" بدرگاه کبریا و عظمت پروردگار سپاس وستایش می گذارم که ذات لایزالش ازلی است وازلیت بی ابتدایش لایزال وجاویدان است ..... کائنات را با اراده‌ء خویشتن به سیر وسفر وا داشت وهدف خلقت را محبت ذات اقدس خود قرار داد ".

(صحیفه‌ء سجادیه)

۱۴۹۵۵

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مکانیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

حل عددی جریان های برشی مغشوش و تراکم ناپذیر با تقارن محوری

توسط:

محمّدرضا نظری امنیه

زیرنظر:

دکترابراهیم شیرانی دکتر محمّد فرشچی

اسفندماه ۱۳۷۱

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
تهیه مدارک

۱۳۷۲ /۷/ ۱۷

۱۳۷۲ /۷۱

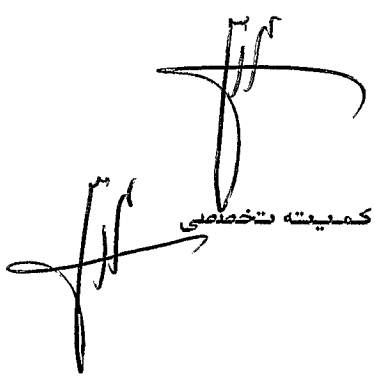
۱۴۹۵۵

بنام خدا

پایان‌نامه کارشناسی ارشد آقای محمدرضا نظری امنیه در جلسه مورخ ۷۱/۱۲/۲۲ کمیته پایان‌نامه متشکل از اساتید ذیل مورد بررسی و تائید قرار گرفت.

۱- آقای دکتر ابراهیم شیرانی — استاد راهنمای رساله

۲- آقای دکتر محمد فرشچی — استاد راهنمای دوم



۳- آقای دکتر علی اصغر رستمی — استاد کمیته تخصصی

۴- آقای دکتر علی اصغر رستمی — مسئول تحصیلات تکمیلی دانشکده

تشکر و قدردانی

لازم می دانم از زحمات بی دریغ استاد گرامی جناب آقای دکتر ابراهیم شیرانی که در طول انجام این پروژه همواره مشوق اینجانب بوده اند تشکر نمایم واز خداوند متعال برای ایشان موفقیت روزافزون آرزو می کنم.

از جناب آقای دکتر محمّد فرشچی که برنامهٔ کامپیوتری را دراختیار اینجانب قرارداده و با راهنمایی های ارزندهٔ خود درانجام این پروژه مرا یاری نموده اند تشکر می نمایم.

ازجناب آقای دکتر علی اصغر رستمی که زحمت بازبینی این گزارش رامتقبّل شده اند سپاسگزارم.

* فهرست *

عنـــوان	صفحه
چکیده	
فصل اوّل: مقدمه	
۱-۱) طبیعت اغتشاش	۱
۱-۲) روش های بررسی جریان مغشوش	٤
۱-۳) مقدمه ای درمورد لایه های مرزی	٦
فصل دوّم: مدل کردن جریان مغشوش	
۲-۱) معادلات متوسط جریان	۱۰
۲-۲) مفاهیم اصولی ودسته بندی مدل های اغتشاش	۱۳
۲-۳) مدل های اغتشاش	۱٦
۲-۳-۱) مدل های صفر معادله ای	۱٦
۲-۳-۲) مدل های یک معادله ای	۱۸
۲-۳-۳) مدل های دو معادله ای	۲۰
۲-۳-٤) مدل های معادله شار/تنش مغشوش	۲۱
۲-٤) شرایط مرزی	۲۹
فصل سوّم: معادلات حاکم بر جریان	
۳-۱) انتخاب دستگاه مختصات	۳۱
۳-۲) معادلات جریان در دستگاه مختصات تقارن محوری	۳۳
۳-۳) معادلات متوسط جریان	۳۷
۳-٤) مدل کردن عبارات مغشوش بااستفاده از مدل تنش رینولدز	۳۸
۳-۵) انتخاب سیستم مختصات محاسباتی	٤۳

عنـــوان | صفحه

فصل چهارم: استخراج معادلات اختلاف محدود

٤-١) معادلات اختلاف محدود ٥١

٤-١-١) معادلات اختلاف محدود برای متغیرهای مربوط به گره های اصلی ٥٥

٤-١-٢) معادلات اختلاف محدود برای کمیت های مربوط به نقاط وسط ٦٠

٤-٢) شرایط مرزی ٦٧

فصل پنجم: برنامهٔ کامپیوتری ٦٩

٥-١) فلوچارت برنامهٔ کامپیوتری ٧١

٥-٢) توضیح مختصر برنامهٔ کامپیوتری ٧٢

فصل ششم: نتایج

٦-١) جت تقارن محوری ٧٥

٦-٢) لایهٔ برشی آزاد دو بعدی ٧٧

٦-٣) لایهٔ مرزی مغشوش در روی صفحه تخت ٧٩

٦-٤) لایهٔ مرزی مغشوش روی اجسام تقارن محوری ٧٩

ضمائم:

ضمیمهٔ الف: مدل های جریان مغشوش ٨٠

ضمیمهٔ ب : منحنی ها ٩٦

ضمیمهٔ ج : مراجع ١٠٩

چکیده

دردهه های اخیر ، تحلیل جریان های برشی مخصوصا لایه مرزی مغشوش ، درمحدوده وسیعی ازمسائل جریان سیال مورد توجه زیاد قرار گرفته است. دراین پروژه یک روش با راندمان بالا برای حل عددی جریان های برشی مغشوش باتقارن محوری مورد بررسی قرار گرفته است. برای حل لایه مرزی مغشوش از برنامه کامپیوتری که قادربه حل جریان های برشی آزاد و جت تقارن محوری میباشد ، استفاده شده است. معادلات حاکم بر جریان براساس ایدهٔ رینولدز متوسط گیری شده و برای بستن معادلات از معادلات دیفرانسیلی تنش ـ رینولدز استفاده شده است. معادلات حاصل دردستگاه مختصات خط جریان نوشته شده و ازطریق قدم به قدم حل می شوند درهرقدم شبکه محاسباتی که به صورت استگرد[1] مورد استفاده قرار میگرد براساس طول ناحیهٔ برشی درامتداد عمود بر جریان در لایه برشی تغییر می یابد. به این ترتیب درهر قدم زمانی حداقل تعداد نقاط درشکبه مورد استفاده قرار میگیرند برای جریان درنزدیکی دیواره تصحیحات مربوط به اعداد رینولدز کوچک در مدل های اغتشاش مورد استفاده قرار گرفته است. برنامه کامپیوتری تدوین شده براین اساس برای سه نوع جریان لایه اختلاط ، جت ولایهٔ مرزی مغشوش تست شده است و نتایج حاصل با آزمایش مقایسه گردیده است.

1- Staggered

فصل اول: مقدمه

اکثر جریان هایی که درطبیعت و درکاربردهای مهندسی به وقوع می پیوندند، جریان مغشوش هستند. لایه مرزی دراتمسفر زمین جریان مغشوش است. همچنین جریان های جت دربالای تروپسفر [1] ، حرکت ابرهای کومولوس [2] ، مسیر آب زیر سطح اقیانوس ها وفوتسفر [3] خورشید و ستاره های شبیه به آن ، نوعی از جریان مغشوش هستند.

رشد لایه مرزی روی بال های ایرکرافت ، جریان گازهای طبیعی و روغن درخطوط لوله نیز جریان مغشوش هستند. مهندسین شیمی برای همگن کردن مخلوط های سیال وافزایش نرخ عمل های شیمیایی درمایعات یا گازها ازاغتشاش استفاده می کنند. بنابراین باتوجه به کاربرد وسیع جریان مغشوش ، واضح است که مطالعات بسیار زیاد و منظمی باید دررابطه بااین جریان انجام گیرد.

۱-۱) طبیعت اغتشاش [1]

هرشخصی که جریان خروج دود از دودکش رامشاهده کرده باشد، ایده ای دررابطه باطبیعت جریان مغشوش دارد. باوجود این تعریف دقیقی برای جریان مغشوش نیست و توصیف آن بسیار مشکل است. بطور کلی میتوان خصوصیات جریان مغشوش رابه صورت زیر خلاصه کرد.

1- Troposphore
2- Cumulus
3- Photosphere

الف) بی نظمی

بی نظمی یکی ازمشخصات تمام جریان های مغشوش است. واین باعث میگردد که حل جریان مغشوش بسیار مشکل شود.

ب) انتشار [1]

انتشار اغتشاش که سبب مخلوط شدن سریع ذرات و افزایش نرخ انتقال مومنتم ، حرارت و جرم می شود، یکی دیگر از خصوصیات مهم جریان مغشوش است. اگر یک جریان بی نظم باشد ولی سرعت نوسان ها درمحیط سیال منتشر و پخش نگردد، یقیناً جریان مغشوش نیست. انتشار اغتشاش یکی از مهمترین خواص جریان مغشوش بوده که کاربرد وسیعی دارد، ازجمله جلوگیری از ایجاد جدایی روی ایر فویل در زاویه های حمله بالا ، افزایش نرخ انتقال حرارت درانواع ماشینها وهمچنین منبع مقاومت جریان درخطوط لوله است.

ج) عدد رینولدز بزرگ

جریان های مغشوش همواره دراعداد رینولدز بالا بوجود می آیند. اغتشاش اغلب دراثر ناپایداری جریان های آرام بازیاد شدن عدد رینولدز ایجاد میگردد. ناپایداری ها باتاثیر متقابل عبارت لزجت و عبارت غیر خطی اینرسی درمعادلات حرکت رابطه دارند. این تاثیر متقابل دوعبارت برهم ، خیلی پیچیده است.

دوعامل بی نظمی و غیر خطی بودن جریان باعث میگردد که معادلات جریان مغشوش بسیار پیچیده شوند، و برای حل این معادلات روش های ریاضی قوی نیاز است.

د) نوسانات چرخش سه بعدی

اغتشاش چرخشی وسه بعدی است. اغتشاش باچرخش شدید نوسانات مشخص می شود. به این دلیل دینامیک چرخش درقوانین اساسی توزیع جریان مغشوش نقش دارد. اگر نوسانات سرعت دوبعدی باشد، نوسان های تصادفی چرخش وجود نخواهند داشت. جریان های که ذاتاً دوبعدی هستند، همانند گردبادها دراتمسفر، خودشان مغشوش نیستند، اگر چه ممکن است تحت تاثیر ادی های کوچک مغشوش قرار بگیرند.

بطور خلاصه جریان های مغشوش همیشه نشان دهنده چرخش نوسانی درسطح بالا هستند. بعنوان مثال امواج تصادفی درروی سطح اقیانوس ها حرکت مغشوش نیستند، بدلیل اینکه اساساً غیر چرخشی می باشند.

1- Diffusivity

هـ) اتلاف [1]

جریان های مغشوش همواره تلف کننده هستند. تنش برشی لزجت که باعث عمل تغییر شکل است ، باصرف انرژی جنبشی مغشوش ، انرژی داخلی سیال را افزایش میدهد. اغتشاش برای جبران افت های لزجت [2] به طور پیوسته نیاز به تامین انرژی دارد. درصورتیکه انرژی تامین نشود ، اغتشاش به سرعت ازبین میرود. حرکت های تصادفی همانند امواج ثقلی درجو سیاره ها وامواج صوتی تصادفی افت لزجت قابل ملاحظه ای ندارند و بنابراین مغشوش نیستند. به عبارت دیگر تفاوت عمده بین موج های تصادفی و اغتشاش این است که موجها اساساً تلف کننده نیستند ، درحالیکه اغتشاش تلف کننده است.

و) پیوستگی

اغتشاش یک پدیده پیوسته است که ازمعادلات مکانیک سیالات تبعیت می کند. حتی کوچکترین مقیاس ها (کوچکترین ادی ها) که دریک جریان مغشوش بوجود می آیند ، بسیار بزرگتر ازمقیاس طولی مولکولی هستند.

ز) اغتشاش خاصیت جریان است.

اغتشاش یک خاصیت سیال نبوده بلکه ازخواص جریان است. اگر عدد رینولدز اغتشاش به اندازه کافی بزرگ باشد ، قسمت عمدهٔ دینامیک اغتشاش درتمام سیال ها چه گازباشد و چه مایع یکسان است. اکثر مشخصه های جریان مغشوش به خواص مولکولی سیالی که درآن اغتشاش اتفاق می افتد بستگی ندارد.

بدلیل اینکه معادلات حرکت غیرخطی هستند ، هرجریان بخصوصی مشخصات منحصر بفرد خودش رادارا است که باشرایط مرزی و اولیهٔ مربوط به خود دررابطه است. هیچ حل عمومی برای معادلات ناویر استوکس وجود ندارد ، درنتیجه حل عمومی برای جریان مغشوش هم دردسترس نیست

محققینی که دررابطه بااغتشاش مطالعه می کنند ، به یک جریان مغشوش منحصر بفرد توجهی نداشته ، بلکه تلاش آنها برای کشف و فرموله کردن قوانینی است که یک خانواده از جریان های مغشوش رادر بر گیرد. مشخصات اغتشاش بستگی به محیط آنها دارد. به این دلیل تئوری اغتشاش ، جریان مغشوش رادرحالت کلی بررسی نمی کند ، وتئوری پردازان روی خانواده ای ازجریان هایی باشرایط مرزی نسبتا ساده مانند لایه های مرزی ، جت ها و دنبال ها مطالعه می کنند.

اغتشاشات موجود درجریان مغشوش رانمی توان ازطریق تجربی یاتئوریک بدست آورد. درصورتیکه حل دقیق

1- Dissipation
2- Viscous lossess

معادلات ناویر استوکس دردسترس بود، میتوانستیم اغتشاشات رابه دست آوریم (لازم به توضیح است که این موضوع درحالتی صادق است که رفتار نیوتنی سیال، درنتیجه معالات ناویر استوکس بتواند جریان مغشوش سیال راتوجیه کند). ولی اشکال این است که با کامپیوتر های موجود فقط میتوان جریان هایی ساده وباعدد رینولدز کم که اندازه ادی های داخل جریان چندان کوچک نیستند رامحاسبه نمود. انتظار میرود حتی بااستفاده از کامپیوتر های نسل های آینده هم نتوان جریان مغشوش رادرحالت کلی حل نمود.

درحال حاضر قسمت اعظم روشهای بررسی جریان مغشوش استفاده از ایده آسبرن رینولدز است. بدین ترتیب که ازطریق انتگرال گیری، از معادلات ناویر ـ استوکس نسبت به مکان یازمان متوسط گرفته و این معادلات رابرحسب سرعت های متوسط جریان می نویسیم. ازطرفی ازآنجا که معادلات غیر خطی هستند، معادلات متوسط جریان شامل عبارات مربوط به اغتشاشات جریان بوده و لازم است این عبارات مدل شوند تابتوان معادلات راحل نمود. مدل کردن اغتشاشات جریان دربع قرن اخیر به شدت مورد توجه قرار گرفته است و انتظار میرود این روند باشدت بیشتری درسال های آینده ادامه یابد.

۱-۲) روش های بررسی جریان مغشوش [۲]

دراین قسمت به روش های بررسی جریان مغشوش می پردازیم. بطور کلی جریان های مغشوش رامیتوان به سه دسته جریان همگن [۱]، جریان برشی آزاد [۲] ،و جریان نزدیک دیواره [۳] (لایه مرزی) [٤] تقسیم کرد. درجریان های همگن حالت سیال به مکان بستگی نداشته و درهمه جای جریان یکسان است وفقط بازمان تغییر می کند. جریان های برشی بانرخ تغییر شکل زاویه ای ثابت نمونه ای از جریان های همگن است. جریان های برشی آزاداز قبیل جریان دنباله ها ویا جت بسیار ناپایدار هستند. تمرکز چرخش دراین جریان هاسبب ایجاد حرکات ادیهای بزرگ درجریان شده واین خود سبب تشدید اغتشاش درجریان می گردد. بالاخره درلایه مرزی مغشوش به علت وجود دیواره، ادی های بزرگ و حرکت های ناپایدار آنها که در جریان های برشی آزاد دیده می شود وجود ندارد، ولایه مرزی وسایر خواص مغشوش جریان بانرخ کمتری توسعه یافته و اغتشاشات کمتری درجریان دیده می شود. درعوض مکانیزم تولید اغتشاش درجریان نسبت به حالت جریان های برشی آزاد ناشناخته تر بوده وبه همین دلیل این نوع جریان را پیچیده تر می نماید. در کلیه جریان های فوق، روش های بررسی جریان های مغشوش براساس نحوه مدل کردن اغتشاشات درجریان رامیتوان بصورت زیر تقسیم بندی کرد.

1- Homogeneous flows
2- Free - Shear flows
3- Wall - bounded flows
4- Boundary layer flow

الف) روابط تجربی

روابط تجربی متعددی می توان یافت که ضریب اصطکاک جریان مغشوش روی دیواره برحسب عدد رینولدز وعدد پاارندتل نشان میدهد. این روابط بسیارمفید بوده ومورد استفاده زیادی قرار می گیرند. البته هریک ازاین روابط درمحدوده مشخصی صادق بوده و عمومیت ندارد. محدودیت استفاده از این روابط مخصوصاً در کاربرد های تکنولوژی بالا که درآن هندسه مسئله رل مهمی راایفا می نماید، نمایان می گردد. درچنین مسائلی (مثل جریان روی ایرفویل) باتغییر جزئی هندسه مسئله ، روابط تجربی جداگانه ای باید بدست آورد.

ب) روش انتگرالی

درچنین روش هایی معادلات اصلی جریان سیال درامتداد لااقل یکی ازمحورهای مختصات انتگرال گیری می شود. به این ترتیب تعداد متغیرهای مسئله کاهش یافته وروابط ریاضی مسئله راتاحد زیادی ساده می نماید. درروش های انتگرالی ازنتایج تجربی و فیزیک مسئله میتوان استفاده نمود. نتایج حاصل ازچنین روش هایی بسیار مفید بوده ومورد استفاده زیادی قرار میگیرد. اشکال عمده این روشهااین است که برای هرنوع جریان مشخصی باید روابط خاص خودرانوشته وساده کرد. ضمناً نتایج حاصله از این روش ها ، رفتار کلی جریان رابه دست میدهد.

ج) معادلات متوسط جریان

دراین روش معادلات ناویر - استوکس نسبت به زمان ویامکان یافاصله زمانی نسبتاً کوچک انتگرال گیری می شود. نتایج حاصل ، معادلات متوسط جریان یامعادلات متوسط رینولدز [1] نامیده می شود. معادلات متوسط بدست آمده که جریان متوسط سیال راتوصیف می نمایند، شامل مقادیر متوسط حاصل ضربت مولفه های نوسانی سرعت نیز میباشند که بصورت عبارات مجهول به تعداد مجهولات معادله افزوده می شوند. درحقیقت به این ترتیب هرگز نمی توان ازطریق انتگرل گیری مجدد معادلات سرعت های نوسانی سیال ، تعداد معادلات و مجهولات رایکسان فرض کرد. معادلات جریان درهربار انتگرال گیری ، شامل عبارات بامجهولات جدیدی می باشند که باید آنها رامدل کرد و لذا لازم است از مدل هایی برای عبارات مجهول استفاده نمود. این مسئله درحال حاضر مورد توجه زیاد محققین بوده و سهم زیادی درتحقیقات روی جریان های مغشوش رابه خوداختصاص داده است.

د) روش ادیهای بزرگ

درروش ادی های بزرگ معادلات نسبت به فواصل بسیار کوچک انتگرال گیری می شوند، و درنتیجه اغتشاشات (نوسانات) بسیار ریز که مربوط به ادی های کوچک درجریان میباشد ازمعادلات حذف می گردند

1- Reynolds average equations

ومعادلات به دست آمده معرف رفتار ادی های بزرگ در جریان می باشند. اثر ادی های کوچک برروی ادی های بزرگ ازطریق مدل کردن آنها درمعادلات منظور می گردد.

هـ) روش حل کامل معادلات جریان

دربررسی حل کامل معادلات جریان ، حل عددی معادلات کامل ناویر ـ استوکس بدون مدل سازی مورد بررسی قرار میگیرد. تنها خطای حاصل از این بررسی ، دراثر خطاهای حل عددی مسئله می باشد. دراین روش میتوان کلیه ادیهای ازکوچک تابزرگ رادرجریان محاسبه و رفتار آنها رابدست آورد. روش های مذکور در بند های د ، و ، هـ ، درفوق صرفاً ازطریق استفاده از کامپیوترهای بزرگ و سریع امکان پذیر است. دراین پروژه برای حل جریان مغشوش ازروش بند ، ج ، استفاده شده است.

۱ـ۳) مقدمه ای درمورد لایه های مرزی

دردهه های اخیرمفهوم پدیده لایه مرزی بالاخص لایه مرزی مغشوش درمحدوده وسیعی ازرشته هایی شامل مهندسی هوافضا ، مهندسی دریائی ، مهندسی زیردریائی ، هواشناسی ، اقیانوس شناسی ، مهندسی شیمی ، مهندسی بهداشت ، رأکتورهای اتمی ، ستاره شناسی و همچنین درمورد جریان مایعات و گازها دربدن انسان کاربرد پیدا کرده است. هرچه دامنه تخصص ها در زمینه لایه مرزی افزایش یافته تعداد سئوالات مطرح شده درزمینه رفتار این لایه ها نیز زیاد شده است.

لایه مرزی روی صفحه تخت [٤]

بعنوان نمونه ، به بررسی لایه مرزی روی صفحه تخت می پردازیم. فرض می کنیم یک جریان یکنواخت سیال با سرعت V_{str} روی کی صفحه تخت درحرکت است (شکل ۱ـ۱). سیالی که درنزدیکی جداره جامد است ، دراثر تماس باجداره سرعت آن تقریبابرابر صفرمی گردد. بین سطح جامد و جریان آزاد سیال سرعت جریان V_{str} باید از صفر تا V_{str} افزایش یابد. این ناحیه ازسیال لایه مرزی نامیده می شود. درداخل لایه مرزی ، سیال با سرعتی کمتر از سرعت جریان آزاد حرکت می کند. دراثر افزایش فاصله ازابتدای صفحه به علت وجود نیروی اصطکاک افت جریان زیادتر شده ، سرعت جریان کم می شود و درنتیجه لایه مرزی ضخیم می گردد. عدد رینولدز برای لایه مرزی رامیتوان به صورت زیر تعریف کرد.

$$Re_b = V_{str}\, y_b/\nu \qquad (۱-۱)$$

که y_b ضخامت لایه مرزی است. درعمل لایه مرزی مغشوش درمحدوده $Re_b > ۱۵۰۰$ ایجادمی شود. درابتدای صفحه لایه مرزی آرام وجود دارد که ضخامت لایه مرزی آرام به صورت زیر است.

$$y_b = 5(x\nu / v_{str})^{1/2} \qquad (۱-۲)$$

که X فاصله از ابتدای صفحه است. درعدد رینولدز حدود $Re_b = ۱۵۰۰$ لایه مرزی آرام ناپایدار می شود و این رقم بر حسب عدد رینولدز برمبنای x به صورت $R_{ex} = \frac{V_{str}x}{\nu} = 10^5$ محاسبه می شود. بنابراین فاصله x ازابتدای صفحه که جریان لایه مرزی ناپایدار می شود به صورت زیر بدست می آید.

$$x = 10^5\ \nu/U_{str} \qquad (۱-۳)$$

$$Re_x = 10^5$$

میزان نوسانات سرعت سیال تا ۵ درصد سرعت متوسط سیال است. اگر $Re_b = 3 \times 10^6$ باشد، اغتشاش ایجاد شده ۰/۳ درصدیاکمتر خواهد بود.

$$\tilde{V}_{x}' = [\overline{(V'^2)_x}]^{1/2}$$

سرعت درلایه مرزی مغشوش

برای بررسی خواص لایه مرزی مغشوش ، ساده ترین راه شروع ازجریان مغشوش توسعه یافته درلوله است. معادله تجربی بلازیوس [1] برای این حالت به صورت زیر است.

$$\tau_0/\rho V_m^2 = 0.04\ (2aV_m/\nu)^{-1/4} \qquad (۱-۶)$$

که V_m سرعت متوسط و a شعاع لوله صاف است. برای جریان مغشوش دریک لوله $V_m = 0.8/7\overline{V}_{xc}$ است و بنابراین تنش τ_0 به صورت زیر است.

$$\tau_0 = 0.023\ \rho\ [\overline{V}_{xc}]^2\ [a\overline{v}_{xc}/\nu]^{-1/4}$$

تنش τ_0 نیرویی که برواحد سطح هرقسمت از دیوارهٔ لوله عمل می کند است. به صورت مشابه میتوانیم معادله ای برای تنش روی صفحهٔ تخت ، درحالتیکه سرعت جریان آزاد V_{str} است ، بدست آوریم. بااین فرض معادلهٔ فوق به صورت زیر نوشته می شود.

$$\tau_0 = 0.023\ \rho V^2_{str}\ (V_{str}Y_b/\nu)^{-1/4} \qquad (۱-۷)$$

اگرپروفیل سرعت درلایه مرزی مغشوش رابه صورت زیر نشان دهیم.

1- Blasius

$$\left(\frac{\overline{V}_x}{V_{str}}\right) - = \left(\frac{y}{y_b}\right)^{\gamma} \qquad (۱-۸)$$

درآن صورت بااستفاده از معادله (۱-۶) می توانیم توان γ رابدست آورد.

$$\tau_0 \alpha \overline{V}_x^{1.75} y_b^{(1.75^{\gamma} - 0.25)} y^{-1.75^{\gamma}} \qquad (۱-۹)$$

اگر پروفیل سرعت برای تمام سرعت های جریان همانند باشد، درنتیجه τ_0 باید فقط به $\overline{V}_x$ و y بستگی داشته باشد. ضخامت لایهٔ مرزی یک متغیر مستقل نیست، ونباید درشکل کلی پروفیل سرعت اثر داشته باشد. بنابریان اگر توان y_b رادرمعادله فوق قرار دهیم، دراین صورت معادله سرعت به صورت زیر بدست می آید.

$$\gamma = 1/7$$

$$\overline{V}_x = V_{str} (y/y_b)^{1/7}$$