بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

ناهمواری در مشبکه های مانده

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض
گرایش جبر

استاد راهنما

دکتر محمود بخشی

نگارش

مهدی ایزانلو

آذرماه ۱۳۹۳

فهرست مطالب

مقدمه

برای ورود به هر بحثی در ریاضیات ابتدا باید مجموعه را تعریف کرد. با یک بررسی ساده می‌توان دریافت که هر تلاشی برای تعریف مجموعه منجر به دور خواهد شد، به این معنی که تعریف جدیدی ارائه نداده ایم. در حقیقت مجموعه یک مفهوم انتزاعی است و همواره مفاهیم انتزاعی مانند نقطه، خط و ... کار دشواری است. برای نخستین بار جرج کانتور [۱] در سال ۱۸۹۵، مجموعه را به عنوان گردآیه‌ای از اشیای کاملا معین و متمایز در نظر گرفت که باید اعضای تشکیل دهنده آن بطور کامل مشخص باشند. در بهار ۱۹۰۲ راسل [۲] پارادکس در نظریه مجموعه کانتور را مطرح کرد. این قبیل عوامل موجب شدند که ریاضی دانان سعی کردند با حفظ ویژگی اصلی مجموعه، نظریه مجموعه‌ها را به گونه‌ای پایه‌ریزی کنند که به دور از هر تناقض باشد. بر این اساس نظریه مجموعه‌های ناهموار برای اولین بار توسط پاولاک [۳] در سال ۱۹۸۰ به عنوان یک ابزار قدرتمند ریاضی برای بیان و بررسی مسائلی که در آن‌ها عدم قطعیت و ابهام وجود دارد، ارائه شد.

ریشه منطق‌های چند ارزشی به زمان ارسطو بر می‌گردد، زمانی که او در رساله معروفش به نام تعبیر [۴] جملات نامعلوم در آینده مانند ”فردا جنگ دریایی در خواهد گرفت“را مورد بررسی

[۱] George Cantor

[۲] Russell

[۳] Pawlak

[۴] De Interpretatinc

قرار می‌داد. پیش تاریخ منطق‌های چند ارزشی در قرون منطق وسطی و توسط دانزاسکات [۵] و ویلیام اکهام [۶] ایجاد شد. اما "عصر چند ارزشی" توسط لوکاسیویچ [۷] و پست [۸] به طور رسمی در سال ۱۹۲۰ افتتاح شد. لوکاسیویچ مجموعه ارزش‌های منطقی را با اضافه نمودن یک ارزش میانی غنی ساخت و اصول یک حساب گزاره‌ای سه ارزشی را پیاده نمود. به موازات نظریه لوکاسیویچ، ریاضی‌دان آمریکایی پست "جبرهای منطقی" چند ارزشی "متناهی" را تعریف کرد. در سال ۱۹۵۵ راسر [۹] یک سمینار بر پایه کار مشترکش با رز [۱۰] درباره اصل تمامیت لوکاسیویچ از منطق گزاره‌ای بی نهایت-ارزشی برگزار کرد که چانگ [۱۱] به عنوان یک مدرس جوان در جلسه حضور داشت ولی به دلیل نا آشنایی با نماد گذاری‌های لهستانی متوجه اثبات نشد و در لحظه‌ای که کاملا از درک سمینار ناامید شده بود به ذهنش رسید که اثبات تمامیت منطق گزاره‌ای دو ارزشی از طریق جبر می‌تواند راه دیگری برای آن چه رز و راسر انجام دادند باشد و این‌گونه MV-جبر بوجود آمد.

مفهوم MV -جبر، بوسیله چانگ در سال ۱۹۵۶ در [۷] معرفی شد. در اصل، MV-جبرها برای اثبات جبری قضیه تمامیت حساب گزاره‌ای در منطق $\aleph_0$ - ارزشی لوکاسیویچ تعریف شد. در سال ۱۹۵۹ چانگ بنا بر پیشنهاد دانزا اسکات نشان داد تناظری یک به یک میان MV-جبرها و گروه‌های آبلی وجود دارد و این ایده وسیله‌ای شد تا در سال ۱۹۸۶ دانیل موندیسی [۱۲] اثبات کند که دسته MV-جبرها و ℓ -گروه‌های آبلی با یکه (واحد) قوی با یکدیگر معادلند.

مشبکه از مهمترین دستگاه‌های جبری است که همواره مورد مطالعه ریاضی‌دانان قرار گرفته

[۵] Duns Scott

[۶] William Ockham

[۷] Lukasiewicz

[۸] Post

[۹] Barkley Rosser

[۱۰] Alan Rose

[۱۱] Chen Chung Chang

[۱۲] Daniel mundici

است. در نیمه اول قرن نوزدهم، تلاش‌های جرج بول برای رسمی کردن گزاره‌ها منجر به پیدایش جبر بول شد. در واقع منطق دو ارزشی خاستگاه مطالعه جبر بول است. سپس در اواخر قرن نوزدهم، یعنی در زمانی که تحقیقات بر روی اصل موضوعه کردن جبر بولی در حال انجام بود، چارلز پیرس [۱۳] و ارنست اسکرودر [۱۴] پی بردند که این اصول را برای تعریف یک مفهوم جدید و کلی به نام مشبکه می‌توان به کار برد. از طرف دیگر، تحقیقات و مطالعات ریچارد ددکیند برروی ایده آل‌های جبری اعداد منجر به کشف مشبکه‌ها شد.

در حقیقت، این کارهای بی‌نظیر گرت بیرخوف [۱۵] بود که در دهه سوم قرن بیستم موجب گسترش عمومی نظریه مشبکه‌ها شد. او در یک سری از مقالات اهمیت مشبکه‌ها را تشریح کرد و نشان داد که این نظریه قالبی مناسب برای متحد کردن بسیاری از شاخه‌های ریاضی نامرتبط با هم که تا آن زمان گسترش پیدا کرده بودند فراهم می‌آورد. همچنین ویرایش اول کتاب نظریه مشبکه بیرخوف با موفقیتی چشم گیر روبرو شد. بعد از بیرخوف جرج گراتزر [۱۶] با سلسله کتاب‌های بی‌نظیری نظریه مشبکه‌ها را غنا بخشید.

مشبکه‌های مانده برای اولین بار در سال ۱۹۲۴ توسط کرول [۱۷] معرفی شد. همچنین مشبکه‌های مانده توسط محققانی از قبیل وارد در [۲۲]، ایدزیاک [۱۸] در [۲۱]، بالبس [۱۹] و دوینگر [۲۰] در [۲] و دیگران مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته‌اند.

[۱۳] Charls S. Peirce

[۱۴] Ernest Schroder

[۱۵] Garret Birkhoff

[۱۶] George Gratzer

[۱۷] Krull

[۱۸] Idziak

[۱۹] Balbes

[۲۰] Dwinger

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل ابتدا به طور مختصر و فشرده به بیان تعاریف، احکام و قضایایی که در پایان نامه مورد استفاده است می‌پردازیم. مفاهیم بنیادین ریاضی مانند رابطه، انواع رابطه، ساختار های جبری و مشبکه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. هم‌چنین، مفاهیم اولیه در مورد مشبکه‌های مانده و برخی ویژگی‌ها و خواص آن را ارائه می‌دهیم. در ادامه مجموعه‌های ناهموار را مورد مطالعه قرار می‌دهیم در ضمن در این فصل از مراجع [۲]، [۴]،[۸]، [۶]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۵]، [۱۷]، [۲۱] استفاده شده است.

۱.۱ رابطه

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند. رابطه $\Re$ از مجموعه‌ی X در Y عبارت است از زیر مجموعه‌ای از حاصل ضرب دکارتی $X \times Y$. در این پایان نامه، $(x, y) \in \Re$ را با نماد $x\Re y$ نشان می‌دهیم و می‌گوییم x با y رابطه دارد.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند و $\Re$ رابطه‌ای از مجموعه X در X و $\wp$ رابطه‌ای از X در Y باشد. در این صورت $\Re$ رابطه

(۱) انعکاسی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم $x\Re x$،

(۲) تقارنی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in X$، $x\Re y$ نتیجه دهد $y\Re x$،

(۳) تعدی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in X$، $x\Re y$ و $y\Re z$ ایجاب کنند $x\Re z$،

(۴) هم‌ارزی بر مجموعه X نامیده می‌شود هرگاه $\Re$ رابطه انعکاسی، تقارنی و تعدی باشد،

(۵) رابطه‌یک به یک: $\wp$ را یک رابطه‌یک به یک نامیم اگر $x\wp y$ و $z\wp y$، آنگاه $x = z$ برای $x, z \in X$ و $y \in Y$.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیدX یک مجموعه باشد. مجموعه توانی X را با $\mathcal{P}(X)$ نمایش می‌دهیم. مجموعه $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{P}(X)$ را یک افراز می‌نامیم هرگاه برای هر $T, S \in A$ که $T \neq S$ داشته باشیم $S \cap T = \emptyset$ و $\cup_{T \in A} T = X$.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $\Re$ یک رابطه هم‌ارزی بر X باشد. در این صورت، برای هر $x \in X$، مجموعه $\{y \in X : x\Re y\}$ کلاس هم‌ارزی x نامیده شده و با $[x]$ نمایش داده می‌شود. هم‌چنین، مجموعه همه کلاس‌های هم‌ارزی عناصر $x \in X$ با $\frac{X}{\Re}$ نمایش داده می‌شود.

۲.۱ ساختار های جبری

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه باشد. نگاشت $f : X^n \to X$ یک عمل n-تایی روی X نامیده می‌شود. به ازای $n = ۱$ این عمل ۱-تایی و به ازای $n = ۲$ این عمل ۲-تایی نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. ساختار جبری یک مجموعه ناتهی A و گردآیه‌ای از عمل‌ها بر A می‌باشد و معمولا به صورت $(A; \{f_i\}_{i\in I})$ نشان داده می‌شود که در آن f_i $(i \in I)$ عملی i-تایی روی A است. برای $I = \{۱, ۲, ..., n\}$ ساختار جبری را با $(A; f_۱, f_۲, ..., f_n)$ نشان می‌دهیم. هرگاه f_i، m_i- تایی باشد برای $i \in I$، می‌گوییم ساختار جبری $(A; f_۱, f_۲, ..., f_n)$ از نوع $(m_۱, m_۲, ..., m_n)$ است. یک ساختار جبری را به اختصار یک جبر می‌گوییم.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید $(A; f_۱, f_۲, ..., f_n)$ یک جبر باشد و $S \subseteq A$. هرگاه S نسبت به اعمال f_i بسته باشد، آنگاه S یک زیر جبر A نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید $(A, f_۱, f_۲, ..., f_n)$ یک جبر از نوع $(m_۱, m_۲, ..., m_n)$ باشد و $\Re$ یک رابطه هم‌ارزی بر A باشد. در این صورت $\Re$ رابطه همنهشتی روی A نامیده می‌شود هرگاه برای هر $i \in \{۱, ۲, ..., n\}$ اگر $x_۱\Re y_۱, ..., x_{m_i}\Re y_{m_i}$، آنگاه $f_i(x_۱, ..., x_{m_i})\Re f_i(y_۱, ..., y_{m_i})$.
مجموعه تمام روابط همنهشتی روی A را با $Con(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید $(A; f_۱, f_۲, ..., f_n)$ و $(B; g_۱, g_۲, ..., g_n)$ دو جبر از یک نوع باشند.

نگاشت $\varphi : A \to B$ یک همریختی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $i \in \{۱, ۲, ..., n\}$ داشته باشیم

$$\varphi\big(f_i(x_۱, ..., x_{n_i})\big) = g_i\big(\varphi(x_۱), ..., \varphi(x_{n_i})\big).$$

۳.۱ مشبکه‌ها

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید A مجموعه‌ای ناتهی باشد. رابطه $\leq$ روی مجموعه A یک ترتیب جزئی نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x, y, z \in A$، داشته باشیم

خاصیت انعکاسی: $x \leq x$،

خاصیت پاد تقارنی: $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$،

خاصیت تعدی: $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

مجموعه A همراه با رابطه $\leq$ که دارای خواص فوق باشد را یک مجموعه مرتب جزئی می‌گوییم و با نماد $(A; \leq)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۳.۱. (مشبکه به عنوان مجموعه مرتب جزئی) یک مجموعه مرتب جزئی $(A; \leq)$که هر جفت از عناصر آن دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین باشد یک مشبکه نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۳.۱. (مشبکه به عنوان ساختار جبری) جبر $(L; \wedge, \vee)$ از نوع (۲،۲) یک مشبکه نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x, y, z \in L$، شرایط زیر برقرار باشند:

$(L_۱)$ خاصیت خود توانی: $x \vee x = x$ و $x \wedge x = x$،

$(L_۲)$ خاصیت تعویض پذیری: $x \vee y = y \vee x$ و $x \wedge y = y \wedge x$،

$(L۳)$ خاصیت شرکت پذیری: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ و $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$،

$(L_۴)$ خاصیت جذب: $x \vee (x \wedge y) = x$ و $x \wedge (x \vee y) = x$.

لازم به ذکر است که اگر $(L;\leq)$ یک مشبکه باشد و قرار دهیم

$$a \vee b = sup\{a,b\}, \qquad a \wedge b = inf\{a,b\}$$

آنگاه $(L;\vee,\wedge)$ یک مشبکه است.

بر عکس، فرض کنید $(L;\vee,\wedge)$ یک مشبکه باشد و تعریف کنیم $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$، در این صورت $(L;\leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی بوده ویک مشبکه است.

مثال ۴.۳.۱. $(\mathbb{N};\leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است. هم‌چنین $\mathbb{N}$ همراه با دو عمل $\vee$ (کوچکترین مضرب مشترک) و $\wedge$ (بزرگترین مقسوم علیه مشترک) یک مشبکه است.

۴.۱ مشبکه‌های مانده

ابتدا متذکر می‌شویم که تمامی مطالب این بخش از مرجع [۷] استخراج شده است.

تعریف ۱.۴.۱. جبر $(M;\vee,\wedge,\odot,\rightarrow,\rightsquigarrow,۰,۱)$ از نوع $(۲,۲,۲,۲,۲,۰,۰)$ یک مشبکه‌ی مانده نامیده می‌شود هرگاه برای $x,y,z \in M$، داشته باشیم

$(L_۱)$ $(M;\vee,\wedge,۰,۱)$ یک مشبکه‌ی کراندار باشد،

$(L_۲)$ $(M;\odot,۱)$ یک تکواره باشد،

$(L_۳)$ $x \odot y \leq z$ اگر وتنها اگر $x \leq y \rightarrow z$ اگر وتنها اگر $y \leq x \rightsquigarrow z$.

مثال ۲.۴.۱. فرض کنید $M = \{۰,a,b,c,۱\}$ که $۰ < a < b < c < ۱$. جدول‌های زیر را در نظر بگیرید.

$\odot$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	a	a
b	0	a	b	a	b
c	0	0	0	c	c
1	0	a	b	c	1

$\rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	c	1	1	1	1
b	c	c	1	c	1
c	0	b	b	1	1
1	0	a	b	c	1

$\rightsquigarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	b	1	1	1	1
b	0	c	1	c	1
c	b	b	b	1	1
1	0	a	b	c	1

در این صورت $(M;\wedge,\vee,\odot,\rightarrow,0,1)$ یک مشبکه مانده است.

لم ۱.۴.۳. *در هر مشبکه‌ی مانده خواص زیر برقرار است :*

(R_1) $x\rightarrow x=x\rightsquigarrow x=1$،

(R_2) $x\rightarrow 1=x\rightsquigarrow 1=x$،

(R_3) $0\rightarrow x=0\rightsquigarrow x=1$،

(R_4) $x\leq y$ *اگر و فقط اگر* $x\rightarrow y=1$ *و اگر و فقط اگر* $x\rightsquigarrow y=1$،

(R_5) *اگر* $x\leq y$، *آنگاه* $z\odot x\leq z\odot y$ *و* $x\odot z\leq y\odot z$،

(R_6) $(x\rightarrow y)\odot x\leq x\wedge y$،

(R_7) $(x\rightarrow y)\odot x\leq y\leq x\rightarrow(y\odot x)$ *و* $(x\rightarrow y)\odot x\leq y\leq x\rightarrow(x\odot y)$،

(R_8) $(x\odot y)\rightarrow z=x\rightarrow(y\rightarrow z)$،

(R_9) $(x\vee y)\rightarrow z=(x\rightarrow z)\vee(y\rightarrow z)$،

(R_{10}) $(x\rightarrow y)\leq(x\odot z)\rightarrow(y\odot z)$،

(R_{11}) $x\odot(y\rightarrow z)\leq y\rightarrow(x\odot z)$،

(R_{12}) $(y\rightarrow z)\odot(x\rightarrow y)\leq x\rightarrow z$،

(R_{13}) $x\rightarrow(y\wedge z)=(x\rightarrow y)\wedge(x\rightarrow z)$،

(R_{14}) $x\rightarrow(y\rightarrow x)=1$،

(R_{15}) $x\odot x^{\sim}=0$ *و* $x^{-}\odot x=0$ *که* $x^{-}=x\rightarrow 0$ *و* $x^{\sim}=x\rightsquigarrow 0$،

(R_{16}) $x\rightsquigarrow y^{\sim}=(y\odot x)^{\sim}$ *و* $x\rightarrow y^{\sim}=(x\odot y)^{\sim}$،

(R_{17}) $x \leq y^{-}$ *اگر و فقط اگر* $x \odot y = 0$،

(R_{18}) $x \leq x^{-\sim}$ و $x \leq x^{\sim -}$،

(R_{19}) $x^{-\sim-} = x^{-}$ و $x^{\sim-\sim} = x^{\sim}$،

(R_{20}) $x \leq y$ *اگر و فقط اگر* $y^{\sim} \leq x^{\sim}$،

(R_{21}) $x \to y = x \to (x \wedge y)$،

تعریف ۴.۴.۱. فرض کنید M یک مشبکه مانده باشد.

(a) مشبکه‌ی مانده M را پیچشی می‌گوییم هرگاه برای هر $x \in M$ داشته باشیم

$$x^{-\sim} = x^{\sim-} = x.$$

(b) مشبکه‌ی مانده M تعویض پذیر نامیده می‌شود هرگاه عمل $\odot$ تعویض پذیر باشد. در این حالت $\rightsquigarrow = \to$.

تعریف ۵.۴.۱. زیر مجموعه‌ی ناتهی F از مشبکه مانده M یک فیلتر نامیده می‌شود اگر شرایط زیر برآورده شود.

(F_1) $x, y \in F$ نتیجه دهد $x \odot y \in F$.

(F_2) هرگاه $x \leq y$ و $x \in F$، آنگاه $y \in F$.

تعریف ۶.۴.۱. فیلتر F از مشبکه مانده M نرمال گفته می‌شود هرگاه در شرط زیر صدق کند.

$$x \to y \in F \Leftrightarrow x \rightsquigarrow y \in F, \quad \forall x, y \in M$$

قضیه ۷.۴.۱. *فرض کنید F زیرمجموعه‌ای ناتهی از M باشد. در این صورت F فیلتر است اگر و فقط اگر شرایط زیر برقرار باشد.*

(F_3) $1 \in F$، $x \to y \in F$ *و* $x \in F$ **نتیجه دهند** $y \in F$، *یا*

(F_4) $1 \in F$، $x \rightsquigarrow y \in F$ *و* $x \in F$ **نتیجه دهند** $y \in F$.

تعریف ۸.۴.۱. فیلتر P از مشبکه مانده M اول گفته می‌شود هرگاه $x \vee y \in P$ نتیجه دهد

$x \in P$ یا $y \in P$.

نمادگذاری: *مجموعه‌ی تمام فیلترها از مشبکه مانده M را با $FILTER(M)$ نمایش می‌دهیم.*
هر فیلتر نرمال از مشبکه مانده M مانند F یک رابطه‌ی همنهشتی $\equiv_F$ به صورت زیر القا می‌کند

$$x \equiv_F y \Leftrightarrow x \to y \in F, y \to x \in F.$$

برای هر $x \in M$، فرض کنید $[x]_F$ کلاس هم‌ارزی x نسبت به رابطه همنهشتی $\equiv_F$باشد. در این صورت $\frac{M}{F}$ مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی رابطه $\equiv_F$ با عمل‌هایی که بطور طبیعی القا می‌شوند یک مشبکه‌ی مانده است.

تعریف ۹.۴.۱. فرض کنید A و B دو مشبکه‌ی مانده باشند. نگاشت $f : A \to B$ یک همریختی مشبکه‌های مانده نامیده می‌شود اگر و فقط اگر برای هر $x, y \in A$، داشته باشیم

(۱) $f(0) = 0$،

(۲) $f(x \odot y) = f(x) \odot f(y)$،

(۳) $f(x \to y) = f(x) \to f(y)$،

(۴) $f(x \rightsquigarrow y) = f(x) \rightsquigarrow f(y)$،

(۵) $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$،

(۶) $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$.

اگر نگاشت f یک به یک و پوشا باشد، آنگاه f را یکریختی می‌نامیم. هم‌چنین هسته همریختی $f : A \longrightarrow B$ که به صورت $kerf = \{x \in A : f(x) = 1\}$ تعریف می‌شود فیلتری از A است.

قضیه ۱۰.۴.۱. *فرض کنید $f : A \to B$ همریختی مشبکه مانده باشد. در این صورت*

(۱) *اگر F فیلتری از B باشد، آنگاه $f^{-1}(F)$ فیلتری از A است،*

(۲) *اگر P فیلتری نرمال از B باشد، آنگاه $f^{-1}(P)$ فیلتری نرمال از A است.*

لم ۱.۴.۱۱. *هر فیلتر نرمال یک مشبکه مانده هسته یک همریختی است.*

قضیه ۱.۴.۱۲. (*قضیه اول یکریختی مشبکه‌های مانده*) *فرض کنید $M_۱$ و $M_۲$ دو مشبکه مانده و $f : M_۱ \longrightarrow M_۲$ یک برو ریختی مشبکه مانده باشد. در این صورت $\frac{M_۱}{ker(f)} \cong M_۲$.*

۱.۵ جبر های بولی

تعریف ۱.۵.۱. ساختار جبری $(A; +, \cdot, ^*, ۰, ۱)$ از نوع $(۲, ۲, ۱, ۰, ۰)$ یک جبر بولی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y, z \in A$، شرایط زیر برقرار باشد.

$(C_۱)$ $x + y = y + x$ $(C'_۱)$ $x \cdot y = y \cdot x$

$(C_۲)$ $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ $(C'_۲)$ $x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$

$(C_۳)$ $x + ۰ = x$ $(C'_۳)$ $x \cdot ۱ = x$

$(C_۴)$ $x + x^* = ۱$ $(C'_۴)$ $x \cdot x^* = ۰$

مثال ۱.۵.۲. اگر X مجموعه‌ای متناهی باشد، $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ یک جبر بولی است که در آن برای $A, B \subseteq X$، داریم $A + B = A \cup B$ ،$A \cdot B = A \cap B$ ،$A^* = X - A$ و $۰ = \emptyset$ و $۱ = X$.

قضیه ۱.۵.۳. *فرض کنید A یک جبر بولی باشد. در این صورت برای هر $x, y, z \in A$، داریم*

(۱) $x \cdot x = x$ و $x + x = x$،

(۲) $x \cdot ۰ = ۰$ و $x + ۱ = ۱$،

(۳) $x \cdot (x + y) = x$ و $x + (x \cdot y) = x$،

(۴) $x + (y + z) = (x + y) + z$ و $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

۱.۶ MV-جبرها

ابتدا متذکر می‌شویم که تمامی مطالب این بخش از مرجع [۸] استخراج شده است.

تعریف ۱.۶.۱. جبر $(A;\oplus,^*,\circ)$ از نوع $(۲,۱,\circ)$ یک MV-جبر نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x,y,z\in A$، داشته باشیم

$(MV_۱)$ $x\oplus y=y\oplus x$،

$(MV_۲)$ $x\oplus(y\oplus z)=(z\oplus y)\oplus z$،

$(MV_۳)$ $x\oplus\circ=x$،

$(MV_۴)$ $x\oplus\circ^*=\circ^*$،

$(MV_۵)$ $(x^*)^*=x$،

$(MV_۶)$ $(x^*\oplus y)^*\oplus y=(x\oplus y^*)^*\oplus x$.

در MV-جبر A، برای هر $x,y\in A$ تعریف می‌کنیم

(۱) $۱:=\circ^*$،

(۲) $x\odot y:=(x^*\oplus y^*)^*$،

(۳) $x\ominus y:=x\odot y^*$،

(۴) $x\vee y:=x\oplus(y\odot x^*)$،

(۵) $x\wedge y:=(x^*\vee y^*)^*=x\odot(y\oplus x^*)$.

در MV-جبر A، به ازای هر $x,y\in A$ تعریف می‌کنیم

$$x\leq y\Leftrightarrow x\vee y=y\Leftrightarrow x\wedge y=x.$$

نتیجه ۲.۶.۱. هر MV- جبر A *با ساختار جبری* $(A;\vee,\wedge,\circ,۱)$ *یک مشبکه‌ی توزیع پذیر و کراندار است.*

تذکر ۳.۶.۱. مشبکه‌ی ماندهM یک MV -جبر نامیده می‌شود هرگاه تعویض پذیر بوده و در شرایط زیر صدق کند.

(۱) $(x\to y)\vee(y\to x)=۱$ و $(x\to y)\odot x=x\wedge y$.

(۲) $x^{--}=x$.

اکنون به چند مثال از MV-جبرها می‌پردازیم.

مثال ۴.۶.۱. هر جبر بولی یک MV-جبر است اما برعکس آن برقرار نیست.

مثال ۵.۶.۱. فرض کنید $A = \{0, x_1, x_2, 1\}$. در این صورت A همراه با اعمال تعریف شده طبق جدول‌های زیر یک MV-جبر است.

$\oplus$	0	x_1	x_2	1
0	0	x_1	x_2	1
x_1	x_1	x_1	1	1
x_2	x_2	1	x_2	1
1	1	1	1	1

$*$	0	x_1	x_2	1
	0	x_1	x_2	1

تعریف ۶.۶.۱. MV-جبر A را مرتب خطی گوییم اگر و فقط اگر برای $x, y \in A$، داشته باشیم $y \leq x$ یا $x \leq y$.

لم ۷.۶.۱. *فرض کنید A یک MV-جبر باشد. در این صورت احکام زیر به ازای هر $x, y, z \in A$، برقرارهستند.*

(۱) $x \oplus x^* = 1$ و $x \oplus 1 = 1$،

(۲) $x \odot 1 = x$ و $x \odot x^* = 0$،

(۳) $x \oplus y = (x^* \odot y^*)^*$ و،

(۴) $x \oplus 0 = x$ و $x \odot 0 = 0$،

(۵) $(x \oplus y)^* = x^* \odot y^*$ و $(x \odot y)^* = x^* \oplus y^*$،

(۶) *اگر* $x \oplus y = 0$ $(x \odot y = 1)$، *آنگاه* $x = y = 0$ $(y = 1, x = 1)$

(۷) *اگر* $x^* \oplus y = 1$ و $x \oplus y^* = 1$، *آنگاه* $x = y$،

(۸) *اگر* $x \oplus z = y \oplus z$ و $x \leq z^*$ و $y \leq z^*$ ، *آنگاه* $x = y$،

(۹) *اگر* A *مرتب خطی و* $x \oplus z \neq 1$ و $x \oplus z = y \oplus z$، *آنگاه* $x = y$.

(۱۰) $x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$،

(۱۱) *اگر* $x \vee y = 0$ $(x \wedge y = 1)$، *آنگاه* $x = y = 0$ $(x = y = 1)$،

(۱۲) $(x \wedge y)^* = x^* \vee y^*$ و $(x \vee y)^* = x^* \wedge y^*$، (۱۳) $x \oplus (y \wedge z) = (x \oplus y) \wedge (x \oplus z)$ و $x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z)$،

(۱۴) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ و $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$،

(۱۵) اگر $x \wedge y^* = ۰$، آنگاه $x \oplus (y \odot z) = y \odot (x \oplus z)$،

(۱۶) اگر $x \vee y = ۱$، آنگاه $(x \odot x) \vee (y \odot y) = ۱$،

(۱۷) $(x \oplus y^*) \vee (y \oplus x^*) = ۱$.

قضیه ۸.۶.۱. *در هر MV-جبر A احکام زیر با هم معادلند.*

(۱) $x \leq y$،

(۲) $y \oplus x^* = ۱$،

(۳) $x \odot y^* = ۰$،

(۴) $y^* \leq x^*$.

قضیه ۹.۶.۱. *در هر MV-جبر A احکام زیر با هم معادلند.*

(۱) $x \oplus x = x$،

(۲) $x \oplus y = x$،

(۳) $y \vee x^* = ۱$،

(۴) $x \wedge y^* = ۰$،

(۵) $x \odot x = x$،

(۶) $x \vee x^* = ۱$،

(۷) $x \wedge x^* = ۰$.

تعریف ۱۰.۶.۱. مرتبه عنصر x را برابر با کوچکترین عدد طبیعی n تعریف می‌کنیم که $nx = ۱$ به طوری که $nx = x \oplus x \oplus x \oplus ... \oplus x$. در غیر این صورت تعریف می‌کنیم $ord(x) = \infty$.

تعریف ۱۱.۶.۱. MV-جبر A را به طور موضعا متناهی گوییم اگر هر عضو ناصفر از A دارای مرتبه متناهی باشد.

قضیه ۱.۶.۱۲. *هر MV-جبر موضعا متناهی، مرتب خطی است.*

تعریف ۱.۶.۱۳. فرض کنید A یک MV-جبر باشد. نگاشت $d : A \times A \to A$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d(x, y) = (x^* \odot y) \oplus (y^* \odot x).$$

لم ۱.۶.۱۴. *در هر MV-جبر A گزاره‌های زیر برقرارند:*

(۱) $d(x, x) = \circ$ و $d(x, y) = d(y, x)$،

(۲) $d(x, \circ) = x$ و $d(x, ۱) = x^*$،

(۳) $d(x, y) = d(x^*, y^*)$،

(۴) $d(x, y) = \circ$ *اگر و فقط اگر* $x = y$،

(۵) $d(x, z) \leq d(x, y) \oplus d(y, z)$،

(۶) $d(x \oplus z, y \oplus t) \leq d(x, y) \oplus d(z, t)$،

(۷) $x \ominus x = \circ$،

(۸) $(x \ominus y) \oplus y = (y \ominus x) \oplus x$.

تعریف ۱.۶.۱۵. فرض کنید A یک MV-جبر باشد. زیر مجموعه ناتهی I از A را ایده‌آل گوییم هرگاه

(۱) $\circ \in I$،

(۲) به ازای هر $x, y \in A$، $x \oplus y \in I$،

(۳) به ازای هر $x, y \in I$، اگر $x \in I$ و $y \leq x$، آنگاه $y \in I$.

Iرا یک ایده ال محض(سره) می‌نامیم هرگاه $I \neq A$. واضح است که Iایده ال سره است اگر و فقط اگر $۱ \notin I$.

قرارداد ۱.۶.۱۶. *مجموعه همه ایده‌آل‌های A را با $IDEAL(A)$ نشان می‌دهیم.*

تعریف ۱.۶.۱۷. ایده‌آل P از MV-جبر A اول گفته می‌شود اگر به ازای هر $x, y \in A$،