دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

مباحثی در فضاهای تابعی وموجکها بر فضاهای همگن

نگارش:

نرگس تولایی

ارائه شده جهت اخذ درجه دکتری در رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز هارمونیک

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر رجبعلی کامیابی گل

استاد مشاور:

جناب آقای دکتر حمید رضا ابراهیمی ویشکی

شهریور ماه ۱۳۸۷

به نام خداوند جان و خرد

به مادر بزرگی که با صداقتش به من تعلیم داد،

معصومه مقدادی اصفهانی

تقدیر و سپاس

تشکر و سپاس خالصانه خدمت جناب آقای دکتر کامیابی گل که بر تمام مراحل انجام رساله نظارت داشته، راهنمایی هایی ارزشمند خود را دریغ نداشتند. با امتنان از محضر جناب آقای دکتر ابراهیمی که مشاوره ایشان همواره مشکل گشا بوده است، از داوران محترم رساله که با مطالعه پایان نامه و ارائه پیشنهادات خود موجب ارتقا سطح کیفی آن گردیدند، از پرسنل محترم کتابخانه و مرکز کامپیوتر که با سعه صدر همکاری کردند، و با تشکر فراوان از همه اساتید، دوستان و عزیزانی که مرا در مسیر موفقیت یاری نمودند.

بسمه تعالی

دانشگاه فردوسی مشهد

صورتجلسه دفاع از رساله دکتری

جلسه دفاع از رساله دکتری خانم نرگس تولایی دانشجوی دوره دکتری رشته ریاضی گرایش محض در ساعت ۱۰ صبح روز ۸۷/۶/۲۵ در محل اتاق سمینار دانشکده علوم ریاضی با حضور امضا کنندگان ذیل تشکیل گردید. پس از بررسی های لازم، هیأت داوران رساله نامبرده را با نمره به عدد ......۱۹٫۷۵......، به حروف نوزده و هفتاد و پنج صدم با درجه ...عالی............ مورد تأیید قرار داد / نداد.

عنوان رساله

مباحثی در فضاهای تابعی و تبدیلات موجک روی فضاهای همگن

امضا	هیئت داوران
	• **داور مدعو رساله: دکتر مهدی رجبعلی پور** **استاد گروه ریاضی دانشگاه شهید باهنر کرمان**
	• **داور مدعو رساله: دکتر محمد علی دهقان** **دانشیارگروه ریاضی دانشگاه رفسنجان**
	• **داور رساله: دکتر اسداله نیکنام** **استاد گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد**
	• **داور رساله: دکتر شیرین حجازیان** **دانشیارگروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد**
	• **نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر کاظم خشیارمنش** **دانشیارگروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد**
	• **استاد راهنما: دکتر رجبعلی کامیابی گل** **دانشیار گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد**
	• **استاد مشاور: دکتر حمیدرضا ابراهیمی ویشکی** **دانشیارگروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد**
	• **مدیر گروه ریاضی محض: دکتر شیرین حجازیان** **دانشیارگروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد**

اظهارنامه

اینجانب نرگس تولایی دانشجوی دوره دکتری رشته ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد نویسنده رساله/پایان نامه **"مباحثی در فضاهای تابعی و موجکها بر فضاهای همگن"** تحت راهنمایی جناب آقای دکتر رجبعلی کامیابی گل متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این رساله/پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در رساله/پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه فردوسی مشهد » و یا « Ferdowsi University of Mashhad » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله/پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از رساله/ پایان نامه رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این رساله/پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این رساله/پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ **امضای دانشجو**

۸۷/۷/۷ نرگس تولایی

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه‌ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در رساله/پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

بسمه تعالی .

مشخصات رساله/پایان نامه تحصیلی دانشجویان .

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان رساله/پایان نامه: مباحثی در فضاهای تابعی و موجکها بر فضاهای همگن

نام نویسنده: نرگس تولایی

نام استاد(ان) راهنما: جناب آقای دکتر رجبعلی کامیابی گل

نام استاد(ان) مشاور: جناب آقای دکتر حمید رضا ابراهیمی ویشکی

دانشکده : علوم ریاضی	**گروه: ریاضی**	**رشته تحصیلی: ریاضی**
تاریخ تصویب: 1385/3/28		**تاریخ دفاع: 1387/6/25**
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد ○ دکتری ●		**تعداد صفحات: 107**

چکیده رساله/پایان نامه :

پیش از این ساختار یک تبدیل موجک به تبدیلاتی در ابعاد بالاتر تعمیم یافته بود. پس از آن به گروههایی توسعه یافت که یکریخت توپولوپیک با یک فضای همگن خاص از حاصلضرب نیم مستقیم یک گروه موضعاً فشرده آبلی و یک گروه موضعاً فشرده می باشند. در این مجال، حالت عمومی تری را ارائه می کنیم و تبدیلات موجک پیوسته ای را معرفی می کنیم که از نمایش های شبه منظم تعمیم یافته بدست می ایند. برای تعریف یک چنین نمایشی از یک گروه G، به یک فضای همگن با یک اندازه رادون به طور نسبی ناوردا و یک مشخصه از G نیاز داریم.

هرگاه H یک زیرگروه بسته از یک گروه موضعاً فشرده G باشد، G/H دارای یک اندازه رادون به طور قوی شبه ناوردا مانند μ است. برای هر $1 \le p \le +\infty$ ، ساختار یک $L^1(G)$ - مدول چپ باناخ به فضای تمام توابع مختلط مقداری بر G/H نسبت می دهیم که μ - اندازه پذیر بوده و توان p ام آنها انتگرال پذیر است. نشان می دهیم این فضا یک همانی تقریبی چپ دارد مشروط بر آن که $1 \le p < +\infty$ و G/H به یک اندازه رادون به طور نسبی ناوردا مجهز شده باشد. در حالت خاص که H یک زیرگروه فشرده از G باشد، نشان می دهیم مفاهیم پیچش و برگشت قابل توسیع به توابع انتگرال پذیر روی G/H می باشند. بعلاوه، فضای توابع انتگرال پذیر یک جبر باناخ برگشتی با یک همانی تقریبی است. همچنین یک شرط لازم و کافی برای آن که یک زیر فضای بسته از این جبر باناخ یک ایده آل چپ باشد را ارائه می هیم.

با استفاده از یک زیرگروه بسته H از G، نمایش های شبه منظم تعمیم یافته از G بر $L^2(G/H)$ را تعریف کرده، نشان می دهیم این این نمایش ها تنها زمانی وجود دارند که G/H به یک اندازه رادون به طور نسبی ناوردا مجهز شده باشد. در این حالت، هر نمایش شبه منظم تعمیم یافته توسط یک همریختی پیوسته از G به توی دایره واحد مشخص می شود. تبدیلات موجک پیوسته ای را در نظر می گیریم که از این نمایشها بدست می آیند و نشان می دهیم این رده از تبدیلات شامل تیدیلات فوق می باشند.

کلید واژه:	**امضای استاد راهنما:**

کلید واژه:

1. تبدیلات موجک پیوسته
2. فضای همگن
3. جبر باناخ برگشتی
4. باناخ مدول چپ
5. اندازه به طور قوی شبه ناوردا
6. اندازه به طور نسبی ناوردا
7. نمایش یکانی

امضای استاد راهنما:

تاریخ:

بسمه تعالي

Graduate Studies Thesis\Dissertation Information
Ferdowsi University of Mashhad

Title of Thesis\Dissertation:
On the Function Spaces and Wavelets on Homogeneous Spaces

Author: Narguess Tavallaei
Supervisor(s): Dr. Rajab-Ali Kamyabi-Gol
Advisor(s): Dr. Hamid Reza Ebrahimi Vishki

Faculty:	**Department:**	**Specialization:**
Mathematical Sciences	Mathematics	Harmonic Analysis

Approval Date: Jun 17, 2006	**Defence Date:** September 14, 2008
M.Sc. ○ **Ph.D.** ●	**Number of Pages:** 107

Abstract:

The construction of the well known continuous wavelet transform has been extended before to higher dimensions. Then it was generalized to a group which is topologically isomorphic to a homogeneous space of the semidirect product of an abelian locally compact group and a locally compact group. In our scope, we study a more general case. We introduce a class of continuous wavelet transforms obtained from the generalized quasi-regular representations. To define such a representation of a group G we need a homogeneous space with a relatively invariant Radon measure and a character of G. When H is a closed subgroup of a locally compact group G, G/H possesses a strongly quasi-invariant Radon measure μ. For all $1 \le p \le +\infty$, we offer a construction of a Banach left $L^1(G)$-module to the Banach space of μ-measurable complex-valued functions on G/H whose p th powers are integrable. We investigate some properties of theses spaces and show that it has a left approximate identity as a Banach left $L^1(G)$-module, where $1 \le p < +\infty$ and G/H is attached to a relatively invariant Radon measure. In a special case that H is a compact subgroup of G, we show that the concepts of convolution and involution can be extended to the integrable functions defined on this homogeneous space. Moreover, the space of integrable functions is an involutive Banach algebra with an approximate identity. We also find a necessary and sufficient condition on a closed subspace of this Banach algebra to make it into a left ideal. By a closed subgroup H of G, we define the generalized quasi-regular representations of G on $L^2(G/H)$ and show that these representations exist when G/H is attached to a relatively invariant Radon measure. In this case, all generalized quasi-regular representations can be exactly determined with the continuous homomorphisms defined from G into the unit circle T. We consider the continuous wavelet transforms obtained from these representations as a class of wavelet transforms containing the above continuous wavelet transforms.

Signature of Supervisor: **Date:**	**Key Words:** **1.** continuous wavelet transform **2.** homogeneous space **3.** involutive Banach algebra **4.** Banach left module **5.** strongly quasi-invariant measure **6.** relatively invariant measure **7.** unitary representation

فهرست مندرجات

چکیده

تبدیلات موجک ابزاری هستند که یک سیگنال را به مؤلفه های فرکانسی مختلف تقسیم کرده، هر مؤلفه را با توجه به چندریزگی مقیاس آن مورد بررسی قرار می دهند. این تبدیلات، در مقایسه با تبدیلات فوریه، دارای فواید بسیاری در تجزیه و تحلیل فیزیکی یک سیگنال دارند. تبدیلات موجک، به طور مستقل، در زمینه های ریاضی، کوانتوم فیزیک، مهندسی برق و زمین لرزه شناسی توسعه و گسترش یافته است. از تبادل اطلاعات در زمینه های گوناگون استفاده های کاربردی بسیاری حاصل شده است؛ از جمله بازسازی تصاویر، فشرده سازی اطلاعات، پیش بینی زمان وقوع زمین لرزه و مهندسی پزشکی. در این جا تعمیمی از این تبدیلات را بر اساس نظریه نمایش گروهها ارائه می دهیم.

پیش از این ساختار یک تبدیل موجک به تبدیلی در ابعاد بالاتر تعمیم یافته بود. پس از آن به گروههایی توسعه یافت که که یکریخت توپولوژیک با یک فضای همگن خاص از حاصلضرب نیم مستقیم یک گروه موضعاً فشرده آبلی و یک گروه موضعاً فشرده می باشند. در این مجال، حالت عمومی تری را ارائه می کنیم و تبدیلات موجک پیوسته ای را معرفی می کنیم که از نمایش های شبه منظم تعمیم یافته بدست می آیند. برای تعریف یک چنین نمایشی از یک گروه G ، به یک فضای همگن با یک اندازه رادون به طور نسبی ناوردا و یک مشخصه از G نیاز داریم.

هرگاه H یک زیرگروه بسته از یک گروه موضعاً فشرده G باشد، G/H دارای یک اندازه رادون به طور قوی شبه ناوردا مانند μ است. برای هر $1 \leq p \leq +\infty$ ، ساختار یک $L^1(G)$ - مدول چپ باناخ به فضای تمام توابع مختلط مقداری بر G/H نسبت می دهیم که μ - اندازه پذیر بوده و توان p آنها انتگرال پذیر است. برخی خواص این نوع فضا را مورد بررسی قرار داده، نشان می دهیم این فضا، به عنوان یک $L^1(G)$ - مدول چپ باناخ، یک همانی تقریبی چپ دارد مشروط بر آن که $1 \leq p < +\infty$ و G/H به یک اندازه رادون به طور نسبی ناوردا مجهز شده باشد.

در حالت خاص که H یک زیرگروه فشرده از G باشد، فضای همگن G/H یک اندازه رادون به طور نسبی ناوردا دارد. نشان می دهیم که مفاهیم پیچش و برگشت قابل توسیع به توابع انتگرال پذیر روی G/H می باشند. بعلاوه، فضای توابع انتگرال پذیر یک جبر باناخ برگشتی با یک همانی تقریبی است. همچنین، یک شرط لازم و کافی برای آن که یک زیرفضای بسته از این جبر باناخ یک ایده آل چپ باشد را ارائه می دهیم.

با استفاده از یک زیرگروه بسته H از G ، نمایش های شبه منظم تعمیم یافته از G بر $L^2(G/H)$ را تعریف کرده نشان می دهیم این نمایش ها تنها زمانی وجود دارند که G/H به یک اندازه رادون به طور نسبی ناوردا مجهز شده باشد. در این حالت، هر نمایش شبه منظم تعمیم یافته توسط یک همریختی پیوسته از G به توی دایره واحد $\mathbb{T}$ مشخص می شود. تبدیلات موجک پیوسته ای را در نظر می گیریم که از این نمایش ها بدست می آیند و نشان می دهیم این رده از تبدیلات شامل تبدیلات فوق می باشند.

مقدمه

یک موجک را یک تابع انتگرال پذیر مربعی $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ می دانند که در شرط $C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty$ صدق کند. وقتی $\hat{\psi}$ طبق قضیه پلنچرل به کمک ψ بدست می آید. یک تبدیل موجک پیوسته (یک بعدی) از یک تابع $f \in L^2(\mathbb{R})$ با استفاده از موجک ψ برای تقریباً هر $a, b \in \mathbb{R}$ ، $a \neq 0$ ، به صورت زیر تعریف شده است

$$W_\psi f(b,a) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \overline{\psi(\frac{t-b}{a})}\, dt,$$

تبدیلات موجک پیوسته به ابعاد بالاتر تعمیم یافته اند (ر. ک [$3, Chapter\ 9$]) . تبدیلات موجک پیوسته n - بعدی را می توان به کمک عمل یک گروه لی G ، که خود حاصل ضرب نیم مستقیم دو گروه لی خاص K و H می باشد، توسط یک نمایش بر $L^2(K)$ بدست آورد. در این حالت K را می توان فضای همگنی در نظر گرفت که G بر آن عمل می کند و یک اندازه رادون به طور نسبی ناوردا دارد.

در [2] ذکر شده است که چگونه می توان یک تبدیل موجک را بر کره دو بعدی و نیز بر هذلولیگون دو پارچه و منیفلدهای مشابه تعریف کرد. همچنین، می توان در [6, 7, 8] دیدگاههای دیگری از تعمیم تبدیلات موجک پیوسته را بر فضاهای همگن مورد مطالعه قرار داد.

در [4] و [12] حالت کلی تری مورد بررسی قرار گرفته است: برای یک گروه موضعاً فشرده آبلی K و یک گروه موضعاً فشرده H تبدیلات موجک پیوسته ای از $K \rtimes H$ بر $L^2(K)$ در نظر گرفته شده است که به صورت زیر تعریف می شود

$$\pi(k,h)f(x) = \sqrt{\frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)}}\, f(\tau_{h^{-1}}(k^{-1}x)) \quad (\text{almost all } x \in K).$$

وقتی Δ_G و Δ_H ، به ترتیب، توابع مدولی بر G و H می باشند. این نوع تبدیلات موجک در دسته ای از تبدیلات قرار می گیرند که از یک نمایش یکانی پیوسته از یک گروه موضعاً فشرده G بر $L^2(S)$ تعریف می شوند، وقتی S یک فضای همگن است که G بر آن عمل می کند.

در آنالیز هارمونیک، هرگاه G یک گروه موضعاً فشرده باشد می توانیم پیچش دو تابع انتگرال پذیر f و g بر G را به صورت زیر تعریف کنیم

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)\, g(y^{-1}x)\, dy \quad (\text{almost all } x \in G),$$

وقتی dy اندازه هار چپ بر G می باشد. یادآوری می کنیم که پیچش و برگشت $L^1(G)$ را به یک جبر باناخ برگشتی با همانی تقریبی تبدیل می کند بعلاوه، اگر H یک زیرگروه بسته و نرمال از G باشد، آنگاه G/H نیز یک گروه موضعاً فشرده بوده و $L^1(G/H)$ ، نسبت به اندازه هار چپ روی G/H ، یک جبر باناخ برگشتی می باشد. اما هرگاه زیرگروه H از G نرمال نباشد، نه وارونی از یک عضو G/H و نه، در حالت کلی، یک اندازه هار چپ بر فضای همگن G/H وجود دارد. مطالبی که در این فصل خواهند آمد، بر فضاهای همگنی به شکل G/H می باشد، که در آن G یک گروه موضعاً فشرده و H یک زیرگروه فشرده از آن بوده و G/H به یک اندازه رادون به طور نسبی ناوردا مجهز شده است. در این صورت پیچش و یک نوع برگشت از $L^1(G)$ بر G/H القا می شود که اثری مشابه را به جای می گذارند.

این پایان نامه به ترتیب زیر تنظیم شده است: فصل اول به معرفی مفاهیمی اختصاص دارد که در اینجا مورد استفاده قرار خواهند گرفت. همچنین، به یادآوری برخی تعاریف و بیان نتایجی در نظریه گرهها، گروههای توپولوژیک و فضاهای همگن خواهیم پرداخت. در فصل دوم یک گروه موضعاً فشرده G و زیرگروهی مانند H از آن را در نظر می گیریم به طوری که G/H به یک اندازه رادون به طور قوی شبه ناوردای μ مجهز شده باشد. برای هر $1 \leq p \leq +\infty$ ، به فضای تمام توابع μ - اندازه پذیر مختلط مقدار بر G/H ، که توان p ام آنها انتگرال پذیر است، یک ساختار $L^1(G)$ - مدول چپ باناخ نسبت می دهیم. خواصی از این گونه فضاها را تحقیق می کنیم و نشان می دهیم، به عنوان یک $L^1(G)$ - مدول چپ، همانی تقریبی چپ دارند؛ وقتی $1 \leq p < +\infty$ و G/H با یک اندازه رادون به طورنسبی ناوردا همراه شده باشد.

در فصل سوم، فرض می کنیم H یک زیرگروه فشرده از G و μ یک اندازه به طور نسبی ناوردا بر G/H باشد. در این صورت می توانیم پیچش دو تابع μ - انتگرال پذیر را بر G/H به عنوان یک ترکیب خطی تعمیم یافته از انتقالات چپ یکی از دو تابع تعریف کنیم. نشان می دهیم $L^1(G/H)$ یک جبر باناخ برگشتی با یک همانی تقریبی است. همچنین، یک شرط لازم و کافی برای آن که یک زیرفضای بسته از $L^1(G/H)$. یک ایده آل چپ باشد را ارائه می دهیم

در فصل چهارم، توسط عمل G بر G/H یک نمایش یکانی پیوسته بر $L^2(G/H)$ ، یک نمایش شبه منظم تعمیم یافته، تعریف می شود که نقش نمایش منظم چپ گروه G را خواهد داشت. نشان می دهیم این نمایش ها تنها زمانی وجود دارند که G/H به یک اندازه رادون به طور نسبی ناوردا مجهز شده باشد. در این حالت، هر نمایش شبه منظم تعمیم یافته توسط یک همریختی پیوسته از G به توی دایره واحد $\mathbb{T}$ مشخص می شود.

فصل آخر، تبدیلات موجک پیوسته ای را در نظر می گیریم که از نمایش های شبه منظم تعمیم یافته بدست می آیند. نشان می دهیم این رده از تبدیلات شامل تبدیلات موجک پیوسته

n - بعدی و تبدیلاتی است که در [۴، ۱۲] بررسی شده و بر گروههایی تعریف شده اند که توپولوژیک یکریخت با یک فضای همگن از حاصلضرب نیم مستقیم یک گروه آبلی موضعاً فشرده و یک گروه موضعاً فشرده می باشند. با چند مثال نشان می دهیم این رده از تبدیلات موجک شامل تبدیلاتی است که در دسته های قبل نمی گنجند.

برای مطالعه آنچه در اینجا می آید، دانستن مفاهیم اولیه در نظریه گروهها، گروههای توپولوژیک و فضاهای همگن مورد نیاز است.

فصل ۱
پیش نیازها

۱. این فصل به یادآوری برخی تعاریف و قضایای اساسی در مباحث گروههای توپولوژیک و فضاهای همگن ترایا اختصاص داده شده است. همچنین نمادهایی را معرفی خواهیم کرد که برای خلاصه نویسی از آنها استفاده خواهیم کرد. کتابهای [۱۳] ، [۱۵] ، [۲۲] ، و [۲۷] و همچنین مقاله [۱] عنوان مراجع اصلی مطالب این فصل می باشند.

۱.۱ حاصلضرب گروهها

۲. در نظریه گروهها، حاصلضرب مستقیم دو گروه روشی را توصیف می کند که به کمک آن می توان، در حالت خاص، ساختاری از یک گروه را توسط دو گروه دیگر ارائه داد. حاصلضرب نیم مستقیم و حاصلضرب نیت دو گروه نیز روشی مشابه را، اما در حالتهایی عمومی تر، ارائه می دهند. در این بخش به معرفی این ضربها می پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $\{G_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از گروهها و $\prod_{i\in I} G_i$ حاصلضرب دکارتی این خانواده، متشکل از تمام نگاشت های x بر I باشد به طوری که برای هر $i \in I$ داشته باشیم $x_i = x(i) \in G_i$. در این صورت $\prod_{i\in I} G_i$ همراه با عمل نقطه وار، $(xy)_i = x_i y_i$، یک گروه

تشکیل می دهد که آن را حاصلضرب مستقیم (خارجی) $\{G_i\}_{i\in I}$ می نامیم. هرگاه I یک مجموعه متناهی مانند $I=\{۱,۲,\dots,N\}$ باشد، گاه به جای $\prod_{i=۱}^{N} G_i$ از نماد $G_۱\times G_۲\times\dots\times G_N$ استفاده می کنیم.

هرگاه K و H دو گروه به ترتیب با عناصر همانی e_K و e_H باشند، $\langle e_K\rangle\times H$ و $K\times\langle e_H\rangle$ دو زیرگروه نرمال از $K\times H$ می باشند که به ترتیب با H و K یکریخت بوده و اشتراک بدیهی دارند. بعلاوه، برای هر عضو (k,h) از $K\times H$ داریم $(k,h)=(k,e_H).(h,e_K)$.
عکس این مطلب نیز برقرار است: هرگاه G دارای دو زیرگروه H و K باشد به طوری که $G=KH$ و $K\bigcap H=\langle e_G\rangle$ ، آنگاه $G\cong K\times H$. در این حالت می گوییم G حاصلضرب مستقیم داخلی K و H است.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید K و H دو گروه به ترتیب با عناصر همانی e_K و e_H باشند، و $h\mapsto\tau_h$ یک همریختی از H به توی $Aut(K)$ ، گروه خودریختی های K ، باشد. در این صورت مجموعه $K\times H$ همراه با عمل

$$(k_۱,h_۱).(k_۲,h_۲)=(k_۱\,\tau_{h_۱}(k_۲)\,,\,h_۱h_۲)$$

یک گروه تشکیل می دهد که (e_K,e_H) عضو همانی آن بوده و وارون یک عضو (k,h) عبارت است از

$$(k,h)^{-۱}=(\tau_{h^{-۱}}(k^{-۱})\,,\,h^{-۱}).$$

این گروه را که با $K\rtimes_\tau H$ یا برای سهولت با $K\rtimes H$ نمایش می دهیم، حاصلضرب نیم مستقیم (خارجی) K و H نسبت به τ می نامیم.

به سادگی می توان نشان داد $K\times\{e_H\}$ یک زیرگروه نرمال از $K\rtimes H$ بوده و یکریخت با K می باشد؛ در حالی که $\{e_K\}\times H$ تنها یک زیرگروه و یکریخت با H می باشد. از این پس برای هر $k\in K$ و $h\in H$ عناصر (k,e_H) و (e_K,h) با k و h و زیرگروههای $K\times\{e_H\}$ و $\{e_K\}\times H$ به ترتیب با K و H نمایش داده خواهند شد. با این اختصار و با توجه به تساوی $(k,h)=(k,e_H).(e_K,h)$ ، kh نمایش دیگری برای عضو (k,h) از $K\rtimes H$ خواهد بود.

فرض کنید G یک گروه با یک زیرگروه نرمال K و یک زیرگروه H باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند.

(ا) $H\bigcap K = \langle e_G \rangle$ و $G = KH$.

(ب) $H\bigcap K = \langle e_G \rangle$ و $G = HK$.

(پ) حاصل ترکیب نشاندن متعارف $\mathrm{ins} : H \to G$ و نگاشت متعارف تصویر $q : G \to G/K$ یک یکریختی بین H و G/K است.

هرگاه یکی از عبارات فوق برقرار باشد می گوییم G حاصلضرب نیم مستقیم داخلی K و H است، یا می گوییم G بر K می شکافد.

قابل توجه است که هرگاه G حاصلضرب نیم مستقیم داخلی K و H باشد، در این صورت $G \cong K \rtimes H$ نسبت به τ ، وقتی $\tau : H \to Aut(K)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\tau_h(k) = hkh^{-1} \quad (h \in H, k \in K).$$

بعلاوه، اگر H نیز یک زیرگروه نرمال از G باشد، آنگاه

$$\tau_h(k)k^{-1} = hkh^{-1}k^{-1} \in K\bigcap H = \langle e_G \rangle$$

و در نتیجه برای هر $k \in K$ و $h \in H$ خواهیم داشت $\tau_h(k) = k$. بنابراین، حاصلضرب نیم مستقیم K و H بر حاصلضرب مستقیم K و H منطبق خواهد شد.

هرگاه G یک گروه با عضو همانی e_G و K و H دو زیرگروه از G باشند، شرایط زیر معادل خواهند بود:

(ا) $G = KH$ و $K\bigcap H = \phi$.

(ب) برای هر $g \in G$ ، عناصر منحصر به فرد $k \in K$ و $h \in H$ موجودند به قسمی که $g = kh$.

چنانچه هر یک از شرایط فوق برقرار باشد می گوییم G حاصلضرب نیت داخلی K و H است.

در این حالت برای هر $k \in K$ و $h \in H$ یک عضو $\alpha(h,k) \in K$ و یک عضو $\beta(h,k) \in H$ وجود دارند به طوری که $hk = \alpha(h,k)\,\beta(h,k)$. بدین ترتیب نگاشت های $\alpha : H \times K \to K$ و $\beta : H \times K \to H$ با خواص زیر تعریف می شوند.

(ا) $\alpha : H \times K \to K$ یک عمل چپ از H بر K است.

(ب) $\beta : H \times K \to H$ یک عمل راست از K بر H است.

(پ) $\alpha(h, k_۱k_۲) = \alpha(h, k_۱)\,\alpha(\beta(h, k_۱), k_۲)$،

(ت) $\beta(h_۱h_۲, k) = \beta(h_۱, \alpha(h_۲, k))\,\beta(h_۲, k)$،

وقتی $k, k_۱, k_۲ \in K$ و $h, h_۱, h_۲ \in H$.

همانند آنچه در مورد حاصلضرب مستقیم و نیم مستقیم گروهها بیان شد، حاصلضرب نیت خارجی گروهها نیز قابل تعریف است. برای ارائه تعریف این نوع ضرب ابتدا چند نماد را معرفی می کنیم.

فرض کنید K و H دو گروه، به ترتیب، با عناصر همانی e_K و e_H باشند. برای دو نگاشت مفروض $\alpha : H \times K \to K$ و $\beta : H \times K \to H$ از نمادهای زیر استفاده می کنیم

$$\alpha(h,k) = h \triangleright k,$$

$$\beta(h,k) = h \triangleleft k,$$

وقتی $k \in K$ و $h \in H$. نگاشت α (به ترتیب β) بدیهی نامیده می شود هرگاه $h \triangleright k = k$ (به ترتیب $h \triangleleft k = h$) برای هر $k \in K$ و $h \in H$.

تعریف ۳.۱.۱. یک سیستم نیت از گروهها یک چهارتایی $\Lambda = (K, H, \alpha, \beta)$ می باشد که در آن K و H دو گروه ، $\alpha : H \times K \to K$ یک عمل چپ از H بر K و $\beta : H \times K \to H$ یک عمل راست از K بر H می باشند؛ یعنی،

$$(h_۱ h_۲) \triangleright k = h_۱ \triangleright (h_۲ \triangleright k),$$

$$h \triangleleft (k_۱ k_۲) = (h \triangleleft k_۲) \triangleleft k_۱,$$

برای هر $k, k_۱, k_۲ \in K$ و $h, h_۱, h_۲ \in H$ ، به طوری که شرایط زیر برقرار باشند:

(ا) $h \triangleright (k_۱ k_۲) = (h \triangleright k_۱)((h \triangleleft k_۱) \triangleright k_۲)$،

(ب) $(h_۱ h_۲) \triangleleft k = (h_۱ \triangleleft (h_۲ \triangleright k))(h_۲ \triangleleft k)$،

وقتی $k, k_۱, k_۲ \in K$ و $h, h_۱, h_۲ \in H$.

نکته ۴.۱.۱. فرض کنید $\Lambda = (K, H, \alpha, \beta)$ یک سیستم نیت از گروهها باشد. در این صورت برای هر $k \in K$ و $h \in H$ خواهیم داشت

$$h \triangleright e_K = e_K, \quad e_H \triangleleft k = e_H.$$

زیرا با کمک بند (a) از تعریف ۳.۱.۱ ، برای هر $h \in H$ می توان نوشت

$$\begin{aligned} h \triangleright e_K &= h \triangleright (e_K e_K) \\ &= (h \triangleright e_K)\,((h \triangleleft e_K) \triangleright e_K) \\ &= (h \triangleright e_K)\,(h \triangleright e_K). \end{aligned}$$

بدین ترتیب برای هر $h \in H$ خواهیم داشت $h \triangleright e_K = e_K$. به استدلال مشابه می توان نشان داد $e_H \triangleleft k = e_H$ وقتی ، $k \in K$.