بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

طبقه بندی ابررویه های حقیقی از نوع A در فضا فرم مختلط

استاد راهنما
دکتر اسمعیل عابدی

استاد مشاور
دکتر قربانعلی حقیقت دوست بناب

پژوهشگر
سیده فاطمه امام پناه

دی ۹۱

تبریز - ایران

تقدیم به

مادر مهربانم

پدر بزرگوارم

و برادر عزیزم

سپاسگزاری

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و درود بر محمّد و خاندان پاك او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است.

از آنجایی که تجلیل از استادراهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر اسمعیل عابدی سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب " من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّه عزّ و جلّ" تشکر می نمایم.

همچنین پس از پیمودن راههای فراوان و دغدغه های زیاد و شیطنتهای زیبای آن دوران، نگاه های پدرو مادرم، با چشم های پر از برق شوق، و زیبایی حضور برادرم در کنارم، که خستگی های این راه را به امید و روشنی راه تبدیل کرده تشکر می کنم.امیدوارم بتوانم در آینده ی نزدیک جوابگوی این همه محبت آنها باشم وقادر به درک زیبایی های وجودشان بشوم.

از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر قربانعلی حقیقت دوست زحمت مشاوره این رساله را بر عهده گرفت تشکر نمایم.

تشکر و سپاس از جناب دکتر علی حاج بدلی که زحمت نظارت و داوری این پایان‌نامه را تقبل فرموده‌اند.

همچنین از سرکارخانم زهرا نظری به دلیل یاری ها و راهنمایی های بی چشمداشت ایشان که بسیاری از سختیها را برایم آسانتر نمودند تشکر کنم.

سیده فاطمه امام پناه

دی ۱۳۹۱

فهرست مطالب

چکیده

فرض می کنیم Mیک ابررویه حقیقی باساختارتقریبا کنتاکت (ϕ, g, ξ, η) روی فضافرم مختلط $\overline{M}(c)$ که $c \neq 0$ باشد. دراین پایان نامه ثابت می کنیم اگر رابطه $R_\xi L_\xi g = 0$ روی M برقرار باشد.آنگاهM یک ابررویه هاف در $\overline{M}(c)$ است. که R_ξو L_ξ دررابطه فوق به ترتیب بیانگر عملگر ژاکوبی و مشتق لی نسبت به میدان برداری ساختاری ξ است.
همچنین دراین پایان نامه ابررویه های هاف روی $\overline{M}(c)$ را طبقه بندی می کنیم.

کلید واژه‌ها: ابررویه حقیقی ، عملگرژاکوبی ساختاری، ابررویه هاف.

پیشگفتار

ابررویه های حقیقی به ۶مدل فضاهایی که$A_۱, A_۲, B, C, D, E$ نامیده می شوندبه طور کامل توسط [۱۰]$Takagi$طبقه بندی شده است.

ازطرف دیگر ابررویه های حقیقی در $H^n(\mathbb{C})$توسط [۱]$Berndt$و [۱۱] $Montiel\ and\ Romero$ طبقه بندی شده است.

[۱]$Berndt$همه ابررویه های همگن هاف در $H^n(\mathbb{C})$به ۴ مدل فضاهایی که $A_۰, A_۱, A_۲, B$نامیده می شوند طبقه بندی کرده است.

همچنین مطالعاتی روی ابررویه های حقیقی ازنوع A روی $\overline{M}(c)$ باشرایط مختلف باعملگر ژاکوبی ساختاری R_ξانجام شده است که در منابع [۱۱] ,[۹] ,[۶] ,[۲]می توان مشاهده کرد.

این پایان نامه براساس مقاله $Characterizations\ of\ real\ hypersurfaces\ oftype\ A\ in$ $a\ complex\ space\ form$ [۱۳]تنظیم شده است.

درفصل اول که تعاریف و مفاهیم اولیه نامگذاری شده است به ۳ بخش مفاهیم اولیه ، خمینه های ریمانی ،خمینه های مختلط و ساختار تقریبا مختلط طبقه بندی شده است .۲ بخش ابتدایی شامل تعاریف وقضایای مقدماتی است ولی بخش سوم مباحث خمینه‌های مختلط، تقریباً مختلط، تقریباً هرمیتی، هرمیتی، کاهلری، تقریباً کنتاکت، متری تقریباً کنتاکت، متری کنتاکت به طور کامل مطرح شده است.

در فصل دوم که فضای زمینه فضا فرم مختلط است مفهوم های خمیدگی برشی هولومورفیک، متریک $Fubini-study$ ،ابررویه هاف، میدان برداری ساختاری بیان می شود.

در فصل سوم که فصل پرحجمی از لحاظ اثبات روابط کاربردی گرادیان در جهت های α, β, γ که در مقاله آمده است همچنین روابط اساسی دیگر روی فضا فرم مختلط به طور کامل بیان واثبات شده است این روابط در فصل بعدی گره گشای لم ها و قضایا هستند.

در فصل چهارم در بخش اول بیان و اثبات ۵ لم اساسی مطرح شده است. همچنین در بخش دوم این فصل قضیه ای بدون اثبات به نام [۱۱] ,[۶] $O-MR$ بیان شده است، که ابررویه های حقیقی را با احتساب شرایطی طبقه بندی می کند درادامه ۲ قضیه بااثبات آمده است که فرض قضیه $O-MR$ را برقرار می کنند.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

مقدمه

دراین فصل که تعاریف و مفاهیم اولیه نامگذاری شده است به ۳ بخش مفاهیم اولیه ، خمینه های ریمانی ،خمینه های مختلط و ساختار تقریبا مختلط طبقه بندی شده است .۲ بخش ابتدایی شامل تعاریف وقضایای مقدماتی و خمینه های ریمانی است اما بخش سوم مباحث خمینه‌های مختلط، تقریباً مختلط، تقریباً هرمیتی، هرمیتی، کاهلری،کوشی-ریمان،کنتاکت، تقریباً کنتاکت، متری تقریباً کنتاکت، متری کنتاکت به طور کامل بیان شده است. همچنین دراین فصل مشاهده خواهیم کرد که خمینه‌های کنتاکت مشابه خمینه‌های مختلط هستند با این تفاوت که خمینه‌های مختلط با بعد زوج و خمینه‌های کنتاکت با بعد فرد می‌باشند.

۱.۱ مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱. فرض کنید p نقطه ای از خمینه M باشدیک بردار مماس روي M در p عبارتست از تابع حقیقی مقدار $V : C^{\infty}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ بطوریکه به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ و $f, g \in C^{\infty}(M)$ دارای شرایط زیر باشد:

۱- R - خطی باشد $\quad V(af + bg) = aV(f) + bV(g)$

۲- لایبنیتزی باشد $\quad V(fg) = V(f)g(p) + f(p)V(g)$

تبصره ۱.۱. *در هر نقطه p از M مجموعه همه بردارهای مماس روی M در p را با $T_p(M)$ نمایش می دهیم.*

تعریف ۲.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ هموار، TM کلاف مماس آن و $\pi : TM \longrightarrow M$ نگاشت تصویر کلاف مماس باشد.مقصود از یک میدان برداری C^{∞} روی M، نگاشت C^{∞} مانند

$X : M \longrightarrow TM$ می‌باشد به طوریکه $\pi \circ X = id_M$. بنابراین X به هر نقطه $x \in M$، عضو X_x از T_xM را نسبت می‌دهد.

تعریف ۳.۱. خمینهP زیرخمینه ای از یک خمینه Mاست هرگاه

۱- P زیرفضای توپولوژیکی ازM باشد

۲- نگاشت شمول $j : P \subseteq M$ هموارباشدودرهرنقطه $p \in P$ نگاشت مشتق dj یک به یک باشد.

تعریف ۴.۱. یک غوطه وری $\phi : M \longrightarrow N$عبارتست از یک نگاشت هموار بطوریکه به ازای هر $p \in P$ ، $d\phi_p$ یک به یک باشد.

تعریف ۵.۱. نگاشت $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک فرم دو خطی متقارن روی فضای برداری V گوییم هر گاه $\mathbb{R}$-دو خطی باشد و به ازای هر $v, w \in V$ داشته باشیم $b(v, w) = b(w, v)$.

تعریف ۶.۱. یک ضرب اسکالر g روی فضای برداری V عبارتست از یک فرم دو خطی متقارن مثبت معین.

تعریف ۷.۱. فرض کنید $V_۱, \ldots, V_s, W$ مدول‌هایی روی حلقهٔ K باشند در این صورت $V_۱ \times \ldots \times V_s$ نیز یک مدول روی حلقهٔ K خواهد بود. $A : V_۱ \times \ldots \times V_s \longrightarrow W$ را چند خطی گوییم هر گاه نسبت به تمام متغیرها خطی باشد یعنی

$$A(v_۱, \ldots, \lambda v_i + \mu v_i, v_{i+۱}, \ldots, v_s) = \lambda A(v_۱, \ldots, v_i, \ldots, v_s) + \mu A(v_۱, \ldots, v_i, \ldots, v_s)$$

که $\lambda, \mu \in K$ برای $۱ \leq i \leq s$.

تعریف ۸.۱. به ازای اعداد صحیح $r \geqslant ۰$ و $s \geqslant ۰$ که هر دو همزمان صفر نیستند، تابع چند خطی $A : (V^*)^r \times V^s \longrightarrow K$ را یک تانسور از نوع (r, s) روی V گوییم و با نماد $T_s^r(V)$ نمایش می‌دهیم. تانسور از نوع $(۰, ۰)$ را یک عنصر از حلقهٔ K می‌گیریم. یک میدان تانسوری A روی خمینهٔ M عبارتست از یک تانسور روی $F(M)$-مدول $\chi(M)$.

تعریف ۹.۱. فرض کنید V یک K-مدول باشد در این صورت V^* که مجموعهٔ همهٔ توابع K-خطی از V به K می باشد، با عمل جمع توابع و ضرب توسط عناصر حلقهٔ K به یک K-مدول تبدیل می‌شود، که مدول دوگان V نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ هموار باشد. نگاشت $\nabla : \chi(M)\times\chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ را یک التصاق خطی گوییم هر گاه:

۱- $\nabla_V W$ نسبت به V، $F(M)$-خطی باشد:

$$\nabla_{fX_1+gX_2}Y = f\nabla_{X_1}Y + g\nabla_{X_2}Y \qquad \forall\, f,g \in F(M)$$

۲- $\nabla_V W$ نسبت به W، $\mathbb{R}$-خطی باشد:

$$\nabla_X aY_1 + bY_1 = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2 \qquad \forall\, a,b \in \mathbb{R}$$

۳- در قاعدهٔ ضرب صدق کند:

$$\nabla_V(fW) = (Vf)W + f\nabla_V W \qquad\qquad \forall\, f \in F(M)$$

$\nabla_V W$ را مشتق کواریان W در امتداد V نسبت به التصاق ∇ گوییم.

تعریف ۱۱.۱. مشتق تانسوری D روی خمینه هموار M عبارتست از مجموعه ای از نگاشتهای $R-$ خطی

$$D = D^r_s : T^r_s\,(M\,)\longrightarrow T^r_s\,(M\,) \qquad (r,s \geq 0\,)$$

بطوریکه براي تانسورهاي A و B داریم:

۱- $D\,(A\,)= DA \otimes B + A \otimes DB$

۲- $D\,(CA\,)= C\,(DA\,)$ برای هر انقباض C

لم ۱.۱. [۸] *فرض کنید ∇ یک مشتق تانسوری روی M باشد. اگر $A \in T^r_s(M)$ آنگاه داریم:*

$$\begin{aligned}\nabla(A(\theta^1,\cdots,\theta^r,X_1,\cdots,X_s)) &= (\nabla A)(\theta^1,\cdots,\theta^r,X_1,\cdots,X_s)\\ &+\sum_{i=1}^{r} A(\theta^1,\cdots,\nabla\theta^i,\cdots,\theta^r,X_1,\cdots,X_s)\\ &+\sum_{j=1}^{s} A(\theta^1,\cdots,\theta^r,X_1,\cdots,\nabla X_j,\cdots,X_s)\end{aligned}$$

که این رابطه را قاعدهٔ ضرب می‌نامیم.

تعریف ۱.۱۲. مشتق کواریان (r,s) تانسور A روی خمینهٔ هموار M ، عبارتست از $(r,s+1)$ تانسور ∇A به طوریکه به ازای هر $V, X_i \in \chi(M)$ و $\theta^j \in \chi^*(M)$ داشته باشیم:

$$(\nabla A)(\theta^1,\cdots,\theta^r,X_1,\cdots,X_s,V) = (\nabla_V A)(\theta^1,\cdots,\theta^r,X_1,\cdots,X_s)$$

در حالتی که $r = s = 0$ مشتق کواریان تابع f همان دیفرانسیل معمولی‌اش می‌باشد زیرا

$$(\nabla f)(V) = \nabla_V f = Vf = df(V) \qquad \forall\, V \in \chi(M).$$

۱.۲ خمینه های ریمانی

تعریف ۱.۱۳. فرض کنید M یک خمینهٔ هموار باشد. یک متر ریمانی روی M عبارتست از یک $(0,2)$ میدان تانسوری متقارن که در هر نقطه مثبت معین است. یک خمینهٔ هموار همراه با یک متر ریمانی را یک خمینهٔ ریمانی گوییم.

تعریف ۱.۱۴. روی خمینهٔ ریمانی M یک التصاق منحصربفرد ∇ چنان موجود است که

۱- $T(V,W) = [V,W] - \nabla_V W + \nabla_W V = 0$ (تانسور تاب ∇ صفر است)

۲- $Zg(V,W) = g(\nabla_Z V,W) + g(V,\nabla_Z W)$ (∇ سازگار با متر ریمانی است)

در این صورت ∇ را التصاق لوی-سیویتا (التصاق ریمانی) گوییم.

تعریف ۱.۱۵. فرض کنید M یک خمینهٔ ریمانی با التصاق ریمانی ∇ باشد. نگاشت $R : \chi^3(M) \longrightarrow \chi(M)$ با ضابطهٔ

$$R(X,Y)Z = [\nabla_X,\nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

یک $(1,3)$ میدان تانسوری روی M می‌باشد که تانسور خمیدگی ریمانی نامیده می‌شود. نگاشت R در روابط زیر صدق می‌کند:

$$(1)\quad R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$$

$$(2)\quad R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$ (اتحاد اول بیانچی)

$$(3)\quad g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$$

$$(4)\quad g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y).$$

روابط بالا را تقارن‌های تانسور خمیدگی می‌نامیم.

تعریف ۱۶.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ ریمانی و $p \in M$ باشد. در این صورت تابع چند خطی

$$F : T_pM^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v, w, x, y) \longrightarrow g(R(v, w)x, y)$$

یک تابع از نوع خمیدگی‌گوییم هر گاه در تقارن‌های تانسور خمیدگی صدق کند.

تعریف ۱۷.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ هموار و π یک زیر فضای دو بعدی از فضای مماس T_pM باشد به طوریکه π توسط میدان‌های برداری X, Y تولید می‌شود در این صورت خمیدگی برشی M نسبت به π در نقطه p عبارتست از:

$$K(X, Y) := \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}.$$

تعریف ۱۸.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ ریمانی باشد. M را با خمیدگی ثابت گوییم هرگاه خمیدگی برشی ثابت داشته باشد.

لم ۲.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ ریمانی باشد. اگر خمیدگی برشی در نقطهٔ $p \in M$ مساوی صفر باشد آنگاه تانسور خمیدگی ریمانی در نقطهٔ p نیز مساوی صفر خواهد شد.

برهان. از اینکه $K = 0$ است از تعریف خمیدگی برشی به ازای هر $v, w \in T_pM$ داریم $g(R(v, w)w, v) = 0$. به ازای هر $v, w \in T_pM$ نشان می‌دهیم $R(v, w)v = 0$. با پلاریزه کردن $R(v, w)v$ به ازای هر x داریم:

$$\begin{aligned} 0 = g(R(v, w + x)v, w + x) &= g(R(v, w)v, w) + g(R(v, x)v, x) \\ &+ g(R(v, w)v, x) + g(R(v, x)v, w) \end{aligned} \tag{1.1}$$

ولی با توجه به تقارن تانسور خمیدگی داریم:

$$g(R(v, w)v, x) = g(R(v, x)v, w).$$

لذا از (۱.۱) به دست می‌آوریم $g(R(v, w)v, x) = 0$. حال به ازای هر $v, w, x \in T_pM$ نشان می‌دهیم $R(v, w)x = R(w, x)v$. با پلاریزه کردن $R(v, w)v$ داریم:

$$0 = R(v + x, w)(v + x) = R(v, w)v + R(x, w)v + R(v, w)x + R(x, w)x$$

لذا نتیجه می‌گیریم $R(v, w)x = R(w, x)v$. حال با توجه به اتحاد اول بیانچی به ازای هر $v, w, x \in T_pM$ داریم: $3R(v, w)x = R(v, w)x + R(w, x)v + R(x, v)w = 0$

بنابراین در نقطهٔ $p \in M$ به دست می‌آوریم $R = 0$. □

تعریف ۱۹.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ هموار باشد. میدان برداری V را روی M موازی گوییم هر گاه به ازای هر میدان برداری X روی M داشته باشیم $\nabla_X V = 0$.

لم ۳.۱. [۸] فرض کنید $\alpha : I \longrightarrow M$ یک خم هموار روی خمینهٔ هموار M و $a \in I$ و $z \in T_{\alpha(a)}(M)$ باشد. در این صورت میدان برداری موازی منحصربفرد Z روی α چنان وجود دارد که $Z(a) = z$.

تعریف ۲۰.۱. با توجه به لم قبل، اگر $b \in I$ در این صورت تابع

$$P = P_a^b(\alpha) : T_p(M) \longrightarrow T_q(M)$$
$$z \longrightarrow Z(b)$$

انتقال موازی در طول α از $p = \alpha(a)$ به $q = \alpha(b)$ نامیده می‌شود.

لم ۴.۱. [۸] انتقال موازی یک ایزومتری خطی می‌باشد.

تعریف ۲۱.۱. خانواده $TM^{\perp} = \cup_{p\in M} T_p(M)^{\perp}$ راکلاف قائم می نامیم همچنین $\nabla^{\perp}$ مولفه قائم $\overline{\nabla}$ یک التصاق روی کلاف قائم است این التصاق را التصاق قائم می نامیم.

تعریف ۲۲.۱. فرض کنید $\overline{M}$ یک خمینه ریمانی و M یک زیر خمینه آن باشد. در این صورت التصاق قائم M به صورت زیر تعریف می شود :

$$\nabla^{\perp} :\ \chi(M) \times \chi(M)^{\perp} \to \chi(M)^{\perp}$$
$$\nabla^{\perp}_X Z = nor\overline{\nabla}_X Z \quad X \in \chi(M), Z \in \chi(M)^{\perp}$$

به طوریکه $\overline{\nabla}$ التصاق ریمانی $\overline{M}$ می باشد.

تعریف ۲۳.۱. فرض کنید $\overline{M}$ یک خمینه ریمانی و M یک زیر خمینه آن باشد. انحنای قائم $R^{\perp}$ زیر خمینه M در خمینه $\overline{M}$ عبارت است از :

$$R^{\perp} :\ \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M)^{\perp} \to \chi(M)^{\perp}$$
$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y \xi - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi$$

تعریف ۲۴.۱. فرض کنید $\overline{M}$ یک خمینه ریمانی با التصاق ریمانی $\overline{\nabla}$ باشد و M یک زیر خمینه $\overline{M}$ باشد. در این صورت نگاشت :

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)^{\perp}$$
$$h(X,Y) = nor\overline{\nabla}_X Y \quad \forall X, Y \in \chi(M)$$

را فرم اساسی دوم (یا تانسور شکل) M می نامیم به طوریکه h دو خطی و متقارن است.

تعریف ۲۵.۱. فرض کنید M یک زیر خمینه از خمینه $(\overline{M},\overline{g})$باشد. عملگر شکل A_ξ زیر خمینه M متناظر با میدان برداری قائم واحد ξ در خمینه $\overline{M}$ یک (۱, ۱) میدان تانسوری روی M می باشد به طوریکه :

$$g(A_\xi X,Y)=\overline{g}(h(X,Y),\xi)$$

به وضوح A_ξ یک عملگر خطی و متقارن است.

لم ۵.۱. [۸] فرض کنید $\overline{M}$ یک خمینهٔ ریمانی با التصاق ریمانی $\overline{\nabla}$ و M یک زیر خمینهٔ $\overline{M}$ باشد. اگر $X,Y\in\chi(M)$ آنگاه $\nabla_X Y=tan\overline{\nabla}_X Y$.

نتیجه ۱.۱. [۸] فرض کنید $\overline{M}$ یک خمینهٔ ریمانی با التصاق ریمانی $\overline{\nabla}$ و M یک زیر خمینهٔ $\overline{M}$ باشد در این صورت به ازای میدان‌های برداری X,Y روی M داریم $\overline{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+h(X,Y)$ که فرمول گاوس نام دارد.

قضیه ۱.۱. [۵] (معادله وینگارتن) فرض کنیم X مماس بر M و ξ میدان برداری عمود واحد بر Mباشد آنگاه داریم:

$$\overline{\nabla}_X\xi=\nabla^{\perp}_X\xi-A_\xi X$$

که درآن$\nabla^{\perp}_X\xi$ مولفه نرمال$\overline{\nabla}_X\xi$ بوده وتوسط رابطه زیرتعریف می شود:

$$g(A_\xi X,Y)=\overline{g}(h(X,Y),\xi)$$

قضیه ۲.۱. [۵] فرض کنیم Mیک زیرخمینه$\overline{M}$ و R تانسورانحنایM و $\overline{R}$ تانسورانحنای $\overline{M}$ باشددراینصورت به ازای $X,Y,Z,W\in\chi(M)$ معادلات گاوس و کودازی بترتیب به صورت زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned}\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,W)&=g(R(X,Y)Z,W)\\&-\{g(AY,Z)g(AX,W)-g(AX,Z)g(AY,W)\}\end{aligned} \tag{۲.۱}$$

$$\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,\xi)=g((\nabla_X A)Y-(\nabla_Y A)X,Z) \tag{۳.۱}$$

تعریف ۲۶.۱. فرض کنید M یک خمینه ریمانی باشد و $\gamma:I\to M$یک خم روی M باشد. خم γ را یک ژئودزیک گوئیم هرگاه میدان برداری γ' در طول γ موازی باشد ؛ یعنی $\nabla_{\gamma'}\gamma'=0$. یا به طورهم ارز، ژئودزیک ها خم های با شتاب صفر می باشند $\gamma''=0$.

تعریف ۲۷.۱. زیر خمینه M در خمینه $\overline{M}$ را یک زیر خمینه تماماً ژئودزیک یا (ژئودزیک سراسری) $\overline{M}$ گوئیم هرگاه هر ژئودزیک M یک ژئودزیک $\overline{M}$ نیز باشد.

قضیه ۳.۱. [۸] *فرض کنید M یک زیر خمینه از خمینه $\overline{M}$ باشد. زیر خمینه M در $\overline{M}$ یک ژئودزیک سراسری است اگر و تنها اگر فرم اساسی دوم h متحد با صفر باشد.*

نتیجه ۲.۱. [۸] *زیر خمینه M در خمینه $\overline{M}$ یک ژئودزیک سراسری است اگر و تنها اگر به ازای هر میدان برداری قائم ξ داشته باشیم $A_\xi = 0$.*

تعریف ۲۸.۱. فرض کنید M, N دو خمینه هموار باشند و فرض کنید $\phi : M \to N$ یک نگاشت هموار باشد. اگر $s \geqslant 1$ و $T \in \Gamma_s^0(N)$ آنگاه به ازای $v_i \in T_pM$ و $p \in M$، $\phi^*T \in \Gamma_s^0(M)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$(\phi^*T)_p(v_1, \cdots, v_s) = T_{\phi_p}(d\phi v_1, \ldots, d\phi v_s)$$

تعریف ۲۹.۱. فرض کنید M, N دو خمینه هموار باشند و فرض کنید $\phi : M \to N$ یک نگاشت هموار باشد. میدان های برداری هموار X روی M و Y روی N، ϕ-وابسته هستند هرگاه

$$d\phi(X_p) = Y_{\phi p} \qquad \forall\, p \in M$$

تعریف ۳۰.۱. فرض کنید M یک خمینه ریمانی با متر g_M و N یک خمینه ریمانی با متر g_N باشد. اگر π و σ به ترتیب نگاشت های تصویر طبیعی از $M \times N$ به M و N باشند قرار می دهیم

$$g = \pi^*(g_M) + \sigma^*(g_N)$$

در این صورت g به وضوح یک متر روی $M \times N$ تعریف می کند. بنابراین $M \times N$ یک خمینه ریمانی با متر g می باشد که آن را خمینه حاصلضرب ریمانی گوئیم.

تعریف ۳۱.۱. فرض کنید M یک خمینه ریمانی با متریک g باشد و فرض کنید $f \in C^\infty(M)$ یک تابع هموار روی M باشد. گرادیان تابع f به صورت میدان برداری به طور متریک هم ارز با $df \in \chi^*(M)$ تعریف می شود ؛ یعنی به ازای هر میدان برداری مماس X :

$$g(gradf, X) = df(X) = Xf$$

تعریف ۳۲.۱. فرض کنید Vو W میدان های برداری هموار روی خمینه هموار M باشند. براکت لی Vو W عبارت است از عملگر $[V, W]_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ که به صورت زیر تعریف می شود:

$$[V, W]_p f = V_p(Wf) - W_p(Vf).$$

تعریف ۳۳.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ ریمانی هموار و ξ یک میدان برداری روی M باشد، مشتق تانسوری L_ξ به ازای هر میدان برداری X و تابع هموار f روی M به صورت

$$L_\xi(X) = [\xi, X]$$

$$L_\xi f = \xi f$$

تعریف می‌شود که L_ξ را مشتق لی نسبت به میدان برداری ξ می‌نامیم.

تعریف ۳۴.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ ریمانی باشد. یک میدان برداری کیلینگ روی M، یک میدان برداری مانند X است که مشتق لی g نسبت به میدان برداری X صفر باشد یعنی داشته باشیم $L_X g = ۰$.

تعریف ۳۵.۱. یک کنج روی خمینه Mدر نقطه p عبارت است از یک پایه متعامد یکه برای فضای مماس $T_p(M)$. اگر M، n-بعدی باشد در این صورت n تا میدان برداری دو به دو متعامد یکه $E_۱, \cdots, E_n$ را یک میدان کنجی می نامیم که به هر نقطه از خمینه یک کنج اختصاص می دهد.

تعریف ۳۶.۱. فرض کنید M یک زیر خمینه n- بعدی از خمینه $(n+p)$-بعدی $\overline{M}$ باشد. در این صورت میدان برداری خمیدگی متوسط H ، زیر خمینه M به صورت زیر تعریف می شود:

$$H = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} h(e_i, e_i)$$

به طوریکه $e_۱, \cdots, e_n$ یک کنج روی M در نقطه p می باشد.
اندازه $|H|$ ، میدان برداری خمیدگی متوسط Hرا خمیدگی متوسط زیر خمینه M گوئیم.

به طور معادل اگر برای $a = ۱, \cdots, p$، ξ_a میدان های برداری قائم متعامد یکه به M و A_a عملگر شکل متناظر با ξ_a باشد در این صورت میدان برداری خمیدگی متوسط H به صورت زیر می شود:

$$H = \frac{۱}{n}\sum_{a=۱}^{p}(trace A_a)\xi_a$$

تعریف ۳۷.۱. فرض کنید Mو N خمینه های ریمانی به ترتیب با تانسور متر های g_Mو g_Nباشند. یک ایزومتری از Mبه N یک دیفئومرفیسم $\phi : M \to N$ می باشد به طوریکه حافظ متر است ؛ یعنی

$$\phi^*(g_N) = g_M.$$

تعریف ۳۸.۱. فرض کنید Mیک خمینه هموار و فرض کنید V یک میدان برداری هموار روی M باشد. یک خم انتگرالی V عبارت است از یک خم هموار $\gamma : I \to M$ تعریف شده روی بازه باز $I \subset \mathbb{R}$به طوریکه

$$\gamma'(t) = V_{\gamma(t)} \qquad \text{به ازای هر } t \in I$$

به عبارت دیگر بردار مماس به γ در هر نقطه مساوی با مقدار V در آن نقطه است.

۳.۱ خمینه های مختلط و ساختار تقریباً مختلط

تعریف ۳۹.۱. فرض کنید D یک زیر مجموعهٔ باز از $\mathbb{C}^n$ باشد. یک تابع $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ در نقطهٔ z_0 دیفرانسیل‌پذیر نامیده می‌شود اگر

$$lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{f(z_0^1, \cdots, z_0^i + h, \cdots, z_0^n) - f(z_0^1, \cdots, z_0^i, \cdots, z_0^n)\}$$

برای هر $i = 1, \cdots, n$ وجود داشته باشد. اگر f در هر نقطهٔ D دیفرانسیل‌پذیر باشد در این صورت f روی D هولومرفیک نامیده می‌شود.

تعریف ۴۰.۱. فرض کنید D یک زیر مجموعهٔ باز از $\mathbb{C}^n$ باشد و فرض کنید $\psi : D \longrightarrow \mathbb{C}^n$ به صورت

$$\psi(z^1, \cdots, z^n) = (w^1, \cdots, w^n)$$

تعریف شود. اگر به ازای هر i که $(i = 1, \cdots, n)$ توابع $w^i = \psi^i(z^1, \cdots, z^n)$ نسبت به z^j $(j = 1, \cdots, n)$ هولومرفیک باشند، آنگاه ψ هولومرفیک نامیده می‌شود.

تعریف ۴۱.۱. یک فضای هاسدورف M یک خمینهٔ مختلط از بعد مختلط n نامیده می‌شود هر گاه M در ویژگی‌های زیر صدق کند:

۱. برای M یک پوشش باز $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ وجود داشته باشد و برای هر α، یک هومئومورفیسم

$$\psi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \psi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n$$

وجود داشته باشد.

۲. برای هر دو مجموعهٔ باز U_α, U_β با مقطع ناتهی، نگاشت‌های

$$f_{\beta\alpha} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$
$$f_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

هولومرفیک باشند.

مجموعهٔ $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ یک دستگاه از همسایگی‌های مختصاتی هولومرفیک نامیده می‌شود.

مثال ۱.۱. مثالی از یک خمینهٔ مختلط.

کرهٔ $\mathbb{S}^{2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{3} \mid x^{2}+y^{2}+z^{2}=1\}$ را در نظر می‌گیریم. همچنین همسایگی‌های $U_{1} = \mathbb{S}^{2}\backslash\{n\}$ و $U_{2} = \mathbb{S}^{2}\backslash\{s\}$ را از $\mathbb{S}^{2}$ در نظر می‌گیریم که $n = (0,0,1)$ و $s = (0,0,-1)$ می‌باشد. $\psi_{1} : U_{1} \longrightarrow \mathbb{C}$ و $\psi_{2} : U_{2} \longrightarrow \mathbb{C}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi_{1}(x,y,z) = \frac{x+\sqrt{-1}y}{1-z}, \qquad \psi_{2}(x,y,z) = \frac{x-\sqrt{-1}y}{1+z}.$$

در این صورت نگاشت‌های $\psi_{1}\circ\psi_{2}^{-1}, \psi_{2}\circ\psi_{1}^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ هولومرفیک می‌باشند. زیرا برای $\mathbb{C} \ni w = u+\sqrt{-1}v$ از $u = \frac{x}{1-z}, v = \frac{y}{1-z}$ و $x^{2}+y^{2}+z^{2}=1$ نتیجه می‌گیریم

$$z = \frac{u^{2}+v^{2}-1}{u^{2}+v^{2}+1}, \quad x = \frac{2u}{u^{2}+v^{2}+1}, \quad y = \frac{2v}{u^{2}+v^{2}+1}.$$

بنابراین

$$\psi_{1}^{-1}(w) = \psi_{1}^{-1}(u+\sqrt{-1}v) = \Big(\frac{2u}{u^{2}+v^{2}+1}, \frac{2v}{u^{2}+v^{2}+1}, \frac{u^{2}+v^{2}-1}{u^{2}+v^{2}+1}\Big)$$

در نتیجه داریم:

$$\psi_{2}\circ\psi_{1}^{-1}(w) = \frac{u}{u^{2}+v^{2}} - \sqrt{-1}\frac{v}{u^{2}+v^{2}} = \frac{1}{w}.$$

بنابراین $\psi_{2}\circ\psi_{1}^{-1}$ هولومرفیک می‌باشد به طور مشابه نشان داده می‌شود که $\psi_{1}\circ\psi_{2}^{-1}$ نیز هولومرفیک می‌باشد. بنابراین $\mathbb{S}^{2}$ یک خمینهٔ مختلط است که کرهٔ ریمانی نامیده می‌شود.

تعریف ۴۲.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ مختلط n-بعدی باشد. مختصات مختلط موضعی را با $(x^{1},y^{1},\cdots,x^{n},y^{n})$ نشان می‌دهیم در این صورت M یک خمینهٔ دیفرانسیل‌پذیر $2n$ بعدی حقیقی در نظر گرفته می‌شود. فضای مماس $T_{p}M$ در نقطهٔ $p \in M$ پایهٔ استاندارد $\Big\{(\frac{\partial}{\partial x^{1}})_{p}, (\frac{\partial}{\partial y^{1}})_{p}, \cdots, (\frac{\partial}{\partial x^{n}})_{p}, (\frac{\partial}{\partial y^{n}})_{p}\Big\}$ را دارد. برای $i : 1,\cdots,n$ قرار می‌دهیم:

$$J_{p}\Big(\frac{\partial}{\partial x^{i}}\Big)_{p} = \Big(\frac{\partial}{\partial y^{i}}\Big)_{p}, \quad J_{p}\Big(\frac{\partial}{\partial y^{i}}\Big)_{p} = -\Big(\frac{\partial}{\partial x^{i}}\Big)_{p}.$$

در این صورت $J_{p} : T_{p}M \longrightarrow T_{p}M$ یک ایزومرفیسم می‌باشد. J را ساختار تقریباً مختلط M می‌نامیم.

تعریف ۴۳.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ دیفرانسیل‌پذیر باشد. اگر یک نگاشت $J : T(M) \longrightarrow T(M)$ چنان وجود داشته باشد به طوریکه به ازای هر $p \in M$ نگاشت $J_{p} : T_{p}M \longrightarrow T_{p}M$ خطی بوده و $J_{p}^{2} = -id$ باشد آنگاه M را یک خمینهٔ تقریباً مختلط و J را ساختار تقریباً مختلط M می‌نامیم.

لم ۶.۱. یک خمینهٔ تقریباً مختلط از بعد زوج می‌باشد.

برهان. چون $J^{2} = -id$، برای یک پایهٔ مناسب از کلاف مماسی داریم:

$$J^{2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

بنابراین داریم $0 \geq (detJ)^{2} = detJ^{2} = (-1)^{n}$. در نتیجه n زوج می‌باشد. $\square$

تعریف ۴۴.۱. فرض کنید (M, J) یک خمینهٔ تقریباً مختلط باشد. در این صورت میدان تانسور تاب وابسته به ساختار تقریباً مختلط J به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_J : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$N_J(X, Y) = -[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY]$$

تعریف ۴۵.۱. فرض کنید (M, J) یک خمینهٔ تقریباً مختلط باشد. متر هرمیتی روی خمینهٔ (M, J) متر ریمانی g است که نسبت به J پایا باشد یعنی به ازای هر میدان برداری X, Y روی M داشته باشیم:

$$g(JX, JY) = g(X, Y).$$

از اینکه $g(JX, Y) = g(J^{2}X, JY) = -g(X, JY)$، لذا نتیجه می‌شود J پاد متقارن است.

قضیه ۴.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ تقریباً مختلط باشد. در این صورت روی M یک متر هرمیتی وجود دارد.

برهان. روی M یک متر ریمانی g وجود دارد. قرار می‌دهیم:

$$g(X, Y) = \frac{1}{2}\{\acute{g}(X, Y) + \acute{g}(JX, JY)\}$$

با محاسبهٔ $g(JX, JY)$ مشاهده می‌شود که g یک متر هرمیتی است. $\square$

تعریف ۴۶.۱. ساختار تقریباً مختلط J روی خمینهٔ M انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر میدان برداری X, Y روی M داشته باشیم $N_J(X, Y) = 0$.

تعریف ۴۷.۱. خمینهٔ تقریباً مختلط (M, J) را با متر هرمیتی g، خمینهٔ تقریباً هرمیتی گوییم و خمینهٔ تقریباً هرمیتی (M, J, g) را خمینهٔ هرمیتی گوییم هرگاه J انتگرال‌پذیر باشد. یعنی تانسور تاب وابسته به J متحد با صفر باشد.

تعریف ۴۸.۱. فرض کنید (M, J, g) یک خمینهٔ تقریباً هرمیتی باشد. میدان تانسوری Ω با ضابطهٔ $\Omega(X, Y) = g(X, JY)$ یک ۲-فرم روی M تعریف می‌کند که آن را ۲-فرم اساسی ساختار تقریباً هرمیتی (M, J, g) یا فرم کاهلری M می‌نامیم.

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY) = g(JX, J^2Y) = -g(JX, Y) = -\Omega(Y, X)$$

بنابراین Ω یک میدان تانسوری پاد متقارن است.

$$\Omega(JX, JY) = g(JX, J^2Y) = g(J^2X, J^3Y) = g(X, JY) = \Omega(X, Y)$$

بنابراین Ω تحت J پایاست.

تعریف ۴۹.۱. فرض کنید (M, J) یک خمینه هرمیتی با متر هرمیتی g و از بعد $2m$ باشد و فرض کنید Ω کاهلر فرم متناظر با J باشد. اگر خمینه (M, J) در شرط

$$d\Omega = 0$$

صدق کند در این صورت خمینه (M, J) را یک خمینه کاهلری گوئیم و متر gرا یک متر کاهلری می نامیم.

قضیه ۵۰.۱. *فرض کنید (M, J) یک خمینه مختلط با متر هرمیتیg باشد. در این صورت (M, J) یک خمینه کاهلری است اگر و تنها اگر به ازای هر میدان برداری مماس X داشته باشیم:*

$$\nabla_X J = 0.$$

به طوریکه ∇ التصاق لوی سیویتا متناظر با متر g خمینه مختلط M می باشد.

برهان. چون برای یک p-فرم ω داریم:

$$d\omega(X_1, \cdots, X_{p+1}) = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k-1} (\nabla_{X_k}\omega)(X_1, \cdots, \widehat{X_k}, \cdots, X_{p+1}) \qquad (۴.۱)$$

نتیجه می شود

$$d\Omega(X, Y, Z) = (\nabla_X\Omega)(Y, Z) - (\nabla_Y\Omega)(X, Z) + (\nabla_Z\Omega)(X, Y)$$

از طرف دیگر بنابر تعریف کاهلر فرم و شرط سازگاری با متر التصاق داریم:

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\Omega)(Y, Z) &= \nabla_X(\Omega(Y, Z)) - \Omega(\nabla_X Y, Z) - \Omega(Y, \nabla_X Z) \\
&= \nabla_X(g(Y, JZ)) - g(\nabla_X Y, JZ) - g(Y, J\nabla_X Z) \\
&= g(\nabla_X Y, JZ) + g(Y, \nabla_X JZ) - g(\nabla_X Y, JZ) - g(Y, J\nabla_X Z) \\
&= g((\nabla_X J)Z, Y) \\
&= -g((\nabla_X J)Y, Z)
\end{aligned}$$