بسم اللّه الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات

روشی کلی برای حل مسائل بهترین تقریب مقید غیرخطی

مؤلف:
مژگان بنی اسد آزاد

استاد راهنما:
دکتر حسین محبی

شهریور ماه ۱۳۹۲

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: مژگان بنی اسدآزاد	امضاء:
استاد راهنما:دکتر حسین محبی	امضاء:
داور اول :دکتر محمدعلی یعقوبی	امضاء:
داور دوم:دکتر محمدعلی ولی	امضاء:
نماینده تحصیلات تکمیلی:دکتر علیرضا دعاگویی	امضاء:

به یاد مادر مهربانم،
که دلم سالها برایش تنگ است ...

و تقدیم به

همسر عزیز و دختر نازنینم ریحانه

تشکر و قدردانی

سپاس خدای مهربان را که یاریم نمود تا بتوانم این پایان نامه را به انجام برسانم و با تشکر از راهنمایی های استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر محبی که در طی چند ماهی که سرگرم انجام این پایان نامه بودم همواره مرا مورد لطف ویاری بی منت خویش قرار دادند و در این زمینه از هیچ گونه کمک و مساعدتی دریغ ننمودند. همچنین از جناب آقایان دکتر یعقوبی و دکتر ولی، داوران محترم پایان نامه، کمال تشکر را دارم و از بذل عنایات، توجهات و نکته سنجی های دقیق ایشان بی نهایت سپاسگزارم.

مژگان بنی اسدآزاد

مقدمه

در مبحث درونیابی[۱] و تقریب مقید[۲]، پیدا کردن بهترین تقریب[۳] به بردار x در فضای هیلبرت X، از مجموعه $K = C \cap D$ که C و D زیر مجموعه های محدب و بسته ای از X هستند، از اهمیت زیادی برخوردار است. [۱۰، ۹، ۷]
اما یک سوال اساسی که وجود دارد این است که آیا می توان بهترین تقریب به $x \in X$، از مجموعه K را با بهترین تقریب به یک انتقال $x - \ell$ از x، از مجموعه C برای یک ℓ در یک مخروط معین در X، مشخص نمود.
چون، از نظر کاربردی، معمولا محاسبه بهترین تقریب از مجموعه C، نسبت به محاسبه بهترین تقریب از مجموعه K ساده تر است، بنابراین پیدا کردن شرایطی مناسب برای این "خاصیت انتقال"[۴] از اهمیت زیادی برخوردار است.
روش معمولی که برای این منظور وجود دارد، استفاده از یک صلاحیت قیدی است که بتواند چارچوبی برای مطالعه مسائل تقریب مقید و بخصوص خاصیت انتقال به وجود آورد.
اخیرا با استفاده از صلاحیت های قیدی موضعی[۵] مثل خاصیت اشتراک غلاف مخروطی

[۱] interpolation

[۲] constrained approximation

[۳] best approximation

[۴] perturbation property

[۵] local constraint qualification

قوی[۶] [۱۰، ۶، ۲]، وقتی که $D=\{x\in X|Ax\leq b\}$ و A یک نگاشت خطی پیوسته از X به یک فضای هیلبرت متناهی البعد است و همچنین با استفاده از صلاحیت قیدی اساسی تعمیم یافته[۷] [۱۹، ۱۸، ۱۷]، وقتی که $D=\{x\in X|\ g_i(x)\leq 0, i\in I\}$ و برای هر $i\in I$، $g_i:X\to\mathbb{R}$ یک تابع محدب و پیوسته است که I یک مجموعه اندیس گذار دلخواه است، مشخصه های[۸]مختلفی از خاصیت انتقال داده شده است، که این صلاحیت های قیدی، براساس صلاحیت قیدی اسلاتر[۹] [۱۵] (شرط نقطه درونی[۱۰])ساخته شده اند.اما مشکل بزرگی که وجود دارد، عدم وجود یک معیار کلی خوب است که خاصیت اشتراک غلاف مخروطی قوی را نتیجه دهد و نسبت به صلاحیت قیدی اسلاتر محدودیت کمتری داشته باشد.

هدف این پایان نامه، بررسی مسئله بهترین تقریب مقید است وقتی که X یک فضای هیلبرت، Y یک فضای باناخ، S مخروطی محدب و بسته در Y، $g:X\to Y$ یک تابع $S-$محدب و پیوسته باشد و $K=C\cap\{x\in X\mid -g(x)\in S\}$ و همچنین نشان دادن صلاحیت های قیدی کلی[۱۱]برای خاصیت انتقال است.

در این حالت، مجموعه قیود مسئله، دسته وسیعی از قیدها، اعم از قیود مساوی و نامساوی و قیود مخروطی غیر چند وجهی[۱۲]مثل قیود خطی نیم معین[۱۳]را که در کاربرد بسیار مهم هستند، شامل می شود. [۲۳]

---

[۶] strong conical hull intersection property(strong CHIP)

[۷] generalized basic constraint qualification

[۸] characterization

[۹] Slater constraint qualification

[۱۰] interior- point codition

[۱۱] global constraint qualification

[۱۲] non-polyhedral cone-constraint

[۱۳] the semidefinite linear constraints

اهمیت صلاحیت های قیدی کلی که بیان خواهیم کرد این است که این صلاحیت های قیدی نسبت به شرایط نوع اسلاتر محدودیت کمتری دارند و خاصیت اشتراک غلاف مخروطی قوی را نتیجه می دهند و همچنین یک چارچوب کلی دوگان را برای مسئله بهترین تقریب مقید به وجود می آورند. همچنین نشان می دهیم که در مسئله فوق، خاصیت اشتراک غلاف مخروطی قوی، یک صلاحیت قیدی برای خاصیت انتقال، تحت شرط ضعیفی از بسته بودن[۱۴]، می باشد. همچنین شرایط دوگانگی را می سازیم که با تقریب از مجموعه K معادل هستند. ما در فصل ۱، تعاریف و قضایایی را می آوریم که پیشنیاز فصل های بعدی هستند. در فصل ۲، یک صلاحیت قیدی کلی دوگان برای خاصیت اشتراک غلاف مخروطی قوی می آوریم. در فصل ۳، نشان می دهیم که وقتی قیود مخروطی داریم، خاصیت اشتراک غلاف مخروطی قوی، خاصیت انتقال را نتیجه می دهد و همچنین شرایط مختلف دوگانگی را برای مسئله بهترین تقریب می سازیم و در بخش پایانی این فصل، فرض می کنیم g یک نگاشت آفینی و Y یک فضای متناهی البعد باشد و نتایجی را به دست می آوریم.

[۱۴] under a mild closure condition

چکیده

در این پایان نامه می خواهیم این مسئله را بررسی کنیم که آیا می توان بهترین تقریب به بردار x در فضای هیلبرت X از مجموعه K را با بهترین تقریب به یک انتقال $x - \ell$ از x برای یک $\ell \in X$، از مجموعه C مشخص نمود که در آن C زیر مجموعه محدب و بسته ای از X، Y یک فضای باناخ، S مخروطی محدب و بسته در Y، $g : X \to Y$ یک تابع $S-$محدب و پیوسته است و $K = C \cap \{x \in X \mid -g(x) \in S\}$. برای این منظور، به دنبال یک صلاحیت قیدی دوگان هستیم که یک روش کلی برای حل مسئله ارائه دهد و نسبت به شرایط نوع اسلاتر (یا نقطه درونی) محدودیت کمتری داشته باشد و همچنین خاصیت اشتراک غلاف مخروطی قوی را نتیجه دهد.سپس نشان می دهیم که خاصیت اشتراک غلاف مخروطی قوی، خاصیت انتقال را تحت شرط ضعیفی از بسته بودن، نتیجه می دهد.این شرط بسته بودن، برای مثال، وقتی که مجموعه قیود با تعداد متناهی از نامعادلات خطی تعریف شده باشد، برقرار می باشد.ما همچنین شرایط دوگانگی را به دست می آوریم که با بهترین تقریب از مجموعه K معادل هستند و در پایان نشان می دهیم وقتی Y یک فضای متناهی البعد باشد همه نتایج فوق به دست می آیند.

کلمات کلیدی: *بهترین تقریب مقید، شرایط کلی، خاصیت اشتراک غلاف مخروطی قوی، قیود مخروطی - محدب، شرط اسلاتر، فضای هیلبرت، صلاحیت های قیدی دوگان*

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات وپیش نیاز ها

۱.۱ مقدمه

در این فصل، نمادها، تعاریف و قضایایی را می آوریم که در فصل های بعد، از آن ها استفاده می شود.در این فصل فرض بر این است که X یک فضای نرم دار حقیقی است، مگر اینکه خلاف آن گفته شده باشد.

فرض کنید $A \subseteq X$. در این صورت مجموعه نقاط درونی A را با $intA$ نمایش می دهیم. فضای دوگان X، یعنی مجموعه همه تابعک های خطی و پیوسته روی X را با X^* و مجموعه همه عملگرهای خطی و کراندار از X به فضای نرمدار Y را با $B(X,Y)$ نشان می دهیم.برای $W \subseteq X^*$، بستار W را با $cl\,W$ و بستار W را نسبت به توپولوژی $*-$ ضعیف با $w^*-cl\,W$ نشان می دهیم وهمچنین برای همگرایی $*-$ ضعیف، نماد $\underrightarrow{w^*}$ را به کار می بریم.مجموعه اعداد حقیقی نامنفی را با $\mathbb{R}_+$ و مجموعه اعداد حقیقی تعمیم یافته را با $\overline{\mathbb{R}}$ نمایش می دهیم که $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

۲.۱ تعاریف و قضایایی از آنالیز محدب و آنالیز تابعی

تعریف ۱.۲.۱. زیرمجموعه $C \subseteq X$ را محدب گوییم، هرگاه برای هر $a, b \in C$ وبرای هر $\circ \leq \lambda \leq ۱$، داشته باشیم: $\lambda a + (۱-\lambda)b \in C$.

تعریف ۲.۲.۱. زیرمجموعه $C \subseteq X$ را مخروط گوییم، هرگاه برای هر $a \in C$ وبرای هر $\lambda > \circ$، داشته باشیم: $\lambda a \in C$.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید $A \subseteq X$. کوچکترین مجموعه محدب شامل A را غلاف محدب A گوییم و با نماد $convA$ نشان می دهیم و کوچکترین مخروط محدب شامل A را غلاف مخروطی-محدب A گوییم وبا نماد $coneA$ نشان می دهیم.

تعریف ۴.۲.۱. برای زیرمجموعه ناتهی W از X، مخروط قطبی W (W^o) و مخروط دوگان W (W^+) را چنین تعریف می کنیم:

$$W^o := \{f \in X^* | f(w) \leq 0, \quad \forall w \in W\}،$$
$$W^+ := -W^o.$$

به وضوح، W^o مخروطی بسته در X^* است.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید $A \subseteq X$. $z \in A$ رایک نقطه فرین برای A نامیم، اگر برای هر $x, y \in A$ وبرای هر $0 \leq \lambda \leq 1$، داشته باشیم:

$$z = \lambda x + (1-\lambda)y \implies x = y = z$$

و مجموعه همه نقاط فرین A را با $extA$ نمایش می دهیم.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع باشد.دامنه موثر f $(dom f)$ و بالای نمودار تابع f $(epi f)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$dom f := \{x \in X | \, f(x) < +\infty\}،$$
$$epi f := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} | \, x \in dom f, f(x) \leq r\}.$$

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع باشد.تابع f را محدب گوییم، اگر برای هر $x, y \in X$ وبرای هر $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ که $f(x) < \mu$ و $f(y) < \nu$ و $0 \leq \lambda \leq 1$، داشته باشیم:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda\mu + (1-\lambda)\nu،$$

و f را محدب سره گوییم، هرگاه f محدب باشد و در دو شرط زیر صدق کند:

۱- $dom f \neq \emptyset$،

۲- $f(x) \neq -\infty$، برای هر $x \in X$.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع باشد و $a \in X$. تابع f را در a نیم پیوسته پایینی گوییم، اگر برای هر $r \in \mathbb{R}$ و $r < f(a)$، وجود داشته باشد $\delta > 0$ به قسمی که $f(x) > r$ برای هر x با این شرط که $\|x - a\| < \delta$.

f را نیم پیوسته پایینی گوییم، هرگاه f در هر نقطه از X نیم پیوسته پایینی باشد.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع باشد و $x_0 \in X$ و تابع f در x_0 متناهی باشد، یعنی $f(x_0) \in \mathbb{R}$. در این صورت زیردیفرانسیل f در x_0 را با نماد $\partial f(x_0)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\partial f(x_0) := \{u \in X^* | f(x) \geq f(x_0) + < u, x - x_0 >, \quad \forall x \in X\}،$$

جائیکه $< .,. >$ عمل دوگانگی بین X و X^* است. تابع f را در x_0 زیردیفرانسیل پذیر گوییم هرگاه $\partial f(x_0) \neq \emptyset$. اگر $f(x_0) = -\infty$ یا $f(x_0) = +\infty$، در این صورت $\partial f(x_0) := \emptyset$.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع باشد.تابع مزدوج f را با f^* نشان می دهیم که $f^* : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$f^*(u) := \sup_{x \in X}(< u, x > - f(x)), \quad \forall u \in X^*$$

وفرض کنید $g : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع باشد.در این صورت تابع مزدوج g، $g^* : X \to \overline{\mathbb{R}}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$g^*(x) := \sup_{u \in X^*}(< u, x > - g(u)), \quad \forall x \in X.$$

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید $D \subseteq X$. تابع نشانگر δ_D وتابع محمل σ_D را چنین تعریف می کنیم:

$$\delta_D(x) := \begin{cases} 0 & , x \in D \\ +\infty & , x \notin D \end{cases}$$

و

$$\sigma_D(u) := \sup_{x \in D} < u, x > \quad (u \in X^*)$$

و قرارداد می کنیم $\sup\emptyset := -\infty$.

قضیه ۱۲.۲.۱. *فرض کنید $D \subseteq X$. در این صورت داریم:* $\sigma_D = \delta_D^*$.

برهان. برای هر $u \in X^*$ داریم:

$$\delta_D^*(u) = sup_{x\in X}(< u, x > -\delta_D(x)) = sup_{x\in D} < u, x >= \sigma_D(u)$$

بنابراین $\sigma_D = \delta_D^*$. □

قضیه ۱۳.۲.۱. ([۲۴]) *فرض کنید $D \subseteq X$. آنگاه*

۱ - *D محدب است اگر و تنها اگر δ_D محدب باشد.*

۲ - *D بسته است اگر وتنها اگر δ_D نیم پیوسته پایینی باشد.*

قضیه ۱۴.۲.۱. ([۲۴]) *فرض کنید $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع باشد.در این صورت، $f = f^{**}$ اگر و تنها اگر f یک تابع محدب سره ونیم پیوسته پایینی باشد.*

۳.۱ فضای موضعا محدب و قضایای جداسازی هان- باناخ

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی هاسدورف روی میدان $F(\mathbb{R}$یا$\mathbb{C})$ باشد. X را یک فضای موضعا محدب گوییم، اگر توپولوژی آن با خانواده ای از نیم نرم ها روی X تعریف شده باشد.

به وضوح، هر فضای نرم دار روی $\mathbb{R}$، یک فضای موضعا محدب است.

قضیه ۲.۳.۱. ([۵]) *اگر X یک فضای موضعا محدب باشد، آنگاه* $(X^*, w^*)^* = X$.

قضایای زیر معروف به قضایای جداسازی هستند و از نتایج هندسی "قضیه هان- باناخ" می باشند.

قضیه ۳.۳.۱. ([۵]) *فرض کنید X یک فضای موضعا محدب حقیقی و A زیرمجموعه محدب و بسته ای از X باشد و $x_\circ \notin A$. در این صورت $x_\circ$ از A به طور اکید جدا*

می شود، یعنی یک تابعک خطی و پیوسته روی X، مانند f و یک اسکالر حقیقی α وجود دارد به قسمی که $f(x_\circ) < \alpha$ و $f(a) > \alpha$ برای هر $a \in A$.

قضیه ۴.۳.۱. ([۵]) *فرض کنید X یک فضای موضعا محدب حقیقی و A و B زیرمجموعه های محدب و بسته ای از X باشند به طوری که $A \cap B = \emptyset$. در این صورت اگر B فشرده باشد، آنگاه A و B به طور اکید از هم جدا می شوند، یعنی یک تابعک خطی و پیوسته روی X، مانند f و اسکالرهای حقیقی α و β وجود دارند به قسمی که $f(a) < \alpha < \beta < f(b)$ برای هر $a \in A$ و هر $b \in B$.*

۴.۱ بهترین تقریب و مجموعه های تقریب پذیر و چبیشف

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید $x \in X$ و $W \subseteq X$ ناتهی باشد.تعریف می کنیم:

$$d(x, W) := \inf_{w \in W} \|x - w\|.$$

گوییم $w_\circ \in W$ یک بهترین تقریب برای $x \in X$ است، هرگاه $d(x, W) = \|x - w_\circ\|$.
مجموعه همه بهترین تقریب های $x \in X$ در W را با $P_W(x)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می شود:

$$P_W(x) := \{w \in W | \, \|x - w\| = d(x, W)\}.$$

تعریف ۲.۴.۱. مجموعه W را یک زیرمجموعه تقریب پذیر از X نامیم، اگر برای هر $x \in X$ حداقل یک بهترین تقریب $w_\circ \in W$ وجود داشته باشد.همچنین W را زیرمجموعه چبیشف از X نامیم، اگر برای هر $x \in X$ یک بهترین تقریب یکتای $w_\circ \in W$ وجود داشته باشد.

قضیه ۳.۴.۱. ([۷]) *هر مجموعه محدب و بسته در یک فضای هیلبرت، چبیشف است.*

قضیه ۱.۴.۴. ([۷]) *فرض کنید X یک فضای هیلبرت، W زیرمجموعه محدب و بسته ای از X، $x \in X$ و $w_\circ \in W$ باشد.در این صورت داریم:*

$$w_\circ = P_W(x) \text{ اگر و تنها اگر } x - w_\circ \in (W - w_\circ)^o.$$

لم ۱.۴.۵. ([۲۲] و [۲۴]) *فرض کنید X یک فضای باناخ، W زیرمجموعه محدب و بسته ای از X، $x \in X$ و $w_\circ \in W$ باشد.در این صورت $w_\circ \in P_W(x)$ اگر و تنها اگر یک $f \in (W - w_\circ)^o$ وجود داشته باشد که $\|f\| = ۱$ و $f(x - w_\circ) = \|x - w_\circ\|$.*

۱.۵ خاصیت اشتراک غلاف مخروطی قوی

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ و $\{C_۱, ..., C_m\}$ مجموعه ای متناهی از زیرمجموعه های ناتهی، محدب و بسته از X باشد و $x \in \bigcap_{i=۱,...,m} C_i$. در این صورت گوییم $\{C_۱, ..., C_m\}$ در x خاصیت اشتراک غلاف مخروطی قوی دارد، اگر

$$(\bigcap_{i=۱,...,m} C_i - x)^o = \sum_{i=۱,...,m} (C_i - x)^o.$$

و گوییم مجموعه $\{C_۱, ..., C_m\}$ خاصیت اشتراک غلاف مخروطی قوی دارد، اگر $\{C_۱, ..., C_m\}$ در هر نقطه از $\bigcap_{i=۱,...,m} C_i$ خاصیت اشتراک غلاف مخروطی قوی را داشته باشد.

قضیه ۱.۵.۲. ([۸]) *فرض کنید $C_۱, ..., C_m$ زیرمجموعه های محدب و بسته ای از فضای باناخ X باشند و $E = \bigcap_{i=۱,...,m} C_i$ درون ناتهی داشته باشد، یعنی $intE \neq \emptyset$. آنگاه مجموعه $\{C_۱, ..., C_m\}$ خاصیت اشتراک غلاف مخروطی قوی دارد.*

قضیه ۱.۵.۳. ([۷]) *فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی، $h_i \in X \setminus \{\circ\}$ و $b_i \in \mathbb{R}$ باشد.تعریف می کنیم:*

$$H_i := \{x \in X | < h_i, x > \leq b_i\} \quad (i = ۱, ..., m),$$

که در آن $<.,.>$ ضرب داخلی روی X می باشد.آنگاه برای هر $x_\circ \in \bigcap_{i=1,...,m} H_i$، داریم:

$$\begin{aligned}(\bigcap_{i=1,...,m} H_i - x_\circ)^o &= \sum_{i=1,...,m} (H_i - x_\circ)^o \\ &= \sum_{i\in I(x_\circ)} (H_i - x_\circ)^o \\ &= \mathbf{cone}\{h_i | i \in I(x_\circ)\}\end{aligned}$$

که در آن $I(x_\circ) = \{i \in I | <h_i, x_\circ> = b_i\}$ و $I = \{1, ..., m\}$.

اکنون با توجه به قضیه ۴.۴.۱ و قضیه ۳.۵.۱، قضیه زیر به آسانی ثابت می شود.

قضیه ۴.۵.۱. *فرض کنید X یک فضای هیلبرت و C زیرمجموعه محدب و بسته ای از X باشد و h_i، b_i و H_i $(i = 1, ..., m)$ تعریف شده در قضیه ۳.۵.۱ باشند.در این صورت اگر $K = C \cap (\cap_{i=1,...,m} H_i)$، آنگاه گزاره های زیر معادلند:*

۱ - $\{C, H_1, ..., H_m\}$ خاصیت اشتراک غلاف مخروطی قوی دارد.

۲-برای هر $x \in X$ و $x_\circ \in K$ داریم $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, ..., m)$ وجود دارد با این شرط $\lambda_i(<x_\circ, h_i> - b_i) = 0$ برای هر $i = 1, ..., m$ به قسمی که

$$x_\circ = P_K(x) \Leftrightarrow x_\circ = P_C(x - \textstyle\sum_{i=1,...,m} \lambda_i h_i) .$$

۶.۱ عملگر الحاقی، قضیه نمایشی و لم ریس

تعریف ۱.۶.۱. فرض کنید X و Y دو فضای ضرب داخلی باشند و $A \in B(X,Y)$. نگاشت $A^* : Y \to X$ را الحاقی A نامیم، اگر

$$<Ax, y> = <x, A^*y>, \quad \forall x \in X, \forall y \in Y .$$

قضیه ۲.۶.۱. ([۷]) ۱ - *نگاشت الحاقی A (A^*)، در صورت وجود، یکتاست.*

۲ - *اگر X یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه A^* وجود دارد و $A^* \in B(Y, X)$.*

تعریف ۳.۶.۱. فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی باشد و $\{x_i\}_{i\geq ۱}$ پایه ای برای X باشد.در این صورت $\{x_i\}_{i\geq ۱}$ رایک پایه متعامد یکه برای X نامیم، اگر $< x_i, x_j > = \delta_{ij}$ برای هر $i, j = ۱, ۲, ...$ ، که δ_{ij} دلتای کرونکر است.

قضیه ۴.۶.۱. ([۷]) (*قضیه نمایش برای تبدیلات خطی*)

فرض کنید X یک فضای هیلبرت و Y یک فضای ضرب داخلی متناهی البعد باشد.اگر $\{y_۱, ..., y_m\}$ یک پایه متعامد یکه برای Y باشد و $A \in B(X, Y)$، آنگاه $x_۱, ..., x_m$ در X وجود دارند که

$$Ax = \sum_{i=۱,...,m} < x, x_i > y_i, \quad \forall x \in X$$،

و

$$A^*y = \sum_{i=۱,...,m} < y, y_i > x_i, \quad \forall y \in Y$$.

لم زیر که مشهور به لم ریس است، بیان می کند که هر تابعک خطی و پیوسته بر روی یک فضای هیلبرت را می توان بر حسب ضرب داخلی نمایش داد.

لم ۵.۶.۱. ([۷]) *فرض کنید X یک فضای هیلبرت و f تابعکی خطی و پیوسته بر روی X باشد.در این صورت یک $z \in X$ یکتا وجود دارد که $f(x) =< x, z >$ برای هر $x \in X$، و $\|f\| = \|z\|$.*

۷.۱ جهت های شدنی

حال، دستگاه (نامعادلات محدب) زیر را در نظر بگیرید:

$$g_i(x) \leq ۰, \quad i \in I \tag{۱.۱}$$