





دانشگاه بجنورد
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان

عملگرهای موجه روی شبکه های باقیمانده

استاد راهنما

دکتر محمود بخشی

نگارش

الهه اکبری

بهمن ۱۳۹۱

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات

و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه

متعلق به دانشگاه بجنورد است.

تقدیم به

پدر و مادر و همسر عزیزم

محضرولی عصر (عج)، شهدای هشت سال دفاع مقدس

و خمینی کبیر (ره)

رسیدن، به دانش است و به کردار نیک...

و بی دانش به کردار نیک هم نتوان رسید که یکی را بیشتر باید شناختن، آنگاه بجای آوردن. پس دانش به همه حال می‌باید تا به رستگاری توان رسیدن. و چون دانش راه آمد، به بهترین چیزها که آدمی را تواند بود. و در اول آفرینش حاصل نیست و بعضی از آن بی‌رنج و اندیشه حاصل شود، پس هر آینه ممتز چیزی باشد که در حاصل کردنش عمر گذرانند، لیکن برخی هست که بی‌اندیشه حاصل آید و بعضی را ناچار به اندیشه حاجت بود، و آنچه به اندیشه حاصل شود دانسته‌ای خواهد که در اندیشه کنند تا این نادانسته بدان اندیشه که در آن دانسته‌اند دانسته شود، و از هر دانسته هر نادانسته را نتوان شناخت، بلکه هر نادانسته را به دانسته‌ای که در خور او بود توان شناخت. و منطق آن علم است که در راه انداختن نادانسته به دانسته دانسته شود...

پس منطق ناگزیر آمد بر جوینده‌ی رستگاری.^۱

^۱ مقدمه‌ی رساله‌ی منطق دانشنامه‌ی علائی، شیخ‌الرئیس ابن‌سینا

سپاس‌گزاری...

ستایش و سپاس اولاً و بالذات مخصوص خداوندی است که منطق را فطرتاً در وجود آدمی نهاد. سپاس خدای مهربان که با دست توانای خود به من نیرو داد تا همچون جویی، جویای علم، از فراز و نشیب‌های گذر کنم و از مشاهده اتم توشه‌ای هر چند اندک ولی با ارزش برای خود بردارم و از آن به برنامه‌زنگی ام مفهومی واقعی تردهم.

حال که به یاری خدای بزرگ این فصل زندگی ام به پایان رسید بر خود می‌دانم که سپاس خالصانه ام را تقدیم نمایم به کسانی که به من آموختند آنچه را که نمی‌دانستم عزیزانی که تدوین این نوشتار را مدیون راهنمایی آنها هستم که در این مرحله از زندگی علمی خود را وام دار آنها می‌دانم. در آغاز به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق» بسی شایسته است از استاد راهنمای فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر محمود بخشی که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی‌های کار ساز و سازنده بارور ساختند؛ تقدیر و تشکر نمایم. و همچنین لازم می‌دانم از اساتید فرهیخته دکتر سعید آرشام برومند و دکتر امید رضا دهقان که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند با تمام وجود تشکر و قدردانی نمایم.

(و یزکیهم و یعلمهم الكتاب و الحکمه).

معلما مقامت ز عرش برتر باد همیشه توسن اندیشه ات مظفر باد

به نکته‌های دلاویز و گفته‌های بلند صحیفه‌های سخن از تو علم پرور باد

تشکر میکنم از پدر و مادرم دو وجود مقدس و گرانبها، دو فرشته در لباس انسان، دو قصیده بلند زندگی، ستاره‌های درخشان زندگی ام، آنانی که وجودم همه رنج بود، وجودشان همه مهر، توانشان رفت که به توانایی برسم، موهایشان سپید شد تا رویم سپید بماند، آنانی که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنایی رویشان سرمایه‌های جاویدان زندگی من است، آنانی که راستی قامت در شکستگی قامتشان تجلی یافت و به خاطر آرزوهایم از آرزوهایشان گذشتند، آسمان دستهایشان را سایه بان تنهایی من قرار دادند و گامهای استوارشان را راهنمای من به سرزمین طلایی امید و دریای بی‌کران که با هر موجش ترانه روشن مهر را به ساحل زندگی زمزمه می‌کنند قرار دادند. آنان که همواره در امر تحصیل با صبر و حوصله حامی و پشتیبان من و با امیدواری و نیک‌اندیشی مشوق من در نیل به اهدافم بودند و تمام موفقیت‌های زندگی ام را مدیون آنها هستم. پدرم، آن وجود مقدس که سرشار از محبت برای خوشبختی و سعادت من بود و درس صداقت و پشتکار و گذشت را به من آموخت و همیشه مشوق من در ادامه تلاشم بود و مادرم، که

صبوري چشم بيدارش، حكايي از ايتار عاطفه است و فروغ هستي اش گرمي بخش و راهنماي زندگيم بود. يك انسان فرشته خوبي وپاك سرشتي كه آرامش حيات و جلوه هاي اميد بخش زندگي من، معلول فداكاري ها و محبت هاي بي دريغ اوست. پدر و مادري كه بزرگترين افتخارم اين است كه فرزندشان هستم و از صميم جان در برابر وجود گراميشان زانوي ادب بر زمين مي نهم و با دلي مملو از عشق، محبت و خضوع بر دستان پاكشان بوسه مي زنم و به خاطر اين دو گنج، پيوسته پيشاني شكر گزاري بر خاك خواهم گذاشت.

بوسه مي زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهرباني، همسر عزيزم كه بعد از خداوند، و پدر و مادرم ستايش مي كنم وجود مقدسش را واز او بسيار سپاسگذارم چرا كه بدون شك اگر مهرباني، فداكاري، صبوري، همراهي، زحمات بي دريغ او نبود اين بار به سر منزل مقصود نمي رسيد.

تشكر مي كنم از برادرانم الياس، حسين وخواهرم مريم به پاس عاطفه سرشار و گرمای اميد بخش وجودشان كه بهترين پشتيبان من بودند.

همچنين از اساتيد و معلمي كه در دوران تحصيل تأثيري ويژه بر درك من از رياضيات داشته اند از جمله سركار خانم دكتر محمد زاده و جناب آقاي دكتر اميدرضا دهقان اساتيد دوران كارشناسي ارشد و اساتيد دوران كارشناسي و همه معلمان دوران دبirstان و راهنمايي و دبستان بي نهايت سپاس و قدراني را دارم و اميدوارم بتوانم راه ايشان را ادامه داده و فردي مفيد و تاثير گذار بر جامعه باشم. و در پايان، شايسته است از دوستان گرامي كه درمقاطع مختلف تحصيلي به اينجانب لطف داشته اند تشكر و قدراني كنم.

اله اكبري
بهمن ۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: اکبری

نام: الهه

عنوان: عملگرهای موجه روی مشبکه های باقیمانده

استاد راهنما: دکتر محمود بخشی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی

گرایش: جبر

دانشگاه: بجنورد

علوم ریاضی

تاریخ فارغ التحصیلی: بهمن ۱۳۹۱

تعداد صفحات: ۱۱۲

واژگان کلیدی: عملگر موجه، یکنوایی، فیلتر، مشبکه باقیمانده

چکیده

در این پایان نامه ابتدا مقدمه ای از منطق و نحوه جبری کردن منطق مخصوصا منطق موجهاات را بیان می کنیم و به ریشه عملگر موجه در منطق موجهاات می پردازیم. سپس به تعریف مشبکه باقیمانده صحیح جابجایی کراندار و Rl - تکواره می پردازیم و عملگر موجه را روی آنها تعریف می کنیم و بعد به بررسی قضیه ها و ویژگی های دیگر عملگر موجه می پردازیم و در بخش بعدی مطالب روی MV - جبرها را بررسی کرده و در آخر به بررسی مطالب در حالت تعویض ناپذیر می پردازیم.

کلمات کلیدی: موجه - یکنوایی - فیلتر - مشبکه باقیمانده

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	مقدمه
۹	۱ پیش نیازها
۱۰	۱.۱ شبکه ها
۱۱	۲.۱ شبکه های باقیمانده
۲۴	۲ شبکه های باقیمانده تعویض پذیر
۲۵	۲.۱ عملگر موجه روی شبکه باقیمانده
۳۶	۲.۲ شبکه باقیمانده نرمال
۴۴	۲.۳ عملگرهای دیگر
۴۹	۲.۴ عملگرهای موجه روی Rl - تکواره ها
۵۱	۲.۵ Rl - تکواره های نرمال
۵۸	۲.۶ عملگرهای موجه روی MV - جبرها
۶۹	۳ شبکه های باقیمانده تعویض ناپذیر
۷۰	۳.۱ پیش نیازها
۷۶	۳.۲ عملگرهای موجه روی شبکه باقیمانده
۹۱	۳.۳ شبه نرمال
۹۶	۳.۴ ویژگی های دیگر
۱۰۶	واژه نامه انگلیسی به فارسی
۱۰۷	مراجع

پیش‌گفتار

در این پایان‌نامه ابتدا مقدمه‌ای از منطق و نحوه جبری کردن منطق مخصوصاً منطق موجهات را بیان می‌کنیم و به ریشه عملگر موجه در منطق موجهات می‌پردازیم و در فصل اول ابتدا مقدمات و پیش‌نیازهای لازم را مطرح می‌کنیم و در فصل دوم شبکه باقیمانده صحیح تعویض پذیر کراندار را مورد بررسی قرار می‌دهیم و به تعریف Rl - تکواریه باقیمانده صحیح تعویض پذیر کراندار می‌پردازیم و عملگر موجه را روی آن تعریف کرده و بعد به بررسی قضیه‌ها و ویژگی‌های دیگر عملگر موجه می‌پردازیم و همین مطالب را روی MV - جبرها نیز بررسی می‌کنیم و در فصل سوم به بررسی شبکه‌های باقیمانده صحیح در حالت تعویض ناپذیر می‌پردازیم.

مقدمه

موضوع علم منطق ریاضی به معنای عام، تفکر است تفکر، از جنبه های مختلف، موضوع کاوش علوم و فلسفه است. به طور مثال، در علم روانشناسی، تفکر از منظر "روان" مورد توجه روانشناس است و در علوم زیست شناسی، تفکر از وجه رابطه آن با مغز بررسی می شود و در فلسفه نیز تفکر به عنوان موضوع معرفت النفس یا شناخت شناسی مورد کاوش است. آن چه تفکر را به عنوان موضوع "منطق ریاضی" از موضوع علوم دیگر متمایز می کند، تعیین خاصی از تفکر است که به آن تفکر قیاسی، تفکر استدلالی یا تفکر استنتاجی می گوئیم. بنابراین، تعریف ما برای علم منطق ریاضی این است.

منطق ریاضی = مدل سازی ریاضی برای تفکر

در اینجا باید اشاره کنیم که رابطه ی منطق ریاضی و ریاضیات دو جنبه دارد، یکی رابطه منطق ریاضی و اصول ریاضیات و دیگری نقش منطق ریاضی در حل بعضی از مساله های مشخص در حوزه های دیگر ریاضی. در حقیقت، رابطه ی اول از انگیزه های اصلی پیدایش علم منطق ریاضی بوده، در حال حاضر نیز مطالعه ی اصول ریاضیات یا نظریه ی مجموعه ها از حوزه های نسبتاً فعال منطق ریاضی به شمار می رود. به طور مشخص تر مساله از این قرار است که بعد از اکتشاف های گودل^۲ و کوهن^۳ در استقلال فرضیه پیوستار از اصول نظریه ی مجموعه ها سؤال اساسی این است: آیا ریاضیات به اصول جدیدی نیاز دارد؟ و اگر جواب مثبت باشد، آنگاه این سؤال مطرح می شود که چه اصل یا اصول جدیدی باید به اصول موجود اضافه شود؟ بخشی از فعالیت منطق ریاضی، مطالعه و یافتن پاسخ این سؤال هاست.

^۲K.Godel

^۳P.Cohen

منطق ریاضی، به معنای عام، موضوع وسیع تری دارد و به جنبه های دیگر تفکر می پردازد بنابراین هرفهرستی از انواع منطق ریاضی شامل منطق های زیر است

منطق ریاضی به معنای خاص یا منطق کلاسیک^۴

منطق شهودگرایانه^۵

منطق شناختی^۶

منطق خطی^۷

منطق چند ارزشی^۸

منطق فقه یا تکلیف^۹

منطق زمان^{۱۰}

منطق فازی^{۱۱}

منطق موجهاات یا وجهی^{۱۲}

در بعضی از نوشته ها منطق ریاضی به معنای خاص را منطق کلاسیک و بقیه ی منطق ها را منطق غیر کلاسیک می گویند. با تسامح می توان گفت که منطق کلاسیک منطق دو ارزشی است و منطق های غیر کلاسیک، چنین نیستند. منظور از اینکه ”منطق کلاسیک دو ارزشی است ” این است که هرگزاره ای یا درست است یا نادرست. ذکر این نکته ضروری است که در مورد انواع منطق می توان پرسید که برای هر حوزه ی خاصی از تفکر کدام مناسب تر است، اما نمی توان پرسید که کدام یک از آنها مدل مناسبی برای تفکر ارائه می کنند. در ادامه می خواهیم برای زبان منطق مدل ریاضی بسازیم. همان طور که می دانیم

^۴Logic Classical

^۵Logic Intuitionstic

^۶Logic Epistemic

^۷ Logic Linear

^۸Logic Multi-valued

^۹Logic Deontic

^{۱۰}Logic Temporal

^{۱۱}Logic Fuzzy

^{۱۲} Logic Modal

برای تعریف هر زبان در مرحله ی اول باید الفبای آن را مشخص کنیم. الفبای زبان منطق از کوچکترین واحدهای زبان که شامل خبر یا اطلاع باشند تشکیل شده است. ما این واحدهای زبان را گزاره ساده نامیم. در منطق کلاسیک گزاره هایی مورد توجه هستند که گزاره های خبری باشند. به طور کل می توان گفت که الفبای هر زبان منطقی را فارغ از تعبیر آن گزاره می نامیم. همچنین، در هر زبان منطق رابطه ها و اداتی وجود دارند که بوسیله آنها از یک یا چند گزاره می توان گزاره های جدید ساخت. به علاوه، در هر زبان منطق از نمادهایی برای سجاوندی ترکیب گزاره ها استفاده می شود. به عنوان مثال زبان منطق کلاسیک گزاره ها عبارت است از

(الف) تعداد شماری از نمادهای گزاره ای

(ب) نمادهای منطقی $\sim, \rightarrow, \vee, \wedge$

(پ) نمادهای کمکی (و)

آنچه منطق موجهات نامیده می شود یکی از موضوعهای خیلی قدیمی فلسفه است. برای روشن شدن مطلب لازم است مثالی بزنیم. مثلا صدق جمله ”حسن می آید” را به انواع و اقسام می توانیم مقید کنیم. می توانیم بگوییم ”حسن ممکن است بیاید” یا ”حسن شاید بیاید” یا ”حسن باید بیاید” یا ”حسن مجاز است بیاید.” هر کدام از قیود را که به جمله اضافه کنیم صدقش را مقید کرده ایم. و هر کدام منطقی دارد، هر چند شما یک کلمه اضافه کرده اید. در مورد ”حسن ممکن است بیاید” ابهام هم داریم ”ممکن است” در اینجا دو معنا می دهد یکی اینکه آمدن حسن امری است ذاتا امکانی، هیچ ضرورتی برای آمدنش نیست و یکی معنای معرفتی، که در اینجا ما وارد معنای معرفتی نمی شویم یعنی قواعد دیگری غیر از ضرورت و امکان پیش می آید یا وقتی می گوییم ”حسن امروز می آید” با منطق زمان سر و کار داریم با قواعد خاص خودش که رشته و موضوع جداگانه ای است. وقتی هم می گوییم ”حسن باید بیاید” یا ”حسن مجاز است بیاید” این دیگر منطق تکلیفی یا بابایی است که خود داستان دیگری دارد. تمام اینها را ما منطق موجهات می گوییم و آنچه بیشتر معروف است و از قدیم مطرح بوده است منطق موجهات ضرورت و امکان است. ”موجه” شامل منطقهای متعددی می شود مانند منطق زمان، معرفتی و بابایی و...

حال اگر ما منطق ضرورت و امکان را در نظر بگیریم و بقیه را کنار بگذاریم با امری متافیزیکی روبه رو می شویم که امر معرفتی نیست. به این معنا که آنچه در عالم اتفاق می افتد چه بدانم و چه ندانم برای کسانی

که اعتقاد به ضرورت و امکان دارند یا اتفاق آنها، ضروری است یا ممکن منطقی، که متکلف رسیدن به این مسائل است منطق موجهات نامیده می شود. لذا منطق موجهات در معنای قدیمی و متداول آن منطقی است که به بررسی مفاهیمی همچون ضرورت، امکان و نسبت‌های استنتاجی میان آنها می پردازد. سابقه تدوین این بخش از منطق نیز به آثار ارسطو می رسد. از اینرو می توان گفت منطق موجهات با افزودن مفهومها و اصلها و قاعده هایی به مبانی منطق جمله ها و محمولها پایه گذاری می شود.

می دانیم "وجه" و "جهه" هر دو مصدرند، و در منطق موجهات به یک معنا به کار می روند. در فرهنگهای عربی "وجه" را مدخل اصلی قرار می دهند و "جهه" را ذیل آن می آورند. به نظر علمای صرف، "جهه" با قاعده های اعلال از "وجه" ساخته میشود. "موجهه" اسم مفعول است در باب تفعیل که از بردن "وجه" در این باب از آن مصدر "توجیه" را ساخته اند و به اعتبار مونث بودن "قضیه" در ترکیب "قضیه موجهه" در عربی صیغه مونث صفت مفعولی "موجه" را به کار می برند. از آنجا که در فارسی اسمها مذکر و مونث ندارند ما به جای "موجهه" همیشه "موجه" را به کار می بریم. اما در جمع، همان جمع عربی "موجهات" را که راحت تر از "موجه ها" ادا می شود حفظ می کنیم. در متنهای منطق سنتی هم، همین ملاحظات در کاربردهای گونه های صرفی "وجه" و "جهت" دیده می شود. در انگلیسی معادل "وجه"، "mode" یا "mood" و صفت آن "modal" است.

برای روشن شدن بحث در این منطق، نشانه های متداول زیر را به کار می بریم:

□ برای "ضروری است که" یا "ضرورتاً"

◇ برای "ممکن است که"

~ برای "چنین نیست که"

A ، B ، p ، q ، ... هر یک نشانه ای برای جمله خبری

→ به جای "اگر... آنگاه"

↔ به جای "اگر و تنها اگر"

حال مفهوم چند جمله در این منطق را مطرح می کنیم

اگر فرض کنیم " p = برف، سفید است " آنگاه

$\diamond p$ = ممکن است که برف، سفید باشد.

$\diamond \sim p =$ ممکن است که برف، سفید نباشد.

$\sim \diamond p =$ ممکن نیست که برف، سفید باشد.

$\sim \diamond \sim p =$ ممکن نیست که برف، سفید نباشد.

حال در منطق موجهات برای دو گزاره p و q داریم

نظام K : $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$

در یک ترکیب شرطی ضروری اگر مقدم ضروری باشد تالی نیز ضروری است.

نظام T : $\Box p \rightarrow p$

اگر قضیه ای ضرورتاً صادق باشد صادق است.

قاعده (۴) : $\Box p \rightarrow \Box \Box p$

اگر قضیه ای ضرورتاً صادق باشد ضروری بودن آن نیز ضروری است.

قاعده (۵) : $\diamond p \rightarrow \Box \diamond p$

اگر چیزی ممکن باشد امکانش ضروری است.

اگر در منطق موجهات ضرورت و امکان نظام S5 را در نظر بگیریم که داریم

نظام S5 = قاعده ۴ همراه با قاعده ۵ و نظام T و نظام K

حال اگر نظام S5 را به نگرش جبری تبدیل کنیم به عملگر موجه مورد بررسی در این پایان نامه می‌رسیم. در ادامه می‌خواهیم منطق گزاره‌ها را با نگرش جبری بررسی کنیم. نقطه شروع این نگرش، به کارهای بول و دمورگان^{۱۳} در سال ۱۸۴۷ بر می‌گردد. در حقیقت اثر اگوستوس دمورگان با عنوان منطق صوری (۱۸۴۷) و آثار جرج بول با عنوان های تحلیل ریاضی منطق (۱۸۴۷) و تحقیق در باب تفکر

^{۱۳}De Morgan

(۱۸۵۴) را باید سرآغاز نگرش جبری به منطق دانست بعد از نزدیک به یک قرن با کارهای لیدن باوم^{۱۴} ، تارسکی^{۱۵} ، مک کینزی^{۱۶} و دیگران در اوایل دهه چهل قرن بیستم دیدگاه جبری منطق رونق یافت. یکی از دستاوردهای مهم این نگرش، اثبات قضیه ی تمامیت منطق های مختلف با ابزار جبری است. در حقیقت، همین انگیزه باعث پیدایش جبرهای متناظر به منطق های گوناگون شد. می توان گفت که منطق های استاندارد گزاره ها دارای نقطه جبری مقابلی، به صورت زیر، از شبکه هستند.

جبرهای بول^{۱۷} در نقطه مقابل منطق گزاره های کلاسیک

جبرهای بول به همراه عملگرها در نقطه ی مقابل منطق موجهاات

مشبکه های باقیمانده در مقابل منطق بدون انقباض

MV- جبرها در نقطه مقابل منطق لوکاسیویچ

جبر ضربی در نقطه ی مقابل منطق ضربی

جبرهای گودل در نقطه ی مقابل منطق گودل

البته می توان لیست بلند بالایی از جبرهای منطق های مختلف تهیه کرد اما در این پایان نامه، تنها به تعدادی از جبرهای موجود در لیست بالا می پردازیم.

اساس جبری کردن یک منطق به این صورت است که با استفاده از ادات \longleftrightarrow یک رابطه R بر روی منطق مورد نظر به صورت زیر تعریف می کنیم: به ازای دو گزاره α و β

$\alpha R \beta$ اگر و تنها اگر $\alpha \longleftrightarrow \beta$ یک تاتالوژی باشد

در حقیقت $\alpha R \beta$ اگر و فقط اگر $V(\alpha) = V(\beta)$ ، که منظور از $V(\alpha)$ ارزش گزاره α است که می تواند ۰ یا ۱ باشد.

برای هر ارزش گذاری V با استفاده از اصول موضوعه و قواعد استنتاج در هر منطق می توان نشان داد که رابطه ی R تعریف شده به وسیله \longleftrightarrow رابطه ای هم نهشتی بر روی منطق مورد نظر است. مجموعه ی کلاس های هم نهشتی را با For/R نشان می دهیم و آنرا جبرلیندن بام منطق مورد نظر می نامیم. در

^{۱۴}Lindenbaum

^{۱۵}Tarski

^{۱۶}Makinsey

^{۱۷}Boolean algebra

منطق گزاره های کلاسیک جبر لیندن بام متناظر جبر بول است. از ساختار ارائه شده، می توان دریافت که هر همان گو یک تساوی در For/R مشخص می کند و هرتساوی جبری مربوط به یک طرح همان گو است. می توان نشان داد که هر جبر لیندن بام در رسته ی خود یک شی آزاد است، بنابر این هر تساوی که در آن برقرار باشد در کلیه ی اعضای آن رسته برقرار است. به دلایل گفته شده مطالعه ی جبرهای منطقی از اهمیت ویژه ای برخوردار است.

حال اگر منطق موجهاات را با این تعبیر جبری کنیم نظام $S5$ منجر به مفهوم عملگر موجه می شود بدین صورت که اگر M جبر مورد نظر با عمل ضرب \odot باشد و $f: M \rightarrow M$ عملگر موجه مورد نظر آنگاه

(الف) متناظر با قاعده معروف ضرورت $(x \rightarrow \Box x)$ روی K داریم $f(x) \geq x$

(ب) متناظر با قاعده (۴) و نظام T داریم $f(f(x)) = f(x)$

(ج) متناظر با قاعده معروف ضرورت $(x \rightarrow \Box x)$ روی K و نظام T داریم $f(x \odot y) = f(x) \odot f(y)$

در نیمه اول قرن نوزدهم، تلاشهای جرج بول برای رسمی کردن منطق گزاره ها منجر به پیدایش جبر بولی شد. سپس در اواخر قرن نوزدهم، یعنی در زمانی که تحقیقات بر روی اصل موضوعه کردن جبر بولی در انجام بود، چارلز پیرس^{۱۸} و ارنست اسکرودر^{۱۹} پی بردند که این اصول را برای تعریف یک مفهوم جدید و کلی تر به نام شبکه می توان به کار برد. از طرف دیگر، تحقیقات و مطالعات ریچارد دکیند^{۲۰} بر روی ایده آل های جبری اعداد منجر به کشف شبکه ها شد.

مفهوم MV - جبر بوسیله چانگ^{۲۱} در سال ۱۹۵۶ معرفی شد. در اصل MV - جبرها برای اثبات قضیه تمامیت حساب گزاره ای در منطق N - ارزشی لوکاسیویچ معرفی شد.

مشبکه های باقیمانده یا مانده ای برای اولین بار در سال ۱۹۲۴ توسط کرول^{۲۲} معرفی شدند مشبکه های باقیمانده ای جبرهایی هستند که در نقطه مقابل منطق بدون قانون انقباض قرار دارند. مشبکه های باقیمانده عمومی ترین ساختار در بین ساختارهای جبری مرتبط با دستگانه های منطقی بشمار میرود.

^{۱۸}Charles Pierce

^{۱۹}Ernest Askrvdr

^{۲۰}Richard Dedekind

^{۲۱}Chang

^{۲۲}Krull

مشبکه های باقیمانده توسط محققانی از قبیل دیلورث^{۲۳}، وارد^{۲۴}، و بالبس^{۲۵} و دوینگر^{۲۶} و پاوکلا^{۲۷}، ایدزیاک^{۲۸} و دیگران مورد مطالعه و بررسی قرار گرفتند همچنین مشبکه های باقیمانده تحت اسامی مختلفی از قبیل BCK مشبکه ها، BCK - جبر کامل، $FLew$ - جبر l - تگگون های تعویض پذیر باقیمانده صحیح (Rl - تکواره ها) تاکنون مورد بررسی قرار گرفته اند.

^{۲۳}Dilworth

^{۲۴}Ward

^{۲۵}Balbes

^{۲۶}Dwinger

^{۲۷}Parelka

^{۲۸}Idziak

فصل ۱

پیش نیازها