}$ ـ پایدار و تابع خودهمبستگی آن به یک مقدار ثابت میل می‌کند.

فصل ۱

مقدمه و تاریخچه

سعی در برازش مدلی مناسب به یک سری زمانی مهم‌ترین مسئله برای بررسی رفتار آن است. پایه و اساس این مدل‌ها در نظر گرفتن متغیرهای تصادفی (نوفه‌های سفید) است که تحت تاثیر پارامتر زمان (گسسته یا پیوسته) دارای نموهای مستقل از هم هستند. در مدل‌بندی کلاسیک، استفاده از فرایندهای $ARMA$، معمولاً برای نوفه‌های سفید توزیعی با واریانس متناهی در نظر می‌گیرند و انتخاب مدل با تاکید بر روی تابع خودهمبستگی آن انجام می‌شود.

اخیراً توجه بسیاری از آماردانان در آنالیز سری های زمانی متوجه داده هایی شده است که دارای خواص خاصی مانند وابستگی‌های طولانی مدت، غیر خطی بودن و توزیع کناری دم سنگین و غیره هستند. چنین داده‌هایی بسیار هم زیادند مانند داده‌های مالی، اقتصادی، مخابراتی و غیره و رفتار این داده‌ها برای آنالیز آنها با سری‌های زمانی دیگر تفاوت‌های عمده‌ای دارد. البته مدل‌یابی این سری‌ها در برخی موارد توسط فرایندهای ARMA با نوفه دم‌سنگین انجام می‌شود. برای مثال سری‌های مربوط به سیگنال‌های بخصوص مانند سیگنال‌های تلفن، با نوفه‌های دم‌سنگین بهتر مدل‌یابی می‌شود [۳۸، ۲۵]. اگرچه تحقیقات برخی از محققان نشان می‌دهد رفتار مجانبی تابع خودهمبستگی نمونه‌ای در فرایندهای دارای واریانس نامتناهی مدل‌یابی کلاسیک را نامناسب می‌کند [۳۲، ۳۰، ۲۹، ۱۶، ۱۱]. طبق بررسی‌های انجام شده در اکثر موارد این روش‌های کلاسیک به ما کمکی نمی‌کنند. یکی از اختلافات سری‌های دم‌سنگین رفتار مجانبی تابع خودکوواریانس و تابع خودهمبستگی نمونه‌ای آن‌ها است که در این پایان‌نامه به آن خواهیم پرداخت.

در سال ۱۹۸۵ و ۱۹۸۶ دیویس[۱] و رزنیک[۲] [۱۰، ۹] رفتار حدی تابع خودکوواریانس و تابع خودهمبستگی نمونه‌ای برای فرایندهای میانگین متحرک با مرتبه نامتناهی و با نوفه‌هایی دارای توزیع دم‌سنگین را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که تابع خودکوواریانس نمونه‌ای این نوع فرایند در توزیع به یک متغیر تصادفی پایدار همگرا است و تابع خودهمبستگی نمونه‌ای در احتمال به یک مقدار ثابت میل می‌کند اما ضریبی از تابع خودهمبستگی نمونه‌ای در توزیع به نسبتی از دو متغیر تصادفی پایدار همگراست و مثال‌هایی از براورد پارامترها و انتخاب مدل با استفاده از این ویژگی تابع خودهمبستگی نمونه‌ای ارائه دادند. همچنین نشان دادند در صورتی که یک مدل AR(p) به سری برازنده شود با این خاصیت تابع خودهمبستگی نمونه‌ای، براوردهای یول– واکر پارامترهای مدل در توزیع به یک متغیر تصادفی میل می‌کند و همین موضوع سازگاری براوردگرهای یول– واکر را تضعیف می‌نماید. در سال ۱۹۹۶ دیویس و رزنیک [۱۱] این بار به بررسی رفتار حدی تابع خودکوواریانس و تابع خودهمبستگی نمونه‌ای در فرایندهای ساده دوخطی[۳] (یک فرایند غیر خطی) با خطاهای دم‌سنگین پرداختند و با استفاده از آنالیز فرایندهای نقطه‌ای نشان دادند که تابع خودهمبستگی نمونه‌ای به یک متغیر تصادفی وابسته به تاخیر h همگراست. بنابراین به کار بردن تابع خودهمبستگی نمونه‌ای این نوع فرایند در مسایل آماری گمراه کننده است. رزنیک در سال ۱۹۹۷ در یک مقاله جامع [۲۸] داده‌هایی را که دارای ویژگی‌های غیراستاندارد مانند دم‌سنگینی و وابستگی‌های طولانی مدت هستند را مورد بررسی قرار داد و روش‌های متفاوتی برای براورد پارامترها و روش‌های انتخاب مدل در فرایندهای خودبازگشتی و میانگین متحرک دارای خطاهای دم‌سنگین ارائه داد. در این مقاله روش‌هایی برای تشخیص داده‌های دم‌سنگین و براورد α (پارامتر پایداری توزیع) بیان شده و با استفاده از روش یول–واکر ضرایب فرایند خودبازگشتی مرتبه p با خطاهای دم‌سنگین براورد شده است و ثابت شده است که در این نوع فرایند نیز رفتار مجانبی براوردگرهای یول–واکر تحت تاثیر رفتار مجانبی تابع خودهمبستگی نمونه‌ای قرار دارد.

در سال ۱۹۹۸ کوهن[۴] و همکاران [۷] یک مطالعه تجربی و نظری بر روی تابع خودهمبستگی نمونه‌ای مدل‌های سری زمانی با واریانس نامتناهی انجام دادند. آن‌ها از شبیه‌سازی دنباله‌های ایستای دم‌سنگین برای فهمیدن رفتار حدی تابع خودهمبستگی نمونه‌ای استفاده کردند و برای فرایندی که از مجموع میانگین متحرک مستقل تشکیل شده و همچنین فرایندی خطی با عنوان فرایند جایگشت ضرایب، با نوفه‌های دم‌سنگین توانستند به طور نظری ثابت کنند که تابع خودهمبستگی نمونه‌ای در توزیع به متغیر تصادفی همگرا است. در سال ۱۹۹۸ رزنیک [۲۹] به بررسی بیشتر بر روی مدل‌های ساده غیرخطی

[۱] Davis
[۲] Resnick
[۳] Bilinear simple processes
[۴] Cohen

دم‌سنگین پرداخت و چگونگی براورد ضرایب در این مدل‌ها را توضیح داده و این نکته را گوشزد کرد که در این حالت استفاده از تابع خودهمبستگی نمونه‌ای زمانی که به متغیر تصادفی میل می‌کند نامناسب و گمراه کننده می‌باشد. او نشان داد که براوردگر هیل[۵] برای براورد پارامتر پایداری در این نوع فرایندها خواص بهتری دارد. رزنیک و وان دن برگ[٦] در سال ۱۹۹۹ [۳۲] به بررسی توابع خودکوواریانس و خودهمبستگی نمونه‌ای در فرایندهای دوخطی، حالتی کلی‌تر از مقاله دیویس و رزنیک [۱۱]، با خطاهای دم‌سنگین پرداختند. نشان دادند که در این نوع فرایند نیز تابع خودهمبستگی نمونه‌ای در توزیع به یک متغیر تصادفی همگرا است. آن‌ها سازگاری براوردگرهای هیل که ابزاری برای براورد پارامتر پایداری است را در این کلاس از فرایندها ثابت کردند. همچنین در سال ۱۹۹۹ فین[۷] و رزنیک [۱٦] نشان دادند با وجود اینکه یک مدل طبیعی برای برازنده کردن به داده‌های سری زمانی یک مدل خودبازگشتی با مرتبه p است اما اشکال برازنده کردن این مدل را به سری‌های زمانی دم‌سنگین شرح دادند. ثابت کردند روش‌هایی که اخیراً برای براورد پارامترهای سری‌های زمانی دم‌سنگین مورد استفاده قرار می‌گیرد مانند براوردگرهای یول—واکر و غیره عملاً نامناسب هستند و نتایج کار خود را با شبیه‌سازی و همچنین داده‌های واقعی نشان دادند. در همین سال رزنیک و همکاران [۳۰] نشان دادند که چقدر استفاده از تابع خودهمبستگی نمونه‌ای برای فرایندهای میانگین متحرک پایدار می‌تواند گمراه کننده باشد و ثابت کردند که تابع خودهمبستگی نمونه‌ای در این نوع فرایندها نیز در توزیع به متغیر تصادفی همگرا است. در عمل از این نوع فرایندها مثال‌هایی ارائه دادند که تابع خودهمبستگی نمونه‌ای برای بعضی از تاخیرها به مقدار ثابت میل می‌کند اما برای بقیه تاخیرها رفتار تصادفی دارند و در مورد شرایطی بحث کرده‌اند که این حد برای تمام تاخیرها غیر تصادفی است.

در این پایان‌نامه نیز بر اساس مقاله رزنیک و ساموردنیسکی و اکسو [۳۱] به بررسی رفتار حدی دو تابع خودکوواریانس و خودهمبستگی نمونه‌ای در فرایندهای پایدار می‌پردازیم.

ادامه این پایان‌نامه به صورت زیر تدوین شده است. در فصل دوم به معرفی توزیع‌های α ـ پایدار و بیان برخی از خصوصیات و قضایای مربوط به آن می‌پردازیم. در فصل سوم تعاریف و مفاهیم اولیه و قضایای مورد نیاز در فصل‌های بعد در رابطه با فرایندهای تصادفی مارکف و α ـ پایدار مطرح خواهد شد. در فصل چهارم به بررسی تابع خودکوواریانس و تابع خودهمبستگی نمونه‌ای در فرایندهایی با واریانس متناهی و واریانس نامتناهی می‌پردازیم و کاربرد این توابع را در هرکدام از این حالت‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل پنجم به طور خاص به بررسی رفتار حدی تابع خودکوواریانس و تابع خودهمبستگی نمونه‌ای در فرایندهای α ـ پایدار متقارن وابسته به یک زنجیر مارکف بازگشتی پوچ می‌پردازیم.

[۵] Hill
[٦] Van Den Berg
[۷] Feigin

در فصل ششم با ارائه‌ی مثال‌هایی از زنجیرهای مارکف متفاوت نتیجه بدست آمده در فصل پنجم را تایید می‌کنیم و در نهایت با شبیه‌سازی به صورت شهودی نتایج بدست آمده را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بنابراین نتایج اصلی این پایان‌نامه در فصل پنجم و ششم ارائه شده است و فصل‌های دوم تا چهارم تنها جهت ارائه مفاهیم و قضایای مورد نیاز دو فصل آخر تدوین شده است.

فصل ۲

توزیع‌های α ـ پایدار

۲—۱ مقدمه

توزیع‌های α ـ پایدار[۱] کلاس بسیار وسیعی از توزیع‌ها را دربر می‌گیرند و به علت جرم موجود در دم تابع چگالی این گروه از توزیع‌ها، به توزیع‌های دم‌سنگین معروف می‌باشند.

جرم احتمال موجود در دم‌های بالایی و پایینی توزیع به عدد α، مقداری بین صفر و دو، وابسته است به طوری که هرچقدر α کمتر باشد جرم احتمال در دم‌ها بیشتر است.

نظریه توزیع‌های پایدار در دهه‌های ۱۹۲۰ و ۱۹۳۰ توسط پل لوی[۲] و الکساندر یائولویچ خینچین[۳] بیان شد. آثار ندنکو[۴] و کولموگرف[۵] [۲۱] و فلر[۶] [۱۹] از جمله آثار قدیمی هستند که به بررسی جزئیات این توزیع پرداخته‌اند و اخیراً نیز زولوتارف[۷] به بررسی این موضوع پرداخته است. در دو، سه دهه‌ی اخیر داده‌هایی با دم‌های سنگین در زمینه‌های مختلف اقتصادی، ارتباطات و فیزیک و غیره جمع آوری شده‌اند که استفاده از فرایندهای پایدار غیرگوسی[۸] به عنوان مدل‌های ممکن برای آن‌ها پیشنهاد می‌شود. چنین

---

۱ $\alpha - stable$

۲ Paul Levy

۳ Aleksander Yakovlevich Khinchine

۴ Gnedenko

۵ Kolmogorov

۶ Feller

۷ Zolotarev

۸ Non-Gaussian

مدل‌هایی انعطاف‌پذیری و تغییرپذیری بیشتری نسبت به فرایندهای گوسی دارند. با وجود اینکه فرایندهای گوسی به طور کامل به وسیله تابع میانگین و تابع خودکوواریانس[۹] مشخص می‌شوند اما فرایندهای غیرگوسی پایدار به پارامترهای بیشتری برای تشخیص نیاز دارند. اگر چه توزیع گوسی همواره نسبت به میانگین متقارن است اما توزیع‌های غیرگوسی پایدار می‌توانند درجه‌ای دلخواه از چولگی را اختیار کنند.

۲—۲ معرفی توزیع α ـ پایدار

تعریف ۱.۲ متغیر تصادفی X دارای توزیع پایدار است اگر برای هر عدد مثبت A و B، عدد مثبت C و عدد حقیقی D وجود داشته باشد به طوری که

$$AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} CX + D, \tag{1.2}$$

(علامت d نشان دهنده هم‌توزیعی است) و در آن X_1 و X_2 کپی‌های مستقلی از X هستند.

تا کنون پارامتربندی‌های مختلفی برای این توزیع توسط افراد مختلفی مطرح شده است و از آن‌جا که فرم بسته‌ای برای تابع چگالی این گروه از توزیع‌ها وجود ندارد، تنوع پارامتربندی مطالعه آن‌ها را راحت‌تر می‌سازد.

در این پایان‌نامه پارامتربندی که توسط ساموردنیسکی[۱۰] و تاهو[۱۱] [۳٦] ارائه شده است را به کار می‌بریم.

توزیع‌های α ـ پایدار توسط چهار پارامتر مشخص می‌شوند و به اختصار آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu),$$

به طوری که α اندیس پایداری توزیع و $\alpha \in (0, 2]$، σ پارامتر مقیاس و $\sigma \in [0, \infty)$، β پارامتر چولگی و $\beta \in [-1, 1]$ و μ پارامتر مکان و $\mu \in (-\infty, \infty)$ می‌باشد.

توزیع α ـ پایدار دارای تابع مشخصه[۱۲] به صورت زیر می‌باشد:

$$E(\exp i\theta X) = \begin{cases} \exp\left\{ -\sigma^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta(sign\theta)\tan(\frac{\pi\alpha}{2})) + i\mu\theta \right\} & \alpha \neq 1, \\ \exp\left\{ -\sigma|\theta|(1 - i\beta\frac{2}{\alpha}(sign\theta)\ln|\theta|) + i\mu\theta \right\} & \alpha = 1. \end{cases}$$

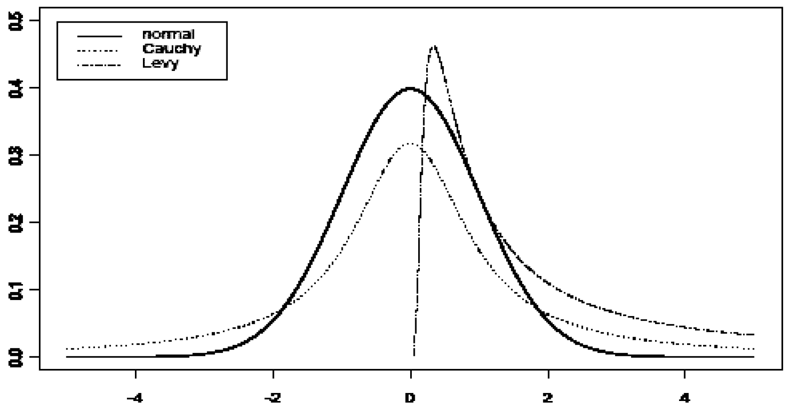
---
[۹] Autocovariance
[۱۰] Samorodnitsky
[۱۱] Taqqu
[۱۲] characteristic function

که

$$sign(\theta) = \begin{cases} -1 & \theta < 0, \\ 0 & \theta = 0, \\ 1 & \theta > 0. \end{cases}$$

چگالی احتمال متغیرهای تصادفی α - پایدار موجود و پیوسته است اما بجز تعداد بسیار کمی از این توزیع‌ها، بقیه فرم مشخص بسته‌ای ندارند.[۴۰]

توزیع‌هایی که در این کلاس از توزیع‌ها دارای چگالی احتمال مشخص می‌باشند عبارت‌اند از توزیع گوسی با $S_2(\sigma, 0, \mu) = N(\mu, 2\sigma)$، توزیع کشی[۱۳] با $S_1(\sigma, 0, \mu) = C(\sigma, \mu)$، توزیع لوی[۱۴] با $S_{1/2}(\sigma, 1, \mu)$ و توزیع تباهیده[۱۵] در μ با $S_\alpha(0, 0, \mu)$، $0 < \alpha < 2$.



شکل ۱.۲ نمودار چگالی‌های $Levy(1, 0)$ و $Cauchy(1, 0)$ و $N(0, 1)$

تعریف **۲.۲** متغیر تصادفی X دارای توزیع دم سنگین (راست) است اگر عدد $\alpha > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$P[X > x] = x^{-\alpha} L(x),$$

که در آن L تابع به کندی تغییرپذیر[۱۶] است به این معنا که برای $x > 0$،

$$\lim_{t \to \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1. \qquad (2.2)$$

تعریف توزیع دم سنگین برای دم سمت چپ و دوطرفه به طور مشابه می‌باشد.

[۱۳] Cauchy
[۱۴] Levy
[۱۵] Degenerate
[۱۶] Slowly varying

تذکر ۳.۲ متغیر تصادفی $X \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$ متقارن است اگر $\beta = 0$ و $\mu = 0$.
توزیع‌های α ـ پایدار متقارن را به اختصار با $S\alpha S$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۲ متغیر تصادفی $X \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$ را اکیداً پایدار گوییم اگر برای $\alpha = 1$، $\beta = 0$ و برای $\alpha \neq 1$، $\mu = 0$ باشد.

به توزیع $S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$ چوله به راست گفته می‌شود اگر $\beta > 0$ و چوله به چپ گفته می‌شود اگر $\beta < 0$ باشد. اگر $\beta = 1$ باشد این توزیع کاملاً چوله به راست یا مثبت است و اگر $\beta = -1$ باشد این توزیع کاملاً چوله به چپ یا منفی است.

۲ـ۳ برخی از خواص توزیع α ـ پایدار

در این بخش برخی از خواص توزیع‌های پایدار که در ادامه این پایان‌نامه مورد نیاز هستند مطرح می‌شود. اثبات گزاره‌ها و قضایای این فصل را می‌توان در [۳٦] یافت.

گزاره ۵.۲ اگر $X \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$ و a یک عدد ثابت غیر صفر و حقیقی باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
aX &\sim S_\alpha(|a|\sigma, sign(a)\beta, a\mu), & \alpha \neq 1,\\
aX &\sim S_\alpha(|a|\sigma, sign(a)\beta, a\mu - \frac{2}{\pi}\, a(\ln|a|)\sigma\beta), & \alpha = 1.
\end{aligned}$$

گزاره ٦.۲ فرض کنید $X \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$ با $0 < \alpha < 2$ باشد آنگاه

$$\begin{aligned}
E|X|^p &< \infty, \quad \forall p, \quad 0 < p < \alpha,\\
E|X|^p &= \infty, \quad \forall p \geq \alpha.
\end{aligned}$$

چون متغیرهای تصادفی α ـ پایدار با $\alpha < 2$، دارای گشتاور دوم نامتناهی هستند، بسیاری از تکنیک‌هایی که در حالت گوسی معتبر است برای آن‌ها کاربردی ندارد. همچنین زمانی که $\alpha \leq 1$ چون $E|X| = \infty$ است عملاً استفاده از امید ریاضی غیرممکن می‌باشد.

۲ـ۴ بردارهای تصادفی پایدار

تعریف پایداری در فضای $\mathbb{R}^d$ مشابه تعریف آن در فضای $\mathbb{R}^1$ می‌باشد.

تعریف ۷.۲ بردار تصادفی $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_d)$، بردار تصادفی پایدار در $\mathbb{R}^d$ است اگر برای هر عدد مثبت A و B، عدد مثبت C و بردار $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^d$ وجود داشته باشد به طوری که

$$A\mathbf{X}^{(1)} + B\mathbf{X}^{(2)} \stackrel{d}{=} C\mathbf{X} + D, \qquad (۳.۲)$$

که در آن $\mathbf{X}^{(1)}$ و $\mathbf{X}^{(2)}$ کپی‌های مستقلی از $\mathbf{X}$ هستند.

بردار $\mathbf{X}$ اکیداً پایدار است اگر رابطه ۳.۲ با $\mathbf{D} = 0$ برای هر $A > 0$ و $B > 0$ برقرار باشد و پایدار متقارن است اگر پایدار باشد و در رابطه زیر نیز برای هر مجموعه بورل A از $\mathbb{R}^d$ صدق کند:

$$P\{\mathbf{X} \in A\} = P\{-\mathbf{X} \in A\}.$$

قضیه ۸.۲ فرض کنید $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_d)$ یک بردار تصادفی در $\mathbb{R}^d$ باشد.
الف) اگر همه ترکیب‌های خطی $Y = \sum_{k=1}^{d} b_k X_k$ دارای توزیع اکیداً پایدار باشند آن‌گاه $\mathbf{X}$ یک بردار تصادفی اکیداً پایدار در $\mathbb{R}^d$ است.
ب) اگر همه ترکیب‌های خطی $Y = \sum_{k=1}^{d} b_k X_k$ دارای توزیع پایدار متقارن باشند آن‌گاه $\mathbf{X}$ یک بردار تصادفی پایدار متقارن در $\mathbb{R}^d$ است.
پ) اگر همه ترکیب‌های خطی پایدار با $\alpha \geq 1$ باشند آن‌گاه $\mathbf{X}$ یک بردار پایدار در $\mathbb{R}^d$ است.

۲ـ۵ نمایش توزیع‌های α ـ پایدار بر اساس یک سری همگرا

در این بخش نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان متغیر تصادفی α ـ پایدار را با یک سری همگرای مناسب نشان داد.

فرض کنید $\{\varepsilon_i\}_{i\geq 1}$ و $\{\Gamma_i\}_{i\geq 1}$ و $\{W_i\}_{i\geq 1}$ سه دنباله مستقل از متغیرهای تصادفی باشند به طوری که $\{\varepsilon_i\}_{i\geq 1}$ یک دنباله $i.i.d$ از متغیرهای تصادفی رادمچر[۱۷] است به این معنا که

[۱۷] Rademacher

$P[\varepsilon_i = 1] = P[\varepsilon_i = -1] = \frac{1}{2}$، $\{\Gamma_i\}_{i\geq 1}$ دنباله‌ای از زمان‌های رسیدن[18] فرایند پواسن با پارامتر یک روی $[0,\infty)$ و $\{W_i\}_{i\geq 1}$ یک دنباله $i.i.d$ از متغیرهای تصادفی با گشتاور قدرمطلق αام متناهی باشد.

قضیه ۹.۲ برای $0 < \alpha < 2$، سری $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} W_i$ زمانی که n به بی‌نهایت میل می‌کند، تقریباً همه جا[19] به متغیر تصادفی X با توزیع $S_\alpha((C_\alpha^{-1} E|W_1|^\alpha)^{1/\alpha}, 0, 0)$ همگرا است که در آن

$$C_\alpha = \left(\int_0^\infty x^{-\alpha}\sin x dx\right)^{-1} = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)\cos(\frac{\pi\alpha}{2})} & \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} & \alpha = 1. \end{cases} \tag{۴.۲}$$

نتیجه ۱۰.۲ (نمایش سری گونه[20]) فرض کنید X متغیر تصادفی $S\alpha S$ با $0 < \alpha < 2$ و $E|W_i|^\alpha = \sigma^\alpha$ باشد. X را می‌توان با سری زیر نمایش داد:

$$X \stackrel{d}{=} C_\alpha^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} W_i.$$

قضیه ۱۱.۲ سری $\sum_{i=1}^{n}(\Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} W_i - K_i^\alpha)$ با

$$K_i^\alpha = \begin{cases} 0 & 0 < \alpha < 1, \\ E(W_1 \int_{\frac{|W_1|}{i}}^{\frac{|W_1|}{i-1}} x^{-2} sinx dx) & \alpha = 1, \\ \frac{\alpha}{\alpha-1}(i^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - (i-1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}) E(W_1) & \alpha > 1. \end{cases}$$

به متغیر تصادفی پایدار با توزیع $S_\alpha(\sigma,\beta,0)$ همگرا است که در آن

$$\sigma^\alpha = \frac{E|W_1|^\alpha}{C_\alpha},$$

و

$$\beta = \frac{E|W_1|^\alpha sign W_1}{E|W_1|^\alpha}.$$

و C_α ثابت تعریف شده در رابطه ۴.۲ است.

در حالتی که $\alpha = 1$، سری $\sum_{i=1}^{n}(\Gamma_i^{-1} W_i - EW_1 \int_{\frac{1}{i}}^{\frac{1}{i-1}} x^{-2} sinx dx)$ به یک متغیر تصادفی با توزیع $S_1(\sigma,\beta,\mu)$ و با σ و β فوق و $\mu = -E(W_1 \ln|W_1|)$ همگرا است.

[18] Arrival times

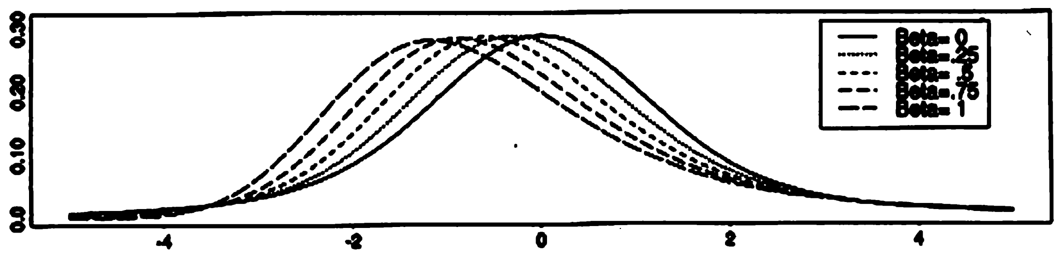
[19] Almost surely

[20] Series representation

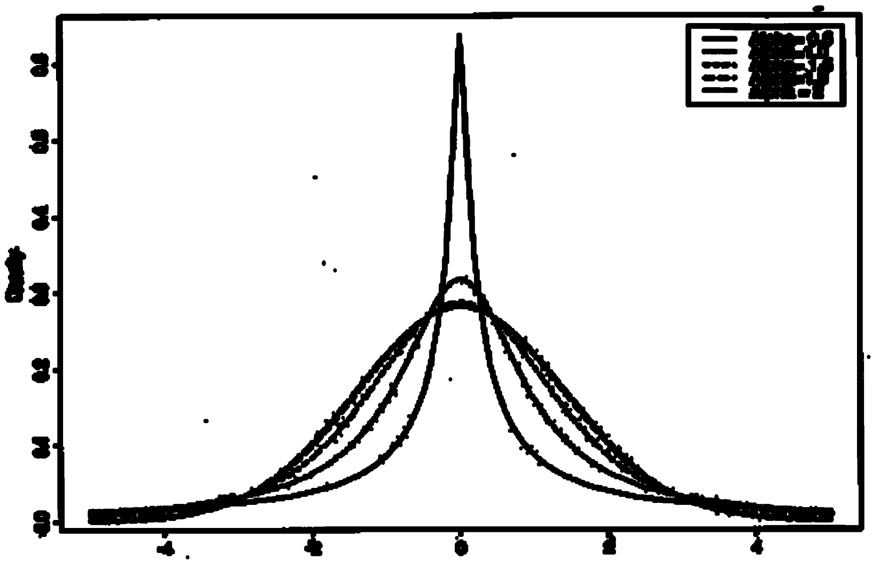
۲–۶ نمودارها

از آن‌جا که فرم بسته‌ای برای تابع چگالی توزیع‌های پایدار وجود ندارد برای دیدن شکل توزیع می‌توان از شبیه‌سازی استفاده نمود.

در ادامه چند نمودار از توزیع αـ پایدار $S_\alpha(۱,\beta,۰)$ ارائه شده است.



شکل ۲.۲ نمودار توزیع αـ پایدار برای $\alpha = ۱/۵$ و β های مختلف

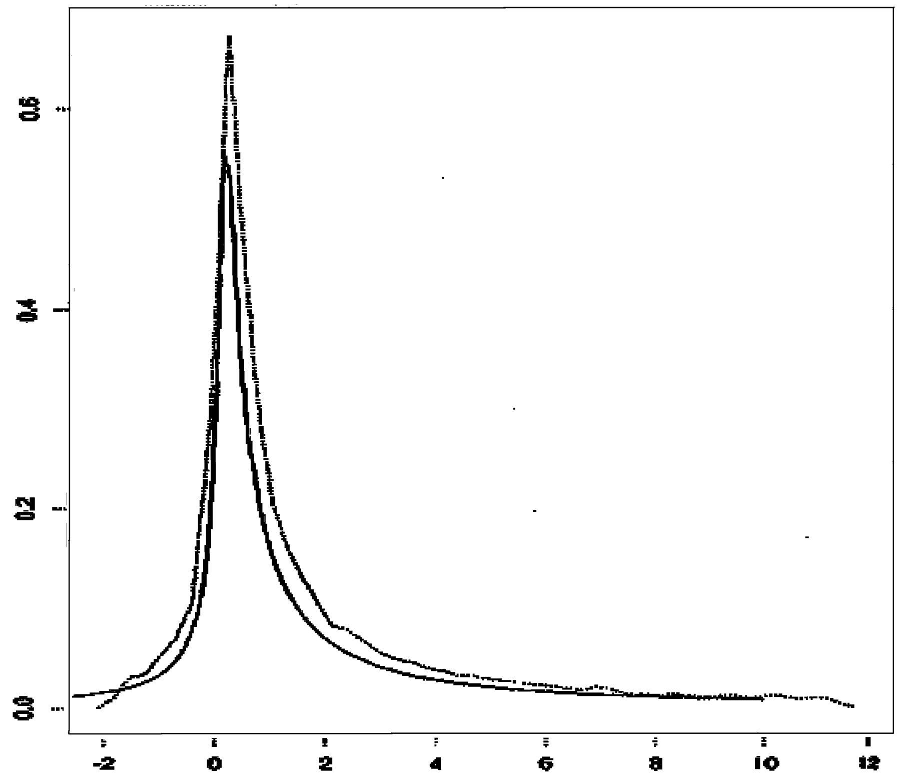


شکل ۳.۲ نمودار توزیع αـ پایدار برای $\beta = ۰$ و α های مختلف

برای محاسبه تابع چگالی این کلاس از متغیرها از سال ۱۹۷۵ تحقیقاتی توسط کرو[۲۱] و هالت[۲۲] آغاز شد، تا این‌که کامل‌ترین الگریتم در سال ۱۹۹۷ توسط نولن[۲۳] نوشته شد.

۲۱ Crow
۲۲ Holt
۲۳ Nolan

از طریق این برنامه اجرایی، محاسبه تابع چگالی، تابع توزیع، محاسبه چندک‌ها، شبیه‌سازی داده‌ها و کارهای جالب دیگر می‌توان انجام داد. شکل زیر نموداری از تابع چگالی شبیه‌سازی شده و تابع چگالی اصلی را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که تفاوت چندانی با یکدیگر ندارند.



شکل ۴.۲ نمودار تابع چگالی و تابع چگالی داده‌های شبیه‌سازی شده توزیع α ـ پایدار با $\alpha = ۰/۵$

فصل ۳

فرایندهای تصادفی

۳—۱ مقدمه

بحث فرایندهای تصادفی[۱] از جالب‌ترین مباحث آماری است که برای هر نوع سلیقه و ضرورت‌های علمی مطالبی ارزنده دارد و از عمیق ترین مباحث احتمال استفاده می‌کند. پویایی و رونق روزافزون احتمال مدرن بیشتر مدیون فرایندهای تصادفی است. مباحث استنباط آماری و آزمون فرض‌ها در مباحث فرایندهای تصادفی جایگاه ویژه خود را دارند. از لحاظ کاربرد در صنعت، تکنولوژی، کشاورزی، ژنتیک و سایر علوم، فرایندهای تصادفی نقش اساسی و انکار ناپذیری را ایفا می‌کنند.

در این فصل ابتدا برخی از مفاهیم اولیهٔ فرایندهای تصادفی مورد استفاده در مبحث اصلی را بیان کرده و سپس فرایند مارکف و برخی مفاهیم مرتبط با آن را بررسی خواهیم کرد. پس از آن به معرفی فرایندهای پایدار و انتگرال تصادفی پایدار پرداخته و ساختار مطرح شده توسط رازینسکی برای فرایندهای پایدار را ارائه می‌دهیم. در پایان به معرفی کلاس خاصی از فرایندهای $S\alpha S$ می‌پردازیم.

[۱] Stochastic process