دانشگاه تفرش

دانشکده ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

قضیه ای از مجزایی با استفاده از آنتروپی توپولوژیک

استاد راهنما :

آقای دکتر علی پارسیان

استاد مشاور :

آقای دکتر احمد رضا ساده

دانشجو:

ناهید فلاح عادلخواه

۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به:

پدر و مادر صبور و مهربانم

ونیز

برادران دوست داشتنی ام که همیشه مشوقم هستند و دوستشان دارم .

تقدیر و تشکر

در بن این بحر بی پایان بســــــی　　　غرقه گشتند و خبر نیست از کسی

در چنین بحری که بحر اعظم است　　　عا لمی ذره است و ذره عالم است

(عطار نیشابوری)

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمودمان کرد وبه همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود وخوشه چینی از علم ومعرفت را روزیمان ساخت . اکنون در آستانه راهی نو به پاس نعمات بی حد پروردگار بر خود لازم می دانم سپاسگزار تمام عزیزانی باشم که در برابر سختی ها و ناملایمات روزگار یاریم نمودند .

مراتب سپاس صمیمانه خود را از استاد بزرگوارم , جناب آقای دکتر علی پارسیان دارم که با سعه صدر و صرف وقت و دقت فراوان نکات اصلاحی ارزشمندی برای پایان نامه ارائه نمودند . از خداوند تبارک و تعالی , سلامتی و توفیقات روز افزون برای ایشان خواهانم .

همچنین از جناب آقای دکتر محمد اکبری که قبول زحمت نمودند و داوری خارجی و جناب آقای دکتر اسماعیل نظری مدیر محترم گروه ریاضی که داوری داخلی پایان نامه را متقبل شدند, تشکر و قدردانی می نمایم .

بر خود واجب می دانم که تشکری ویژه وخاص نمایم از دو بزرگواری که زبانم در بیان فضایلشان قاصر است, سرکار خانم ها دکتر مریم السادات حسینی و دکتر ملیحه دباغیان امیری .

صادقانه می گویم هر آنچه توانسته ام به سر منزل مقصود برسانم از دانش و یاری ایشان بوده است و با قلبی سرشار از عشق ومحبت از پروردگاری که علم محض و نور مطلق است می خواهم که معدن و مخزن علم لدنی اش را بر قلب و زبانشان جاری نماید و هر چه خیر و رحمت و برکت است , نثارشان کند .

ناهید فلاح عادل خواه

مهر ۱۳۸۹

چکیده

پوششی از مجموعه فشرده X با دو مجموعه باز غیر چگال , یک پوشش استاندارد نامیده می شود . در حاصلضرب دکارتی از یک شار (X,T) , زوج های غیر قطری (x,x') به عنوان زوج های آنتروپی تعریف می شوند اگر هر پوشش استاندارد (U,V) از X بطوریکه $(x,x') \in Int(U^c) \times Int(V^c)$ آنتروپی مثبت داشته باشد .

مجموعه چنین زوج هایی به شرطیکه $h(X,T) > ۰$, غیر تهی و $T \times T$ - پایا هستند و بستارشان متعلق به خود آنها یا به قطر می باشد . اگر هر پوشش استاندارد از شار (X,T) آنتروپی مثبت داشته باشد , گویند شار (X,T) آنتروپی مثبت یکنواخت دارد (یا اینکه اگر همه زوج های غیر قطری , زوج آنتروپی باشند) .

از خواص زوج های آنتروپی برای نشان دادن مجزا بودن شار های مینیمال با آنتروپی صفر از شارهایی که آنتروپی مثبت یکنواخت دارند, استفاده می شود .

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

پیشگفتار

زوج (X,T) که X یک فضای متری فشرده و T همسانریختی از X به X است را شار گویند . دو خاصیت مهم که درباره شارها مورد مطالعه قرار می گیرد , یکی آنتروپی توپولوژیک ودیگری مینیمالیتی است . یک شار مینیمال , شاری است که در آن , X زیر مجموعه بسته و غیر تهی محض و پایا ندارد .

آنتروپی توپولوژیک بوسیله آدلر و همکارانش در سال ۱۹۶۵ در [۵] تعریف شد که در فصل دوم مورد مطالعه قرار می دهیم . و در فصل سوم به معرفی شارها می پردازیم که در سال ۱۹۶۷ فرستنبرگ در [۸] , مجزا بودن آنها را تعریف کرد و ثابت نمود شارهای مینیمال از F − شارها مجزا هستند .

هدف پایان نامه فعلی این است که بهتر درک کنیم که چگونه آنتروپی توپولوژیک در الگوی کلی دینامیک توپولوژیک ساخته می شود . اگرچه ما به این هدف از طریق مفهوم مجزا بودن دستگاه ها نزدیک می شویم .

در بخش اول فصل چهارم , نقطه $(x,x') \in X^۲$, $x \neq x'$ را به عنوان زوج آنتروپی برای همسانریخت T معرفی می کنیم بشرطیکه هر پوشش استاندارد (U,V) بطوریکه $(x,x') \in Int(U^c) \times Int(V^c)$ آنتروپی مثبت داشته باشد .

زوج های آنتروپی در هر شاری با آنتروپی مثبت وجود دارند . چنین شارهایی یک پوشش استاندارد با آنتروپی مثبت دارند . (قضیه ۴ – ۱ – ۱۲) و برای هر پوشش باز (U,V) با آنتروپی مثبت , زوج آنتروپی $(x,x') \in U^c \times V^c$ وجود دارد (قضیه ۴ – ۱ – ۱۳) . بستار $E(X,T)$, مجموعه ای از زوج های آنتروپی در $(X \times X,T \times T)$ است که $T \times T$- پایا ست و شامل زوج های آنتروپی و نقاط قطری است (قضیه ۴ – ۲ – ۱) .

فرض کنید ϕ یک نگاشت فاکتور از (X,T) بروی (Y,S) باشد . در اینصورت تصویر معکوس یک زوج آنتروپی شامل یک زوج آنتروپی است و تصویر زوج آنتروپی (x,x') , زوج آنتروپی است اگر $\phi(x) \neq \phi(x')$ قضیه (۴ – ۲ – ۲) و اگر X' یک زیر مجموعه بسته و پایا از X باشد و (x,x') زوج آنتروپی (X',T) باشد آنگاه (x,x') زوج آنتروپی (X,T) نیز خواهد بود (قضیه ۴ – ۲ – ۳) .

همه مطالب گفته شده در بالا در بخش های اول و دوم فصل چهارم به اثبات رسیده است .

و سرانجام در بخش پایانی فصل چهارم قضیه اصلی مان را بیان می کنیم که در آن با استفاده از قضیه (۴ – ۲ – ۲) مجزا بودن شارهای قطری از شارهای مینیمال با آنتروپی صفر را ثابت می کنیم .

فصل اول

مقدمات

در این فصل به بیان تعاریف و قضایایی می پردازیم که در فصل های بعد مورد استفاده قرار می گیرد . و شامل بخش هایی از آنالیز جبر و توپولوژی می باشد .

۱ – ۱ مقدماتی از جبر

تعریف ۱ – ۱ – ۱ : مجموعه M را با عمل دوتایی $*$ نیم گروه نامند اگر M تحت این عمل بسته و شرکت پذیر باشد .

تعریف ۱ – ۱ – ۲ : گروه $(G,*)$ را در نظر بگیرید . اگر G دارای یک توپولوژی باشد بطوریکه دو نگاشت

$$\mu : G \times G \to G \qquad \iota : G \to G$$
$$(x, y) \to x * y \qquad x \to x^{-1}$$

با فرض اینکه روی $G \times G$ توپولوژی حاصلضرب وجود دارد , پیوسته باشند . $(G,*)$ را یک گروه توپولوژیک می نامند .

تعریف ۱ – ۱ – ۳ : فرض کنید r رابطه ای در مجموعه A باشد . r را یک رابطه ترتیبی جزیی در A یا یک ترتیب جزیی در A گوییم در صورتیکه r دارای خاصیت بازتابی , پاد تقارنی و تعدی باشد .
اگر r یک ترتیب جزیی در A باشد , (A, r) را مجموعه مرتب جزیی A با ترتیب جزیی r می گویند .

تعریف ۱ – ۱ – ۴ : فرض کنید (S, t) یک مجموعه مرتب جزیی باشد . رابطه t را در S کلی گویند هرگاه به ازای هر a و b از S , $a\,t\,b$ یا $b\,t\,a$.

تعریف ۱ – ۱ – ۵ : فرض کنید (A, r) یک مجموعه مرتب جزیی باشد و $B \subseteq A$. مجموعه B را یک زنجیر در (A, r) نامند در صورتیکه رابطه القایی r به B , کلی باشد .

تعریف ۱ – ۱ – ۶: فرض کنید (A, r) مجموعه مرتب جزیی باشد و $S \subseteq A$. عضو a از A را یک کران بالای S گویند هرگاه به ازای هر s از S , $s\ r\ a$. عضو m از A را یک عضو ماکسیمال (A, r) نامند در صورتیکه به ازای هر x از A اگر $m\ r\ x$ آنگاه $m = x$.

گزاره ۱ – ۱ – ۷ : (لم زرن) فرض کنید (A, r) یک مجموعه مرتب جزیی باشد . در اینصورت اگر هر زنجیر در (A, r) دارای یک کران بالا باشد آنگاه (A, r) حداقل یک عضو ماکسیمال دارد .
هرگاه r یک ترتیب جزیی در A باشد , آنگاه معمولا به جای $a\ r\ b$ می نویسیم $a \preccurlyeq b$.
برای مطالعه بیشتر در این زمینه [۳] و [۴] پیشنهاد می شوند .

حاصلضرب دکارتی $A_۱ \times A_۲$ دو مجموعه را در نظر می گیریم . هر عنصر $A_۱ \times A_۲$ جفتی است مانند $(a_۱, a_۲)$ با $a_{\mathrm{i}} \in \mathrm{A_i}$, $i = ۱,۲$. لذا جفت $(a_۱, a_۲)$ تابع $f: \{۱,۲\} \to A_۱ \cup A_۲$ با تعریف $f(۱) = a_۱$ و $f(۲) = a_۲$ را معین می کند . به عکس هر تابع $f: \{۱,۲\} \to A_۱ \cup A_۲$ با خاصیت $f(۱) \in A_۱$ و $f(۲) \in A_۲$ عنصر $(a_۱, a_۲) = (f(۱), f(۲))$ از $A_۱ \times A_۲$ را معین می کند . لذا به آسانی می بینیم که تناظر یک به یک ای بین مجموعه تمام توابع از این نوع و مجموعه $A_۱ \times A_۲$ وجود دارد . این ما را به تعمیم مفهوم حاصلضرب دکارتی به صورت زیر هدایت می کند .

تعریف ۱ – ۱ – ۸ : فرض کنیم $\{A_i \ : \ i \in I\}$ خانواده ای از مجموعه ها باشد که بوسیله مجموعه I اندیس گذاری شده اند . حاصلضرب (دکارتی) مجموعه های A_i مجموعه تمام توابع $f: I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ است بطوریکه به ازای هر $i \in I$, $f(i) \in A_i$. این حاصلضرب با $\prod \mathrm{A_i}$ نموده می شود .
حال فرض کنیم $\prod_{i\in I} \mathrm{A_i}$ یک حاصلضرب دکارتی باشد . به ازای هر $k \in I$ نگاشت $\pi_k: \prod_{i\in I} A_i \to \mathrm{A_k}$ را با $f \to f(k)$ تعریف می کنیم . یا با نماد دیگر , $\pi_k: \{a_i\} \to a_{\mathrm{k}}$. تصویر حاصلضرب روی مولفه k ام نام دارد .

۱ – ۲ مقدماتی از آنالیز و توپولوژی

تعریف ۱ – ۲ – ۱ : فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد و $A \subseteq X$. قطر A را با $d(A)$ نشان می دهیم :

$$d(A) = \sup\{\mathrm{d}(\mathrm{a_۱}, \mathrm{a_۲}) \ : \ \mathrm{a_۱}, \mathrm{a_۲} \in \mathrm{A}\}$$

قضیه ۱ – ۲ – ۲ : فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد , $A \subseteq X$ و $p \in X$. آنگاه احکام زیر معادل اند :
الف) p یک نقطه انباشتگی A است .
ب) هر همسایگی p شامل تعدادی نامتناهی نقطه از A است .
پ) دنباله ای مانند $\{x_n\}$ از نقاط A وجود دارد که همواره $x_n \neq \mathrm{p}$ ولی $\lim_{n\to\infty} x_n = p$.

قضیه ۱ – ۲ – ۳ : در فضای متریک (X, d) , اگر X فشرده و $F \subseteq X$ بسته باشد آنگاه F فشرده است .

تعریف ۱ – ۲ – ۴ : می گوییم گردایه $\mathcal{A}$ از زیر مجموعه های X دارای خاصیت اشتراک متناهی است در صورتیکه اشتراک هر زیر گردایه متناهی از آن غیر تهی باشد . به عبارت دیگر هرگاه $\{ A_1, \dots , A_n \}$ یک زیر گردایه متناهی و دلخواه $\mathcal{A}$ باشد آنگاه $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$.

قضیه ۱ – ۲ – ۵ : فرض کنیم X یک فضا باشد . در اینصورت گزاره های زیر دو به دو معادل اند :

(۱) X فشرده است .

(۲) اگر $\{F_i\}_{i\in I}$ خانواده ای از مجموعه های بسته X باشد بطوریکه $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$ آنگاه I زیر مجموعه ای متناهی مانند J دارد که $\bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset$.

(۳) اگر $\{F_i\}_{i\in I}$ خانواده ای از مجموعه های بسته X باشد که دارای خاصیت اشتراک متناهی است , آنگاه $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

قضیه ۱ – ۲ – ۶ : اگر فضای متریک X فشرده باشد , آنگاه هر زیر مجموعه نامتناهی E از X دارای یک نقطه انباشتگی در X است .

قضیه ۱ – ۲ – ۷ : (بیر [1]) فرض کنید X فضای متریک فشرده باشد . چنانچه $\{ U_n \}_{n\in\mathbb{Z}}$ خانواده شمارا از مجموعه های باز و چگال باشد در اینصورت $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} U_n$ در X چگال است .

قضیه ۱ – ۲ – ۸ : (فشردگی دنباله ای) فضای متریک X فشرده است اگر وتنها اگر هر دنباله $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ دارای نقطه همگرایی در X باشد .

قضیه ۱ – ۲ – ۹ : هر فضای متریک , یک فضای هاوسدرف است .

در دو تعریف و قضیه زیر , فرض این خواهد بود که (X, τ) و (Y, υ) دو فضای توپولوژیک دلخواه اند .

تعریف ۱ – ۲ – ۱۰ : فرض کنیم $f: X \to Y$ و $x \in X$. در اینصورت f را در x پیوسته گوییم هرگاه به ازای هر مجموعه باز شامل $f(x)$ مانند V , مجموعه بازی مانند U شامل x وجود داشته باشد بطوریکه $f(U) \subseteq V$.

تعریف ۱ – ۲ – ۱۱ : فرض کنیم $f: X \to Y$ و $A \subseteq X$. در اینصورت f را بر A پیوسته گوییم هرگاه در هر x از A پیوسته باشد . بالاخص در حالت $A = X$ بطور خلاصه خواهیم گفت f پیوسته است .

---
[1] $Bair$

قضیه ۱ – ۲ – ۱۲ : فرض کنیم $f: X \to Y$. در اینصورت f (بر X) پیوسته است اگروتنها اگر به ازای هر مجموعه باز Y مانند V , زیر مجموعه $f^{-1}(V)$ یک زیر مجموعه باز X باشد .

تبصره : قضیه فوق را می توان بصورت زیر نیز بیان کرد :

فرض کنیم (X, τ) و (Y, υ) دو فضای توپولوژیک باشند . تابع $f: X \to Y$ پیوسته است اگروتنها اگر به ازای هر عضو توپولوژی υ مانند V , مجموعه $f^{-1}(V)$ عضو توپولوژی τ باشد .

قضیه ۱ – ۲ – ۱۳ : فرض کنیم X و Y دو فضای دلخواه باشند و $f: X \to Y$ یک تابع باشد در اینصورت گزاره های زیر دو به دو معادل اند :

۱) f پیوسته است .

۲) به ازای هر زیر مجموعه X مانند A , $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

تعریف ۱ – ۲ – ۱۴ : فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد و $Y \subseteq X$. در اینصورت گردایه $\{U \cap Y \ : U \in \tau\}$ یک توپولوژی در Y است . این توپولوژی را توپولوژی القایی τ به Y یا توپولوژی زیر فضایی در Y می نامند و Y را زیر فضای X می خوانند .

دنباله های زیر جمعی

قضیه ۱ – ۲ – ۱۵ : فرض کنید $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد بطوریکه به ازای هر m و n متعلق به $\mathbb{N}$, $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ (یعنی دنباله زیر جمعی باشد) . در اینصورت $\lim_{n\to\infty} a_n/\mathrm{n} = \mathrm{a}$ که $a = \inf\{a_n/\mathrm{n} \ : n \geq ۱\}$.

اثبات : با توجه به زیر جمعی بودن دنباله $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ داریم : $a_n \leq a_۱ + a_{n-۱} \leq \cdots \leq na_۱$ و در نتیجه $a \leq a_۱$ با همین استدلال , به ازای هر $m \in \mathbb{N}$ خواهیم داشت $a_{km} \leq ka_m$. حال ϵ بزرگتر از صفر را در نظر گرفته , $m > ۰$ را چنان اختیار می کنیم که $a_m < m(a+\epsilon)$. هر $n \geq m$ را می توان بصورت $n = km + r$, $۰ \leq r \leq m - ۱$ نمایش داد . بنابراین

و خواهیم داشت

$$\limsup_{n\to\infty} a_n/\mathrm{n} < \limsup_{k\to\infty} \frac{ka_m + \sup_{۱\le r\le m} a_r}{km} = \frac{a_m}{m} \le a + \epsilon \ .$$

به این ترتیب $\lim_{n\to\infty} a_n/\mathrm{n} = \mathrm{a}$. □

فصل دوم

دستگاه های دینامیکی توپولوژیک

در این فصل به معرفی دستگاه های دینامیکی توپولوژیک می پردازیم . و برخی از خواص توپولوژیک آن نظیر ترایایی , کمینگی و تزویج را ارائه می دهیم . و در بخش چهارم با مفهوم آنتروپی توپولوژیک آشنا می شویم و در بخش آخر , دستگاه های دینامیکی نمادین که بخش مهمی از دستگاه های دینامیکی را تشکیل می دهند , را مطرح می کنیم .

۲ – ۱ تعریف دستگاه دینامیکی [۱]

تعریف ۲– ۱ – ۱ : فرض کنید $(G,*)$ یک گروه یا نیم گروه و X یک مجموعه باشد . می گوییم $(G,*)$ روی X عمل می کند هرگاه تابع $\phi : G * X \to X$ به گونه ای موجود باشد که

$$\phi(g, x) = \phi_g(x)$$

۱) تابع ϕ_g که به صورت زیر تعریف می شود

$$\forall \quad g \in G \qquad x \xrightarrow{\phi_g} \phi(g, x)$$

یک تبدیل از X باشد . (یعنی $\phi_g : X \to X$)

۲) برای هر $g, h \in G$ و هر $x \in X$ داشته باشیم

$$\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(g * h, x)$$

در این صورت $(G,*)$ را گروه یا نیم گروه عمل کننده روی X می نامند .

تعریف ۲ – ۱ – ۲ : فرض کنید G گروه یا نیم گروه عمل کننده روی مجموعه X باشد , در اینصورت زوج $(X, \{\phi_g\}_{g \in G})$ را دستگاه دینامیکی گویند .

[۱] $dynamical\ system$

در تعریف فوق اگر G گروه یا نیم گروه توپولوژیک عمل کننده روی فضای توپولوژیک X باشد , آنگاه زوج $(X, \{\phi_g\}_{g\in G})$ را دستگاه دینامیکی توپولوژیک می نامند .

آنچه در این پایان نامه مورد مطالعه قرار می دهیم , عمل گروه $\mathbb{Z}$ روی فضای متری فشرده X و یا به عبارت دیگر تبدیل $T: X \to X$ و ترکیب های آن , T^n $(n \in \mathbb{Z})$ می باشد .

در اینصورت واضح است که $\phi : \mathbb{Z} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ و برای هر $n \in \mathbb{Z}$, $\phi_n = T^n = ToTo \dots oT \ (n \text{مرتبه})$.

$$\phi(n, x) = T^n(x)$$

بنابراین بصورت خلاصه زوج (X, T) را دستگاه دینامیکی توپولوژیک[۲] می نامیم که X فضای متری فشرده و T نگاشتی پیوسته یا همسانریخت است .

۲ – ۲ ترایایی [۳]

در این بخش به معرفی برخی ویژگی های اساسی نگاشت پیوسته یا همسانریخت $T: X \to X$ روی فضای متری فشرده X می پردازیم .

تعریف ۲ – ۲ – ۱ : فرض کنید X فضای متری فشرده و $T: X \to X$ نگاشتی پیوسته باشد . زیر مجموعه Z از X تحت نگاشت T پایا نامیده می شود هرگاه $T(Z) \subseteq Z$.

لم ۲ – ۲ – ۲ : فرض کنید زیر مجموعه Z از X تحت نگاشت T پایا باشد . در اینصورت $\overline{Z}$ نیز پایاست زیرا

$$T(\overline{Z}) \subseteq \overline{T(Z)} \subseteq \overline{Z} \quad \Rightarrow \quad T(\overline{Z}) \subseteq \overline{Z}$$

تعریف ۲ – ۲– ۳ : برای $x \in X$ به مجموعه

$$\{ T^n x : n \in \mathbb{Z} \} = \{\dots, T^{-2}x, T^{-1}x, x, Tx, T^2x, \dots\}$$

---

[۲] *Topological dynamical system*

[۳] *Transitivity*

مدار[۴] x تحت T نامیده و با $O(x)$ نشان می دهیم .

تعریف ۲ - ۲ - ۴ : همسانریختی $T: X \to X$ از فضای متری فشرده X (یا دستگاه (X, T)) را ترایا [۵] نامیم , اگر نقطه ای مانند $x \in X$ چنان موجود باشد که مدار آن در X چگال باشد $(\overline{o}\,(x) = X)$. نقطه x را نقطه ترایایی یا تراگذر ی می نامیم .

تعریف ۲ - ۲- ۵ : نگاشت پیوسته $T: X \to X$ از فضای متری فشرده X را ترایای پیشرو[۶] می نامیم اگر نقطه ای مانند $x \in X$ موجود باشد که مدار آن $\{ T^n x : n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{۰\} \} = \{x, Tx, T^۲x, \dots\}$ در X چگال باشد . چنین نقطه ای را نقطه ترایایی پیشرو می نامیم .

مثال ۲ – ۲ - ۶ : فرض کنید $X = \{ -۱,۱ \}$ و $T(x) = -x$ در اینصورت هر $x \in X$ یک نقطه ترایایی است . زیرا

$$O(۱) = \{ T^n(۱) : n \in \mathbb{Z} \} = \{\dots, T^{-۲}(۱), T^{-۱}(۱), ۱, T(۱), T^۲(۱), \dots\} = \{ -۱,۱ \}$$

مثال ۲ – ۲ - ۷ : فرض کنید $X = \{ (-۱,-۱), (-۱,۱), (۱,-۱), (۱,۱) \}$ و $T(x,y) = (-y, x)$ در اینصورت هر $(x,y) \in X$ یک نقطه ترایایی است . زیرا

$$O(۱,۱) = \{ T^n(۱,۱) : n \in \mathbb{Z} \} = \{ (-۱,-۱), (-۱,۱), (۱,-۱), (۱,۱) \} = X$$

مثال ۲ – ۲ - ۸ : فرض کنید $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. نگاشت پیوسته $T: X \to X$ را با ضابطه $T(x) = ۲\,x \ (mod ۱)$ تعریف می کنیم . یعنی

$$T(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

حال نشان می دهیم که نگاشت فوق ترایای پیشرو است . ابتدا دنباله ...۲۲۲۱۱۱۱...۲۲۲۲۱ ۱۲۱۱۱۲۲۱۲۲۱۱۱۱۲۱ متشکل از کلیه بلوک های یک تایی ۱ و۲ , دوتایی ۱۱ , ۱۲ , ۲۱ , ۲۲ , سه تایی ۱۱۱, ۱۱۲, ... را در نظر می گیریم و جمله n ام آن را

---

[۴] *Orbit*
[۵] *Transitive*
[۶] *Forward transitive*

با x_n نشان می دهیم که $x_n \in \{1 , 2\}$. حال نقطه $x \in [۰,۱)$ را با بسط $x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x_n - ۱}{۲^{n+۱}}$ در نظر گرفته ادعا می کنیم که x یک نقطه ترایایی می باشد . واضح است که

$$\begin{aligned} Tx &= ۲ \left(\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x_n - ۱}{۲^{n+۱}} \right) \quad (mod ۱) \\ &= \left(x_۰ - ۱ + \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x_{n+۱} - ۱}{۲^{n+۱}} \right) \quad (mod ۱) \\ &= \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x_{n+۱} - ۱}{۲^{n+۱}} \end{aligned}$$

بطور مشابه $T^k x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x_{n+k} - ۱}{۲^{n+۱}}$.

برای آنکه نشان دهیم مجموعه $\{ T^n x : n \geq ۰ \}$ در $[۰,۱)$ چگال است , کافیست نشان دهیم که برای هر $l \in \mathbb{N}$ و هر بازه به فرم $[\frac{p}{۲^l}, \frac{p+۱}{۲^l}]$ که $۰ \leq p \leq ۲^l - ۱$ می توان $N \geq ۰$ را چنان یافت که $T^N x \in [\frac{p}{۲^l}, \frac{p+۱}{۲^l}]$. برای این منظور , ابتدا p را با نمایش دودویی $i_۰ i_۱ \dots i_{l-۱}$ آن در نظر می گیریم که $i_۰ i_۱ \dots i_{l-۱} \in \{۰ , ۱\}$. حال عدد طبیعی N را چنان می یابیم که

$x_N = i_۰ + ۱ , x_{N+۱} = i_۱ + ۱ , \dots , x_{N+l-۱} = i_{l-۱} + ۱$ یعنی $T^N x \in [\frac{p}{۲^l}, \frac{p+۱}{۲^l}]$. زیرا

$$\frac{p}{۲^l} = \frac{i_{l-۱} \times ۲^۰ + i_{l-۲} \times ۲^۱ + \dots + i_۱ \times ۲^{l-۲} + i_۰ \times ۲^{l-۱}}{۲^l} = \sum_{n=۰}^{l-۱} \frac{i_n}{۲^{n+۱}} = \sum_{n=۰}^{l-۱} \frac{x_{n+N} - ۱}{۲^{n+۱}}$$

و

$$T^N x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x_{n+N} - ۱}{۲^{n+۱}} > \sum_{n=۰}^{l-۱} \frac{x_{n+N} - ۱}{۲^{n+۱}} = \frac{P}{۲^l}$$

مثال ۲ – ۲ – ۹ : فضای $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ و ثابت $\alpha \in [۰,۱)$ را در نظر بگیرید . همسانریخت $T: X \to X$ را با ضابطه $T(x) = x + \alpha \ (mod ۱)$ تعریف می کنیم . در مورد ترایایی نگاشت مذکور دو حالت مختلف , بسته به اینکه α گویا یا گنگ باشد اتفاق می افتد .

اثبات : ابتدا فرض می کنیم که α گویا نیست . در این حالت می توان نشان داد $T: X \to X$ ترایا می باشد و $x = ۰$ نقطه ترایایی آن است . برای این منظور باید نشان دهیم $\{ T^n ۰ \}_{n \in \mathbb{Z}}$ چگال است . با توجه به اینکه این مجموعه نامتناهی و $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ فشرده است , می توانیم $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ و زیر دنباله $T^{n_i} ۰$ را چنان بیابیم که $T^{n_i} ۰ = n_i \alpha \ (mod ۱) \to x$.

به ازای هر $\epsilon > ۰$ به دلخواه کوچک $n_i > n_j$ را طوری در نظر می گیریم که $|T^{n_i} ۰ - x| < \frac{\epsilon}{۲}$ و $|T^{n_j} ۰ - x| < \frac{\epsilon}{۲}$. بنابراین $|T^{n_i} ۰ - T^{n_j} ۰| = |T^{n_i - n_j} ۰| < \epsilon$. به علاوه , $T^{n_i} ۰ \neq T^{n_j} ۰$ چرا که در غیر

اینصورت متناقص با غیر گویا بودن α خواهد بود . پس نقاط $T^{(n_i-n_j)k}\cdot$, $k \in \mathbb{Z}$ هر بازه بطول ϵ را قطع می کنند . می توان ϵ را به اندازه کافی کوچک اختیار کرد و به این ترتیب T تراپاست .

حال فرض کنید $\alpha = \frac{p}{q}$ بطوریکه $q \neq ۰$ و $p, q \in \mathbb{Z}$ نسبت بهم اول اند . به ازای هر نقطه مانند $x \in X$ مدار $\{ T^n x \}_{n \in \mathbb{Z}}$ یک مجموعه متناهی بصورت $\{ x, x + \frac{p}{q} \ (mod ۱), \dots, x + \frac{p(q-۱)}{q} \ (mod ۱) \}$ می باشد . در نتیجه نگاشت T نمی تواند ترایا باشد . □

۲ – ۳ مشخصه های دیگری از ترایایی

قضیه زیر شرایط هم ارزی را برای ترایایی یک همسانریختی روی یک فضای متری فشرده بیان می کند .

قضیه ۲ – ۳ – ۱ : گزاره های زیر هم ارزند .

۱) نگاشت $T: X \to X$ ترایاست .

۲) اگر U یک مجموعه باز و $T, T^{-۱}$ - پایا ($TU = U$) باشد, آنگاه U در X چگال است و یا $U = \emptyset$.

۳) اگر U و V دو زیر مجموعه باز و ناتهی از X باشند آنگاه برای بعضی مقادیر $n \in \mathbb{Z}$ خواهیم داشت $T^n U \cap V \neq \emptyset$

۴) مجموعه نقاط ترایایی $Y = \{ x \in X \ : \ \overline{\{T^n x\}}_{(n \in \mathbb{Z})} = X \}$ را می توان بصورت اشتراک شمارا از مجموعه های باز و چگال در X نشان داد . اصطلاحا Y را یک مجموعه چگال G_δ می نامند .

اثبات : (۲) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنید x دارای مدار چگال در X باشد . همچنین فرض کنید $TU = U \neq \emptyset$. چون U باز است , عدد صحیح n چنان موجود است که $T^n x \in U$ یا $x \in T^{-n} U$. بعلاوه به ازای هر $m \in \mathbb{Z}$ خواهیم داشت $T^m(x) \in T^{m-n}(U) = U$ و چون x دارای یک مدار چگال است (یعنی $\overline{(\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} T^m x)} = X$) نتیجه می گیریم که U نیز چگال است .

(۳) $\Leftarrow$ (۲) فرض کنید U و V مجموعه های باز و غیر تهی باشند . طبق (۲) مجموعه $T, T^{-۱}$ - پایای $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n U$ در X چگال است . بنابراین $(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n U) \cap V \neq \emptyset$ و در نتیجه وجود دارد $N \in \mathbb{Z}$ بطوریکه $T^N U \cap V \neq \emptyset$.

(۴) $\Leftarrow$ (۳) مجموعه چگال $\{ x_n \ : \ n \in \mathbb{Z} \}$ ونیز گوی هایی با شعاع $\frac{۱}{k}$, $k > ۱$ را که بصورت $B(x_n, \frac{۱}{k})$ نمایش داده می شوند را در نظر بگیرید . تساوی زیر حکم را نتیجه می دهد :

$$\{ x \in X \ : \ \overline{\{T^m x\}}_{(m \in \mathbb{Z})} = X \} = \bigcap_{n=۱}^{\infty} \bigcap_{k=۱}^{\infty} \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} T^m B(x_n, \tfrac{۱}{k})$$

(یعنی اگر $\overline{\{T^m x\}}_{(m \in \mathbb{Z})} = X$ آنگاه $\forall n \geq ۰, \forall k \geq ۱ \ \exists m \in \mathbb{Z} \ : \ T^m x \in B\left(x_n, \frac{۱}{k} \right)$)

(۱) $\Rightarrow$ (۴) اثبات این قسمت از مطالب بالا نتیجه می شود . □

۲ - ۴ کمینگی [۷]

تعریف ۲ - ۴ - ۱ : دستگاه (X,T) کمینه[۸] است اگر هر $x \in X$ دارای مدار چگال در X باشد .

قضیه ۲ - ۴ - ۲ : هر دستگاه کمینه لزوما تراپاست .

اثبات : از تعاریف دستگاه های ترایا و کمینه واضح است . □

مثال ۲ - ۴ - ۳ : اگر α غیر گویا باشد آنگاه $T(x) = x + \alpha \ (mod ۱)$ کمینه است .

اثبات : کافی است نشان دهیم که برای هر $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ و هر همسایگی مانند $(y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \epsilon > ۰), (y-\epsilon, y+\epsilon)$ عدد طبیعی n چنان یافت می شود که $T^n(x) \ \in (y-\epsilon, y+\epsilon)$.

می دانیم که T تراپاست , یعنی دارای حداقل یک نقطه ترایایی مانند $x_۰$ می باشد . نقطه $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ را انتخاب و آن را ثابت در نظر می گیریم . با توجه به ترایایی $x_۰$, زیر دنباله ای مانند n_i چنان موجود است که $T^{n_i}x_۰ \to \ y - x + x_۰ \ (mod ۱)$. پس

$$\begin{aligned} T^{n_i}x &= n_i\alpha + x \qquad (mod ۱) \\ &= n_i\alpha + x_۰ + (x - x_۰) \qquad (mod ۱) \\ &= T^{n_i}(x_۰) + \ (x - x_۰) \qquad (mod ۱) \\ &\to y + (x_۰ - x) + \ (x - x_۰) = y \qquad (mod ۱) \end{aligned}$$

قضیه زیر چند گزاره هم ارز با تعریف کمینه بیان می کند .

---
[۷] $Minimality$
[۸] $Minimal$

قضیه ۲ - ۴ - ۴ : فرض کنید $T: X \to X$ یک همسانریختی روی فضای متری فشرده X باشد . گزاره های زیر معادل یکدیگرند

۱) T کمینه است .
۲) اگر E یک مجموعه بسته و $T(E) = E$ باشد , آنگاه $E = \emptyset$ یا $E = X$.
۳) اگر $U \neq \emptyset$ یک مجموعه باز باشد در اینصورت $X = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} T^n U$.

اثبات : (۲) $\Longrightarrow$ (۱) فرض کنید E بسته و $T(E) = E \neq \emptyset$ و فرض کنید $x \in E$. با توجه به فرض (۱) نتیجه می شود که $X = \overline{\{ T^n x\}_{(n\in\mathbb{Z})}} \subset E \subset X$.

(۳) $\Longrightarrow$ (۲) اگر U یک مجموعه غیر تهی باز باشد آنگاه $E = X - \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} T^n U\right)$ بسته و پایاست . چون $E \neq X$ پس خواهیم داشت $E = \emptyset$, بنابراین $X = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} T^n U$.

(۱) $\Longrightarrow$ (۳) نقطه $x \in X$ و زیر مجموعه غیر تهی باز U از X را در نظر بگیرید . چون به ازای بعضی مقادیر $n \in \mathbb{Z}$ داریم $x \in T^n U$ (طبق فرض (۳)) . در نتیجه $T^{-n} x \in U$. این نشان می دهد که $\{ T^n x\}_{(n\in\mathbb{Z})}$ در X چگال است.

قضیه بعد این نکته جالب را بیان می کند که هر همسانریختی شامل یک همسانریختی کمینه است . یا به عبارت دیگر هر دستگاه , یک زیر دستگاه کمینه دارد . □

قضیه ۲ - ۴ - ۵ : اگر $T: X \to X$ یک همسانریختی روی فضای متری فشرده X باشد آنگاه یک مجموعه بسته غیر تهی مانند $Y \subset X$ موجود است که $TY = Y$ و $T: Y \to Y$ کمینه است .

اثبات : این قضیه با کاربردی از لم زرن به اثبات می رسد .

فرض کنید $\varepsilon = \{ Z \subseteq X \ : \ TZ = Z$ زیر مجموعه ای بسته و غیر تهی است $Z \}$ خا نواده تمام زیر مجموعه های T^{-1}, T - پایا , بسته و غیر تهی X باشد . این خانواده غیر تهی است زیرا شامل X می باشد . روی ε رابطه ترتیب جزیی را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$Z_1 \preccurlyeq Z_2 \iff Z_1 \subseteq Z_2$$

رابطه فوق یک ترتیب جزیی روی ε می باشد . فرض کنیم $\{ Z_\alpha \ : \ \alpha \in I \}$ زنجیری از عناصر ε باشد در اینصورت

$Z = \bigcap_\alpha Z_\alpha$ یک زیر مجموعه بسته و پایا از عناصر X می باشد . ($T Z =$ زیرا $T\left(\bigcap_\alpha Z_\alpha\right) = \bigcap_\alpha T Z_\alpha = \bigcap_\alpha Z_\alpha = Z$) لذا عنصری از ε می باشد . واضح است که $Z = \bigcap_\alpha Z_\alpha$ یک کران پایین برای زنجیر $\{ Z_\alpha \ : \ \alpha \in I \}$ می باشد . که با توجه به فشردگی X غیر تهی است پس بنا به لم زرن یک عنصر کمینه مانند $Y \subset X$ وجود دارد .

(یعنی اگر $Y' \in \varepsilon$, $Y \in \varepsilon$ و $Y' \leq Y$ آنگاه $Y = Y'$) با توجه به بند (۲) از قضیه (۲ – ۴ – ۴) نتیجه می گیریم که $T: Y \to Y$ کمینه است . □

۲ – ۵ آنتروپی توپولوژیک [۹]

آنتروپی کمیتی است که در نظریه احتمال , دشواری حدس و در دستگاه های دینامیکی , پیچیدگی دستگاه را اندازه گیری می کند .

آنتروپی احتمال در نظریه دستگاه های دینامیکی اولین بار توسط شانون پایه گذاری شد و در سال ۱۹۵۸ توسط کولموگرف پیشرفت های زیادی نمود وی با استفاده از کارهای شانون نشان داد که چگونه می توان با استفاده از آنتروپی , غیر مزدوج بودن دو دستگاه را مشخص کرد و کارهای او الهام بخش تحقیقات جدیدی در این زمینه بود .

مفهوم آنتروپی توپولوژیک برای توابع پیوسته از یک فضا به خودش در سال ۱۹۶۵ توسط آدلر , کانیم و اندرو در [۵] ارائه شد و امروزه نیز مطالعه در این زمینه همچنان ادامه دارد .

شاخصه مشترک اصلی بین آنتروپی شناخته شده در فیزیک و آنچه که شانون ارائه داد وآنتروپی توپولوژیک , آن است که همه آنها عددی هستند که پیچیدگی دستگاه یا آنچه که فیزیکدانها علاقه مندند یعنی بی نظمی دستگاه را ارائه می دهند .

در پایان نامه حاضر آنتروپی روی فضای توپولوژیک مورد بررسی قرار می گیرد .

در این بخش به معرفی آنتروپی توپولوژیک به عنوان یک کمیت عددی می پردازیم که پارامتر مهمی در بررسی دینامیک توابع است . این کمیت , تحت رابطه تزویج توابع , پایا بوده و نقشی اساسی در رده بندی توابع پیوسته ایفا می کند .

تعریف ۲ – ۵ – ۱ : فرض کنید $\alpha = \{ A_i \}_{i \in I}$ پوشش بازی برای فضای متری فشرده X باشد . در اینصورت قطر یک پوشش باز بصورت زیر تعریف می شود

$$diam\,(\alpha) = \sup\{\, diam\,(A_i) \;\; : \;\; A_i \in \alpha \,\}$$

مثال ۲ – ۵ – ۲ : فرض کنید $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ و $\alpha = \{ \left[۰, \frac{۱}{۲} \right) , \left(\frac{۱}{۲} , \frac{۳}{۴} \right) , \left(\frac{۱}{۴} , \frac{۳}{۴} \right) , \left(\frac{۱}{۴} , ۱ \right) \}$ پوشش بازی برای X باشد . در اینصورت داریم

[۹] $Topological\ entropy$