دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

دوشکافندگی جبرهای نیم گروهی

نگارش

طیبه صادقی

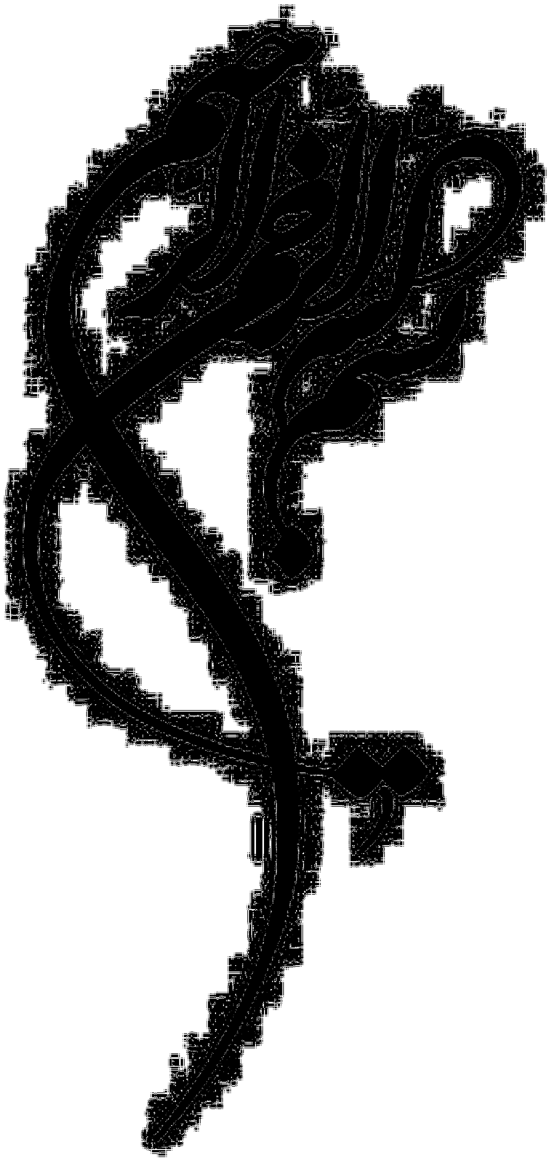
استاد راهنما

دکتر فریدون حبیبیان دهکردی

استاد مشاور

دکتر معمارباشی

مهرماه ۱۳۹۱



قدردانی

سپاس بیکران به درگاه لایزال الهی که مهربان ترین یاور است.

حق بزرگی که استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر حبیبیان بر گردن من دارند، عظیم تر از آن است که با الفاظ و کلمات قابل گفتن باشد. ولی این کمترین کاری است که از من بر می آید؛ پس با تمام وجود سپاسگزاری نموده و به نشان ادب، دستان پرمهرشان را می بوسم.

بر خود لازم می بینم از استاد مشاورم جناب آقای دکتر غفاری، به پاس زحمات ارزشمندشان تشکر وقدردانی نمایم.

و با سپاس فراوان از دوست عزیزم خانم بلقان آبادی که در این دوران همراه و یاور من بودند. سربلندی و موفقیت ایشان را از خداوند منان خواستارم.

مریم طایر

تقدیم به :

دو فرشته مهربانی که لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگیم مدیون حضور سبز آن هاست.

و

اسطوره زندگیم، پناه خستگیم و امید بودنم، همسرم.

چکیده

جبرهای ℓ^1- پیچشی برای نیم گروه های گسسته نیز تعریف می شوند. در این حالت نمی توان میانگین پذیری جبرها بر حسب نیم گروه های وابسته به آن ها را مشخص نمود. خانواده ای از نیم گروه ها که میانگین پذیری جبرهای ℓ^1- پیچشی آن ها به طور کامل مشخص گردیده، نیم شبکه ها هستند. در واقع اگر S یک نیم شبکه متناهی باشد، آن گاه جبر ℓ^1- پیچشی آن یعنی A_S میانگین پذیر است، اما اگر S نامتناهی باشد ، A_S میانگین پذیر نیست.

مفهوم ضعیف تری از میانگین پذیری، دوشکافندگی است. در این پایان نامه نشان می دهیم که اگر L یک نیم شبکه باشد، آن گاه A_L زمانی دوشکافنده است که L به طور موضعی متناهی یکنواخت باشد. تکنیک های اثبات در این پایان نامه نشان می دهند که اگر A_L دوشکافنده باشد، آن گاه به عنوان یک جبر باناخ با فضای باناخ $\ell^1(L)$ همراه با ضرب نقطه به نقطه یکریخت است. در حالت کلی $\ell^1(L)$ دوتصویری است که مفهومی قوی تر از دوشکافندگی است.

واژگان کلیدی: دوتصویری – دوشکافندگی – میانگین پذیری – نمایش شوتزنبرگر[1] – نیم شبکه – نیم گروه کلیفورد[2].

---

[1] $Shützenberger$

[2] $Clifford\ semigroup$

مقدمه

آنالیز هارمونیک به بررسی گروه های فشرده موضعی مانند G و جبرهای باناخ مختلف متناظر با آن ها مانند جبر گروهی $L^{1}(G)$ می پردازد. به موضوع میانگین پذیری جبرهای باناخ از سال ۱۹۷۰ به بعد توجه بسیاری شده است. اگر G یک گروه فشرده موضعی باشد قضیه مشهوری از جانسون [۳] وجود دارد که بیان می کند جبر پیچشی $L^{1}(G)$ میانگین پذیر است اگر و تنها اگر G یک گروه میانگین پذیر باشد. جبرهای $\ell^{1}-$ پیچشی می توانند برای نیم گروه های گسسته نیز تعریف شوند. در این حالت نمی توان میانگین پذیری جبرها بر حسب نیم گروه های وابسته به آن ها را همانند بالا مشخص نمود. خانواده دیگری از نیم گروه ها نیم شبکه ها هستند. اگر S یک نیم شبکه متناهی باشد، آن گاه جبر $\ell^{1}-$ پیچشی آن یعنی A_S میانگین پذیر است. دانکن و نومیکا [۴] در [?] نشان دادند که اگر S یک نیم شبکه نامتناهی باشد، A_S میانگین پذیر نیست.

در همان زمان هلمسکی [۵] شروع به گسترش جبری خواص همولوژیکی جبرها نمود که میانگین پذیری به صورتی که در [?] بیان شده کاملا منطبق بر این چارچوب بوده و شدیدا بامفهوم دوشکافندگی درارتباط است.

مفهوم دیگر تئوری هلمسکی دوتصویری است. جبرهای باناخ دوتصویری برای اولین بار توسط هلمسکی در [?] معرفی شدند. او بعدها دوتصویری جبرهای باناخ را با جزئیات بیشتر در [?] بررسی نمود. او نشان داد که $L^{1}(G)$ دوتصویری است اگروتنها اگر G فشرده باشد. اگر K یک فضای فشرده موضعی ناتهی باشد آن گاه $C_{\circ}(K)$ دوتصویری است اگروتنها اگر K گسسته باشد ([?] گزاره ۴.۲.۳۱). اما اگر K یک فضای فشرده نامتناهی باشد $C(K)$ دوتصویری نیست ([?] نتیجه ۵.٦.۳).

سلیوانوف [٦] در [?] نشان داده است که برای هر فضای باناخ E جبر $E\hat{\otimes}E^{*}$ دوتصویری است.

مفهوم دیگر تئوری هلمسکی دوشکافندگی است که از میانگین پذیری و دوتصویری ضعیف تر است. رامسدن [۷] دوشکافندگی جبرهای نیم گروهی را در [?] بررسی نموده است. در [?] دوتصویری و دوشکافندگی جبرهای فوریه توسط رونده [۸] و دوتصویری و دوشکافندگی جبرهای باناخ مدرج بر یک

---

[۳] $B.\ E.\ Johnson$

[۴] $Duncan,\ Namioka$

[۵] $A.\ Ya.\ Helemskii$

[٦] $Selivanov$

[۷] $Ramsden$

[۸] $V.Runde$

نیم شبکه توسط گرونبک و حبیبیان [9] در [?] مورد بررسی قرار گرفته است.

در این پایان نامه نشان می دهیم که اگر L یک نیم شبکه به طور موضعی متناهی یکنواخت باشد، جبر باناخ $\ell^1(L)$ همراه با ضرب پیچش دوشکافنده است .

این پایان نامه شامل چهار فصل است. فصل اول به بیان تعاریف و مقدماتی اختصاص دارد که در فصل های بعدی مورد استفاده قرار می گیرند. در فصل دوم به بررسی دوتصویری جبر باناخ $\ell^p(\mathbb{N})$ همراه با ضرب نقطه به نقطه می پردازیم. مطالب این فصل از مرجع [?] استخراج شده است.

در فصل سوم به دوشکافندگی جبر ℓ^1- نیم شبکه ای $\ell^1(L)$ پرداخته ایم که خود شامل چهار بخش است. در بخش اول این فصل تعاریف و مقدمات مربوط به نیم شبکه ها آورده شده است. در بخش دوم ارتباط بین میانگین پذیری و دوشکافندگی جبرها را مورد بررسی قرار داده ایم. بخش سوم شامل مشاهداتی درباره نرم قطر جبرهای با بعد متناهی است و بالاخره در بخش چهارم نمایش شوتزنبرگر یک نیم شبکه را معرفی کرده و با استفاده از آن به اثبات قضایا و نتایج اصلی پرداخته ایم.

در فصل آخر قضایا و نتایج بدست آمده در فصل سوم را برای جبرهای ℓ^1- پیچشی نیم گروه های کلیفورد اثبات کرده ایم.

مطالب این دو فصل برگرفته از کارهای چویی [10] در مرجع [?] می باشد.

---

[9] *N. Grøndæk, F. Habibian*

[10] *Choi*

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل با تعاریف و قضایای مورد نیاز آشنا خواهیم شد. این فصل شامل پنج بخش می باشد که در بخش اول آن به جبرهای باناخ پرداخته و در بخش دوم مدول های باناخ و مطالب مربوط به آن را بیان نموده ایم. در بخش سوم ضرب های تانسوری ، در بخش چهارم مشتق ها و میانگین پذیری جبر های باناخ و در بخش آخر دوتصویری و دوشکافندگی جبرهای باناخ بیان شده اند.

۱.۱ مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم E, F دو فضای باناخ باشند، فضای باناخ تمام عملگرهای خطی و کراندار ازE به F را با$B(E, F)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید E یک فضای باناخ باشد دراین صورت دوگان E را با $E' = B(E, \mathbb{C})$ و اثر $\lambda \in E'$ روی عناصر $x \in E$ را به صورت $\langle x, \lambda \rangle$ تعریف می کنیم.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید S یک نیم گروه و τ یک توپولوژی روی S باشد. (S, τ) را یک نیم گروه توپولوژیک گوییم، هرگاه τ هاسدورف بوده و نگاشت ضربی $S \times S \longrightarrow S$ باضابطه $(s, t) \longrightarrow st$ پیوسته باشد.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید X یک فضای برداری و τ یک توپولوژی روی X باشد. X را یک فضای برداری توپولوژیکی $(T.V.S)$ گوییم، هر گاه

الف) تک نقطه ای ها بسته باشند،

ب) اعمال فضای برداری پیوسته باشد.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید X یک $T.V.S$، X' دوگان X و برای هر $x \in X$، $\hat{x} : X' \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه $\hat{x}(\Lambda) = \Lambda(x)$ تعریف شده باشد. بدیهی است که $\hat{x}$ خطی است. فرض کنید

$$\widehat{X} = \{\hat{x} \quad ; \quad x \in X\}.$$

اگر $\Lambda_{۱} \neq \Lambda_{۲}$ پس $x \in X$ ای هست که $\Lambda_{۱}(x) \neq \Lambda_{۲}(x)$ یعنی $\hat{x}(\Lambda_{۱}) \neq \hat{x}(\Lambda_{۲})$. پس $\widehat{X}$ نقاط X' را جدا می کند.

کوچکترین توپولوژی روی X' که همه اعضای $\widehat{X}$ روی آن پیوسته است را توپولوژی ضعیف ستاره یا به اختصار w^*- توپولوژی روی X' گوییم و با $\sigma(X', X)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۶.۱.۱ کوچکترین توپولوژی τ روی S را که هر $f \in E$ نسبت به آن پیوسته باشد، $E-$ توپولوژی روی S نامیده و با τ_E نمایش می دهیم.

قضیه ۷.۱.۱ (باناخ — آلاگلو)

اگر X یک $T.V.S$ و V یک همسایگی از صفر باشد، آن گاه $K = \{\Lambda \in X' \quad ; \quad \forall x \in V \ \ |\Lambda(x)| \leq ۱\}$ با w^*- توپولوژی فشرده است.

برهان: به قضیه (۱۵.۳) از مرجع [?] رجوع کنید.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنید X یک فضای هاسدورف و فشرده موضعی باشد. فضای تمام توابع مختلط مقدار از X به $\mathbb{C}$ را با $\mathbb{C}^X$ و فضای تمام توابع مختلط مقدار پیوسته کراندار روی X را با $C_b(X)$ نمایش می دهیم.

۲.۱ جبرهای باناخ

تعریف ۱.۲.۱ اگر A یک فضای برداری بر میدان $\mathbb{F}$ باشد A را یک جبر گوییم هرگاه ضربی روی A موجود باشد که در روابط

الف) $x(yz) = (xy)z$،

ب) $x(y+z) = xy + xz$،

ج) $(x+y)z = xz + yz$،

د) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$.

برای هر $x, y, z \in A$ و هر $\alpha \in \mathbb{F}$ صدق کند.

تعریف ۲.۲.۱ اگر A یک جبر همراه با یک نرم که $(A, ||.||)$ یک فضای باناخ بوده و در نامساوی ضربی

$$\forall a, b \in A \; ; \quad ||ab|| \leq ||a||||b||,$$

صدق کند و A شامل عنصر همانی e باشد به طوری که

$$xe = ex = x \quad , \quad ||e|| = ۱,$$

آنگاه A یک جبر باناخ است.

تذکر ۳.۲.۱ اغلب وجود یکه از تعریف جبر باناخ حذف می شود با این حال، وجود همانی وجود معکوس ها را با معنی می کند.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید A یک جبر باشد. فضای $A \times \mathbb{F}$ با اعمال تعریف شده؛

$$(x, \alpha) + (y, \beta) = (x + y, \alpha + \beta),$$

$$\beta(x, \alpha) = (\beta x, \beta\alpha),$$

$$(x, \alpha).(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta). \quad (x, y \in A, \; \alpha, \beta \in \mathbb{F})$$

یک فضای برداری است. با تعریف $||(x,\alpha)|| = ||x|| + |\alpha|$، این فضا یک جبر نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ باهمانی $(\circ, \text{۱})$ است که آن را با $A^\flat$ نمایش می دهیم .

تعریف ۵.۲.۱ $A^\#$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:
اگر A یکدار باشد $A^\# = A$ و اگر A یکدار نباشد $A^\# = A^\flat$.

نکته ۶.۲.۱ به راحتی می توان نشان داد که نگاشت $a \to (a, \circ)$ یک یکریختی طولپا از A به روی زیرجبری از $A^\#$ است. لذا A را می توان به عنوان ایده الی از $A^\#$ در نظر گرفت. عنصر واحد $A^\#$ یعنی $(\circ, \text{۱})$ را با e_A نشان می دهیم.

در حالتی که A یکدار نباشد عنصر (x, α) از جبر $A^\# = A^\flat$ به صورت $x + \alpha e_A$ نشان داده می شود. به عبارت دیگر

$$(x, \alpha) = (x, \circ) + (\circ, \alpha) = (x, \circ) + \alpha(\circ, \text{۱}) = (x, \circ) + \alpha e_A = x + \alpha e_A.$$

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنید E یک فضای باناخ باشد، برای $r > \circ$ تعریف می کنیم :

$$E_{[r]} = \{x \in E : ||x|| \leq r\}.$$

تعریف ۸.۲.۱ فرض کنید E, F فضاهای باناخ و $f : E \longrightarrow F$ یک نگاشت خطی و کراندار بین فضاهای باناخ باشد. در این صورت نگاشت الحاقی f' به صورت $f' : F' \longrightarrow E'$ تعریف می شود.

تعریف ۹.۲.۱ فرض کنید A یک جبر باشد. یک مشخصه روی A یک بروریختی از A به $\mathbb{C}$ است. درواقع مشخصه φ، یک تابعک خطی ناصفر روی A است به طوری که

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \quad (a, b \in A).$$

مجموعه تمام مشخصه های روی A را با Φ_A نمایش می دهیم.

تعریف ۱۰.۲.۱ فرض کنیم Ω یک مجموعه فشرده و A یک جبر باناخ یکدار و مشمول $C(\Omega)$ باشد. A را طبیعی گوییم، هرگاه $\Omega = \Phi_A$.

تعریف ۱۱.۲.۱ فرض کنید A یک جبر و τ یک توپولوژی روی A است به طوری که (A,τ) یک فضای برداری توپولوژیکی باشد. (A,τ) را یک جبر توپولوژیک گوییم، هرگاه نیم گروه $(A,.)$ یک نیم گروه توپولوژیک باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱ فرض کنید A یک جبر و τ یک توپولوژی است به طوری که (A,τ) یک فضای برداری توپولوژیکی باشد. جبر توپولوژیکی (A,τ) یک $(F)-$ جبر نامیده می شود، هرگاه یک $F-$ فضا باشد. بدین معنی که متر پایای کامل d روی این فضا موجود باشد به طوری که $\tau_d = \tau$.

تعریف ۱۳.۲.۱ فرض کنید S یک مجموعه ناتهی باشد. یک جبر از توابع روی S یک زیر جبر از $\mathbb{C}^S$ می باشد.

زیر مجموعه $E \subseteq \mathbb{C}^S$ نقاط S را جدا می کند، هرگاه برای هر $s,t \in S$ که $s \neq t$، $f \in E$ ای موجود باشد به طوری که $f(s) \neq f(t)$.

و E به طور قوی نقاط S را جدا می کند یا E بر S صفر نمی شود، هر گاه برای هر $s \in S$، $f \in E$ ای موجود باشد به طوری که $f(s) \neq ۰$.

تعریف ۱۴.۲.۱ فرض کنید X یک فضای توپولوژیک ناتهی و A یک جبر از توابع روی X باشد. جبر A را یک جبر تابعی روی X گوییم، هر گاه A به طور قوی نقاط X را جدا کند و $A-$ توپولوژی روی X با توپولوژی X یکی باشد.

تعریف ۱۵.۲.۱ فرض کنید X یک فضای توپولوژیک ناتهی و A یک جبر از توابع روی X باشد. جبر A را یک جبر تابعی باناخ روی X گوییم، هرگاه A یک جبر تابعی روی X و همچنین یک جبر باناخ نسبت به توپولوژی داده شده باشد.

تعریف ۱٦.۲.۱ فرض کنید A یک جبر تابعی باناخ روی Φ_A، E یک زیرمجموعه بسته از Φ_A و $\varphi \in \Phi_A$ باشد. فرض کنید

$$I(E) = \{f \in A \quad ; \quad f(E) \subseteq \{۰\}\}$$

$$J(E) = \{f \in A \quad ; \quad suppf \cap E = \emptyset\}$$

$$M_\varphi = I(\{\varphi\})$$

— A در φ به طور قوی منظم است، هرگاه $J(\{\varphi\})$ در M_φ چگال باشد.

— جبرA به طورقوی منظم است، هرگاه A در هر نقطه از Φ_A به طور قوی منظم باشد.

— E را یک مجموعه دیتکین [۱] نامیم، هرگاه برای هر $f \in I(E)$ داشته باشیم $f \in \overline{fJ(E)}$.

— A را یک جبر دیتکین قوی نامیم، هرگاه هر ایده‌آل ماکزیمال از A یک واحد تقریبی کران دار داشته و A به طور قوی منظم باشد.

تعریف ۱۷.۲.۱ فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. ضرب اول آرنز بر A'' در سه مرحله تعریف می‌شود. برای $a, b \in A$، $f \in A'$ و $F, G \in A''$ عناصر fa و Ff در A' و $F\Box G$ در A'' به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\langle b, fa\rangle = \langle ab, f\rangle,$$

$$\langle a, Ff\rangle = \langle fa, F\rangle,$$

$$\langle f, F\Box G\rangle = \langle Gf, F\rangle.$$

A'' با ضرب اول آرنز یک جبر باناخ است.

---

[۱] $Ditkin$

۳.۱ مدول های باناخ

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنید A یک جبر و E یک فضای برداری باشد.E را یک $A-$ مدول چپ گوییم هرگاه نگاشت $a.x \longrightarrow (a,x)$ از $A \times E$ به E موجود باشد است که در خواص زیر صدق کند :

الف) نگاشت فوق نسبت به هر دو متغیر خطی باشد.

ب) $\forall a,b \in A, \forall x \in E, \quad a.(b.x) = (ab).x$

به طور مشابه $A-$ مدول راست نیز تعریف می شود.

تعریف ۲.۳.۱ یک $A-$ دو مدول یک فضای خطی E است که هم یک $A-$ مدول راست و هم یک $A-$ مدول چپ بوده و نیز

$$\forall a,b \in A, x \in E \quad a.(x.b) = (a.x).b.$$

تعریف ۳.۳.۱ فرض کنید A یک جبر و E یک $A-$ دومدول باشد. اگر به ازای هر $a \in A$ و $x \in E$ داشته باشیم $ax = xa$، آن گاه E را متقارن گوییم.

تعریف ۴.۳.۱ اگر A جابه جایی و E یک $A-$ دومدول متقارن باشد. E را یک $A-$ مدول گوییم.

تعریف ۵.۳.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ و E یک فضای باناخ باشد. E را یک $A-$ مدول چپ باناخ گوییم، هر گاه $k > ۰$ موجود باشد به طوری که

$$\forall a \in A, x \in E \quad ||a.x|| \leq k||a||||x||.$$

به طور مشابه $A-$ مدول راست باناخ و$A-$ دو مدول باناخ تعریف می شود.

تعریف ۶.۳.۱ فرض کنید A یک جبر یکدار با همانی e_A باشد. $A-$ مدول چپ X را یکانی گوییم هر گاه:

$$\forall x \in X \quad e_A.x = x.$$

$A-$ دومدول X را یکانی گوییم هر گاه:

$$\forall x \in X \quad x.e_A = x \quad , \quad e_A.x = x.$$

تعریف ۷.۳.۱ فرض کنید A یک جبر و E و F، $A-$ مدول های چپ باشند. نگاشت $T : E \longrightarrow F$ را یک همریختی $A-$ مدولی چپ نامیم، هر گاه

$$T(a.x) = a.T(x) \quad (a \in A, x \in E).$$

به طور مشابه همریختی $A-$ مدولی راست نیز تعریف می شود.

تعریف ۸.۳.۱ فرض کنید A یک جبر و E و F، $A-$ دومدول باشند. نگاشت $T : E \longrightarrow F$ را یک همریختی $A-$ دومدولی نامیم، هر گاه یک همریختی $A-$ مدولی چپ و یک همریختی $A-$ مدولی راست باشد.

تعریف ۹.۳.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ و E یک $A-$ دو مدول باناخ باشد. اگر $a \in A$ و $\lambda \in E'$، آن گاه E' بااعمال تعریف شده؛

$$\langle x, a.\lambda \rangle = \langle x.a, \lambda \rangle \quad , \quad \langle x, \lambda.a \rangle = \langle a.x, \lambda \rangle$$

یک $A-$ دومدول باناخ است.

در حالت خاص اگر $E = A$، آن گاه A' یک $A-$ دومدول باناخ است که آن را $A-$ دومدول دوگان می نامیم.

نکته ۱۰.۳.۱ اگر A یک جبر باناخ باشد در این صورت A'' یک $A'-$ دو مدول باناخ است .

۴.۱ ضرب های تانسوری

تعریف ۱.۴.۱ فرض کنید X و Y و Z فضاهای نرمدار بر میدان $\mathbb{F}$ باشند. نگاشت $\varphi : X \times Y \longrightarrow Z$ را دو خطی گوییم، هر گاه :

الف) برای هر $y \in Y$، نگاشت $x \longrightarrow \varphi(x, y)$ خطی باشد.

ب) برای هر $x \in X$، نگاشت $y \longrightarrow \varphi(x, y)$ خطی باشد.

تعریف ۲.۴.۱ نگاشت دو خطی φ را کراندار گوییم، هر گاه

$$\exists M > \circ \ \ s.t \ \forall x \in X, \forall y \in Y \quad ; \quad ||\varphi(x, y)|| \leq M||x|| ||y||.$$

نرم φ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$||\varphi|| = \sup\{||\varphi(x, y)|| \quad ; \quad ||x|| \leq ۱, ||y|| \leq ۱\}.$$

نمادگذاری ۳.۴.۱ مجموعه تمام نگاشتهای دو خطی و کراندار از $X \times Y$ به توی Z را با $BL(X, Y; Z)$ نشان می دهیم.

تعریف ۴.۴.۱ فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار بر میدان $\mathbb{F}$ با دوگان های به ترتیب X' و Y' برای $x \in X$ و $y \in Y$ ؛ $x \otimes y$ را به عنوان عضوی از $BL(X', Y'; \mathbb{F})$ با دستور زیر تعریف می کنیم:

$$(x \otimes y)(f, g) = f(x)g(y) \quad (f \in X', g \in Y').$$

ضرب تانسوری از X و Y را با نماد $X \otimes Y$ نشان داده و آن را فضای خطی پدید آمده بوسیله $\{x \otimes y; \quad x \in X, y \in Y\}$ در $BL(X', Y'; \mathbb{F})$ تعریف می کنیم.

نرم تانسور تصویری $X \otimes Y$ را به صورت

$$p(u) = \inf\{\sum_i ||x_i|| ||y_i|| \ ; \quad u = \sum_i x_i \otimes y_i\}.$$

تعریف می کنیم که در آن اینفیموم روی همه نمایش های متناهی u گرفته می شود.

تعریف ۵.۴.۱ کامل شده فضای $X \otimes Y$ نسبت به نرم $p(u)$ را ضرب تانسوری تصویری X و Y نامیده و آن را با نماد $X\hat{\otimes}Y$ نشان می دهیم.

لم ۶.۴.۱ فرض کنید $u \in X \otimes Y$. در این صورت زیرمجموعه های مستقل خطی $\{x_i \; ; \; ۱ \leq i \leq n\}$ و $\{y_i \; ; \; ۱ \leq i \leq n\}$ به ترتیب در X و Y وجود دارند به طوری که $u = \sum_{i=۱}^{n} x_i \otimes y_i$.

برهان: به لم (۳.۴۲) از مرجع [?] رجوع کنید.

لم ۷.۴.۱ فرض کنید $u = \sum_{i=۱}^{n} x_i \otimes y_i = ۰$ و $\{x_i \; ; \; ۱ \leq i \leq n\}$ مستقل خطی باشد. در این صورت برای هر $i = ۱, ۲, \cdots, n$ داریم $y_i = ۰$.

برهان: به لم (۴.۴۲) از مرجع [?] رجوع کنید.

لم ۸.۴.۱ فرض کنید $\{x_i \quad ; \quad ۱ \leq i \leq n\}$ و $\{y_i \quad ; \quad ۱ \leq j \leq m\}$ به ترتیب در X و Y مستقل خطی باشند. در این صورت $\{x_i \otimes y_i \quad ; \quad ۱ \leq i \leq n \; , \; ۱ \leq j \leq m\}$ مستقل خطی است.

برهان: به لم (۵.۴۲) از [?] رجوع کنید.

قضیه ۹.۴.۱ فرض کنید X و Y و Z فضاهای نرمدار و $\varphi : X \times Y \longrightarrow Z$ یک نگاشت دو خطی باشد. در این صورت نگاشت خطی منحصر به فرد $\sigma : X \otimes Y \longrightarrow Z$ موجود است به قسمی که $\sigma(X \otimes Y) = \varphi(X, Y)$.

برهان: به قضیه (۶.۴۲) از مرجع [?] رجوع کنید.

تعریف ۱۰.۴.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. نگاشت ضربی تصویری $\pi_A : A\hat{\otimes}A \longrightarrow A$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$\pi_A(a \otimes b) = ab \qquad (a, b \in A).$$

نرم خارج قسمتی بر $\pi_A(A\hat{\otimes}A) \cong \frac{(A\hat{\otimes}A)}{ker\pi_A}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$|||a|||_\pi = \inf\{\sum_{j=۱}^{\infty} ||a_j||||b_j|| \quad ; \quad a = \sum_{j=۱}^{\infty} a_j b_j \; , \; a \in \pi_A(A\hat{\otimes}A)\}.$$

تعریف ۱۱.۴.۱ فرض کنید $(A, ||.||)$ یک جبر نرمدار و $I_1, \cdots, I_n$ ایده‌آل هایی در A باشند. نرم تصویری روی $I_1 \cdots I_n$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$||a||_\pi = \inf\{\sum_{j=1}^{m} ||a_{1,j}|| \cdots ||a_{n,j}|| \quad ; \quad a = \sum_{j=1}^{m} a_{1,j} \cdots a_{n,j} \ , \ a_{i,j} \in I_i\}.$$

نکته ۱۲.۴.۱ فرض کنید $(A, ||.||)$ یک جبر نرمدار باشد. در این صورت

$$||a|| \leq |||a|||_\pi \leq ||a||_\pi \quad (a \in A^2).$$

برهان: به قضیه ۲۵.۱.۲ از مرجع [?] رجوع کنید.