footnote

دانشگاه مراغه

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان:

یک نامساوی مرتبط با نوع مینکوفسکی برای انتگرال‌های سوگینو

استاد راهنما:

دکتر بیاض دارابی

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا عظیمی

پژوهشگر:

مریم محسنی اسفستانج

تابستان ۱۳۹۲

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم.

نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر بیاض دارابی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر محمدرضا عظیمی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. از جناب آقای دکتر اصغر رحیمی که زحمت داوری این رساله را تقبل فرمودند تشکر می کنم.

و در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

مریم محسنی اسفستانج

تابستان ۱۳۹۲

نام خانوادگی: محسنی اسفستانج نام: مریم

عنوان پایان‌نامه: یک نامساوی مرتبط با نوع مینکوفسکی برای انتگرال‌های فازی

استاد راهنما: دکتر بیاض دارابی استاد مشاور: دکتر محمدرضا عظیمی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد
رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: مراغه دانشکده: علوم پایه
تاریخ فارغ‌التحصیلی: تابستان ۱۳۹۲ تعداد صفحه: ۹۰

کلیدواژه‌ها: نامساوی مینکوفسکی، توابع هم‌یکنوا، اندازه فازی، انتگرال سوگینو

چکیده

در این پایان‌نامه، در حالت کلی یک نامساوی مرتبط با نوع مینکوفسکی برای انتگرال‌های سوگینو روی فضاهای مجرد مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برخی نتایج به دست آمده توسط مولفان دیگر روی نامساوی چی‌بی‌شف تعمیم داده می‌شود [۴، ۷]. درستی نامساوی‌های فوق با مثال‌های متعدد مورد بررسی و تحقیق قرار می گیرد.

فهرست مطالب

پیشگفتار

منطق فازی [۱] در سال ۱۹۶۵ توسط پرفسور لطفی‌زاده [۲] از دانشگاه کالیفرنیا در حالت کلی ارائه شد. در سال ۱۹۷۲ میشو سوگینو [۳] از انستیتو تکنولوژی توکیو نظرات زاده را با ارائه مفاهیم اندازه فازی و انتگرال فازی (معروف به انتگرال سوگینو) تعقیب کرد. سوگینو اندازه فازی را مانند توابع مجموعه‌ای پیوسته و یکنوا با هدف ارزیابی کمیت غیر جمعی [۴] در دستگاه های مهندسی معرفی کرد. اندازه‌ها و انتگرال‌های فازی می‌توانند برای مدل‌سازی مسائل در محیط‌های نامعین مورد استفاده قرار گیرند. بعد از معرفی اندازه و انتگرال فازی توسط سوگینو، این مفاهیم توسط افراد بسیاری مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. از جمله رالسکو [۵] و آدامز [۶] برد اندازه فازی را از $[0,1]$ به $[0,\infty]$ تعمیم داده و چندین تعریف معادل از انتگرال‌های فازی ارائه نمودند. در حالی که پاپ [۷]، کلیر [۸] و وانگ [۹] مرور کلی از نظریه اندازه‌های فازی ارائه نمودند. رومن-فلورس [۱۰] و دیگر همکارانش جنبه های سطح-پیوستگی و H-پیوستگی انتگرال‌های فازی را بررسی کرده‌اند.

نامساوی‌های انتگرال، نتایج مفیدی در زمینه‌های کاربردی و نظری دارند. در کل هر نامساوی انتگرالی می‌تواند ابزاری قوی برای کاربردها باشد. مطالعه نامساوی‌های برای انتگرال سوگینو توسط رومن-فلورس و چالکو-کانو [۱۱] شروع شد و سپس توسط بسیاری از محققان ادامه یافت. رومن-فلورس و تنی چند از

[۱] Fuzzy logic
[۲] Lotfi Zadeh
[۳] M. Sugeno
[۴] Non-additive
[۵] D. Ralescu
[۶] G. Adams
[۷] E. Pap
[۸] Klir
[۹] Wang
[۱۰] Román-Flores
[۱۱] Y. Chalco

همکارانش برخی کران های بالای بهینه را برای انتگرال فازی توابع یکنوا ارائه کرده و نامساوی یانگ را برای انتگرال سوگینو ارائه داده اند. در ادامه یک نوع نامساوی ینسن [۱۲]، نامساوی پیچشی [۱۳]، نامساوی چی‌بی‌شف [۱۴] و نامساوی استولارسکی [۱۵] را برای این انتگرال‌ها به دست آورده‌اند. در [۴] یک نوع نامساوی چی‌بی‌شف، برای یک حالت ویژه به دست آمده که توسط مسیار [۱۶] و ایانگ [۱۷] در [۷] تعمیم یافته است. بررسی نامساوی مینکوفسکی برای انتگرال‌های سوگینو توسط آگاهی [۱۸] و یعقوبی [۱۹] [۳] شروع شده و توسط یعقوبی [۱] تعمیم یافته است و سپس آگاهی، یک نوع نامساوی مرتبط به مینکوفسکی [۲] برای انتگرال‌های سوگینو توسط توابع هم یکنوا، نسبت به اندازه فازی دلخواه روی یک فضای اندازه فازی مجرد به دست آورده است، که این پایان نامه توسیعی از کار ایشان می باشد.

این پایان‌نامه در سه فصل به صورت زیر تنظیم شده است:

فصل اول شامل ارائه مفهوم اندازه و انتگرال فازی است.

در فصل دوم، کران بالای انتگرال سوگینو و نامساوی تعمیم یافته چی‌بی‌شف و نامساوی تعمیم یافته مینکوفسکی را بیان می‌کنیم.

در فصل سوم، که فصل اصلی پایان‌نامه است، یک نامساوی مرتبط با نوع مینکوفسکی را برای انتگرال سوگینو بیان می‌کنیم.

[۱۲] Jensen inequality
[۱۳] Convolution inequality
[۱۴] Chebyshev inequality
[۱۵] Stolarsky inequality
[۱۶] R. Mesiar
[۱۷] Y. Oyang
[۱۸] H. Aghahi
[۱۹] M. A. Yaghoobi

فصل ۱

اندازه و انتگرال فازی

در این فصل، تعاریف و قضایای مقدماتی و برخی از نمادهایی را که در سه فصل آتی مورد نیاز است، معرفی می‌کنیم. این فصل شامل هفت بخش است که در بخش اول مفاهیمی از اندازه کلاسیک و در بخش دوم اندازه فازی را بیان می‌کنیم و در بخش سوم توابع اندازه‌پذیر را معرفی می‌کنیم. در بخش های چهارم و پنجم بترتیب انتگرال فازی (معروف به انتگرال سوگینو) را تعریف می‌کنیم و به بررسی ویژگی های مهم آن می‌پردازیم. و در بخش ششم t− نرم ها و t− همنرم ها را معرفی می‌کنیم و در بخش هفتم نیز توابع هم یکنوا را تعریف می‌کنیم.

۱.۱ مفاهیمی از اندازه کلاسیک

تعریف ۱.۱.۱. یک فضای اندازه‌پذیر دوتایی (X,Σ) است که X یک مجموعه و Σ یک σ−جبر از زیرمجموعه‌های X است، به طوری که:

۱) $X \in \Sigma$،

۲) فرض کنیم A یک زیرمجموعه از X باشد. اگر $A \in \Sigma$، آنگاه $A^c \in \Sigma$،

۳) اگر برای هر $\infty > n \geq ۱$، $A_n \in \Sigma$، آنگاه $\cup_{n=۱}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم (X,Σ) یک فضای اندازه پذیر باشد. یک اندازه مثبت روی Σ تابعی مانند $\mu:\Sigma\to[۰,\infty]$ است، به طوری که در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند:

۱) $\mu(\emptyset)=۰$،

۲) اگر $\{E_j\}_{j=۱}^{\infty}\subseteq\Sigma$ دنباله‌ای دو به دو مجزا از مجموعه‌ها باشد، آنگاه $\mu(\cup_{j=۱}^{\infty}E_j)=\sum_{j=۱}^{\infty}\mu(E_j)$.

سه تایی (X,Σ,μ) یک فضای اندازه نامیده می‌شود که μ یک اندازه روی Σ است.

قضیه ۳.۱.۱. *(ویژگی‌های پایه‌ی اندازه‌ها). فرض کنیم (X,Σ,μ) یک فضای اندازه باشد. آنگاه μ دارای ویژگی‌های زیر است:*

۱) *(یکنوایی) اگر $E,F\in\Sigma$ و $E\subseteq F$، آنگاه $\mu(E)\leq\mu(F)$،*

۲) *(زیرجمعی شمارا) اگر $\{E_j\}_{j=۱}^{\infty}\subseteq\Sigma$، آنگاه $\mu(\cup_{j=۱}^{\infty}E_j)\leq\sum_{j=۱}^{\infty}\mu(E_j)$،*

۳) *(پیوستگی از پائین) اگر $\{E_j\}_{j=۱}^{\infty}\subseteq\Sigma$، که $E_۱\subseteq E_۲\subseteq\ldots$ آنگاه $\mu(\cup_{j=۱}^{\infty}E_j)=\lim_{j\to\infty}\mu(E_j)$،*

۴) *(پیوستگی از بالا) اگر $\{E_j\}_{j=۱}^{\infty}\subseteq\Sigma$، که $E_۱\supseteq E_۲\supseteq\ldots$ و $\mu(E_۱)<\infty$، آنگاه*

$$\mu(\cap_{j=۱}^{\infty}E_j)=\lim_{j\to\infty}\mu(E_j).$$

۲.۱ اندازه فازی

اندازه های فازی تعمیمی از مفهوم اندازه در آنالیز ریاضی‌اند، که فقط خاصیت یکنوایی را دارند و در کل به اندازه‌های غیرجمعی معروف‌اند. یک اندازه فازی روی مجموعه‌ای مانند X، یک تابع تعریف

شده روی برخی از زیرمجموعه‌های X است. در کل دامنه اندازه‌های فازی می‌تواند یک خانواده یکنوا از زیرمجموعه‌هایی باشد که شامل X و $\emptyset$ است، و تحت حدگیری دنباله‌های یکنوا از زیرمجموعه‌های X، بسته است.

این بخش را با ارائه مفاهیم اندازه فازی که سوگینو برای اولین بار در سال ۱۹۷۴ معرفی کرده، آغاز می‌کنیم [۱۸]:

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد. یک میدان بورل روی X، زیرمجموعه‌ای مانند $\mathcal{B}$ از $\mathcal{P}(X)$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) $\emptyset \in \mathcal{B}$،

۲) اگر $E \in \mathcal{B}$، آنگاه $X - E \in \mathcal{B}$،

۳) اگر برای هر $۱ \leq n < \infty$، $E_n \in \mathcal{B}$ آنگاه $\cup_{n=۱}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}$.

برای مثال، یک میدان بورل روی یک مجموعه ناتهی مانند X، مجموعه توانی $\mathcal{P}(X)$ از X است.

تعریف ۲.۲.۱. اگر X یک مجموعه ناتهی و $\mathcal{B}$ یک میدان بورل روی X باشد، آنگاه $(X, \mathcal{B})$ یک فضای اندازه‌پذیر نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم $(X, \mathcal{B})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. تابع مجموعه‌ای $\mu : \mathcal{B} \to [۰, ۱]$ یک اندازه فازی کلی [۱] روی $(X, \mathcal{B})$ نامیده می‌شود، اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱) (شرایط مرزی) $\mu(\emptyset) = ۰$ و $\mu(X) = ۱$،

[۱] General fuzzy measure

۲) (یکنوایی) اگر $E, F \in \mathcal{B}$ و $E \subseteq F$، آنگاه $\mu(E) \leq \mu(F)$،

۳) (پیوستگی) اگر برای هر $1 \leq n < \infty$، $E_n \in \mathcal{B}$ و $\{E_n\}$ یکنوا باشد، آنگاه

$$\mu(\lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

تذکر ۴.۲.۱. *شرایط پیوستگی برای همه اندازه‌های فازی برقرار نیست.*

رالسکو و آدامز برد اندازه فازی را از $[0, 1]$ به $[0, \infty]$ گسترش داده و یک تعریف معادل از اندازه فازی ارائه داده‌اند [۱۴].

تعریف ۵.۲.۱. (اندازه فازی). تابع مجموعه‌ای $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ یک اندازه فازی نامیده می‌شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱) $\mu(\emptyset) = 0$،

۲) (یکنوایی) اگر $E, F \in \Sigma$ و $E \subseteq F$، آنگاه $\mu(E) \leq \mu(F)$،

۳) (پیوستگی از پائین) اگر $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ و $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)$،

۴) (پیوستگی از بالا) اگر $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ و $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$ و $\mu(E_1) < \infty$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(\cap_{n=1}^{\infty} E_n).$$

تعریف ۶.۲.۱. μ یک اندازه نیم پیوسته پائین (بالا) فازی روی (X, Σ) نامیده می‌شود، اگر در شرایط (۱)، (۲) و (۳) ((۱)، (۲) و (۴)) تعریف فوق صدق کند. برای اختصار به اندازه‌های نیم پیوسته پائین و بالای فازی، اندازه‌های نیم پیوسته فازی می‌گوئیم.

• اندازه فازی یا اندازه نیم پیوسته فازی منظم [۲] نامیده می‌شود، اگر $\mu(X) = ۱$ باشد.

• اگر μ یک اندازه فازی (یا یک اندازه نیم پیوسته فازی) باشد، آنگاه سه تایی (X, Σ, μ) یک فضای اندازه فازی (یک فضای اندازه نیم پیوسته فازی) نامیده می‌شود.

مثال ۱.۲.۷. *فرض کنیم μ اندازه دیراک [۳] روی (X, Σ) باشد، یعنی برای هر $E \in \Sigma$،*

$$\mu(E) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر} \quad x_۰ \in E \\ ۰ & \text{اگر} \quad x_۰ \notin E, \end{cases}$$

که $x_۰$ یک نقطه ثابت از X است. μ یک اندازه فازی منظم می‌باشد.

مثال ۱.۲.۸. *فرض کنیم $X = (-\infty, +\infty)$ و $(X, \mathcal{P}(X))$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. اگر $f : X \to [۰, ۱]$ به گونه‌ای تعریف شود که $\inf_{x \in X} f(x) = ۰$، آنگاه تابع مجموعه‌ای μ که با رابطه $\mu(E) = \inf_{x \notin E} f(x)$ به ازای هر $E \in \mathcal{P}(X)$ تعریف می‌شود، یک اندازه فازی نیم پیوسته بالایی و منظم است.*

مثال ۱.۲.۹. *فرض کنیم $X = \{a, b, c, d\}$ و $\Sigma = \mathcal{P}(X)$. آنگاه تابع مجموعه‌ای μ،*

$$\mu(E) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر} \quad E = X \\ ۰ & \text{اگر} \quad E = \emptyset \\ \frac{۱}{۳} & \text{در غیر این صورت}, \end{cases}$$

یک اندازه فازی منظم است.

مثال ۱.۲.۱۰. *فرض کنید $f(x)$ تابعی نامنفی و حقیقی مقدار توسعه یافته باشد که روی $X = (-\infty, +\infty)$ تعریف شده است. اگر برای هر $E \in \mathcal{P}(X)$، $\mu(E) = \sup_{x \in E} f(x)$ باشد آنگاه μ یک اندازه فازی نیم پیوسته پایینی است.*

---

[۲] Regular

[۳] Dirac measure

۳.۱ توابع اندازه پذیر

فرض کنیم (X,Σ) *یک فضای اندازه‌پذیر و* $\mu:\Sigma\rightarrow[\circ,+\infty]$ *یک اندازه فازی (یا اندازه نیم پیوسته فازی) و* $\mathcal{B}$ *میدان بورل روی* $(-\infty,+\infty)$ *باشد. تعریف تابع اندازه پذیر روی یک فضای اندازه فازی* (X,Σ,μ) *همانند تعریف یک تابع اندازه پذیر در نظریه آنالیز کلاسیک است و ارتباطی با تابع مجموعه‌ای* μ *ندارد.*

تعریف ۱.۳.۱. تابعی با مقدار حقیقی $f:X\longrightarrow(-\infty,\infty)$ روی X ، Σ -اندازه‌پذیر (یا بطور خلاصه اندازه‌پذیر) است اگر و تنها اگر برای هر مجموعه بورل $B\in\mathcal{B}$ داشته باشیم:

$$f^{-1}(B)=\{x|\ f(x)\in B\}\in\Sigma.$$

قضیه ۲.۳.۱. *اگر* $f:X\longrightarrow(-\infty,\infty)$ *تابع با مقدار حقیقی باشد آنگاه گزاره‌های زیر معادلند:*

۱) f *اندازه‌پذیر است.*

۲) *برای هر* $\alpha\in(-\infty,\infty)$ ، $\{x|\ f(x)\geq\alpha\}\in\Sigma$.

۳) *برای هر* $\alpha\in(-\infty,\infty)$ ، $\{x|\ f(x)>\alpha\}\in\Sigma$.

۴) *برای هر* $\alpha\in(-\infty,\infty)$ ، $\{x|\ f(x)\leq\alpha\}\in\Sigma$.

۵) *برای هر* $\alpha\in(-\infty,\infty)$ ، $\{x|\ f(x)<\alpha\}\in\Sigma$.

برهان. ۲ $\rightarrow$ ۱.

$$\{x|\ f(x)\geq\alpha\}=f^{-1}([\alpha,\infty))$$

و همچنین $[\alpha,\infty)$ یک مجموعه بورل است. با توجه به فرض خواهیم داشت $f^{-1}([\alpha,\infty)) \in \Sigma$. بنابراین $\{x|\ f(x)\geq \alpha\}\in\Sigma$.

۱ → ۲. اگر برای هر $\alpha\in(-\infty,\infty)$؛

$$\{x|\ f(x)\geq \alpha\}\in\Sigma$$

آنگاه برای هر $B\in\{[\alpha,\infty)|\ \alpha\in(-\infty,\infty)\}$،

$$f^{-1}(B)\in\Sigma.$$

اگر $\mathfrak{A}=\Big\{B|\ f^{-1}(B)\in\Sigma\Big\}$ و $\varphi=\{[\alpha,\infty)|\ \alpha\in(-\infty,\infty)\}$ آنگاه برای هر $B\in\mathfrak{A}$ داده شده $\varphi\subset\mathfrak{A}$ پس $B^c\in\mathfrak{A}$. چون $f^{-1}(B^c)=(f^{-1}(B))^c\in\Sigma$ پس $\mathfrak{A}$ تحت عملگر متمم بسته است. بطور مشابه برای هر $\{B_n\}\subset\mathfrak{A}$ داریم $\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\in\mathfrak{A}$. چون $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(B_n)\in\Sigma$ پس $\mathfrak{A}$ تحت عملگر اجتماع شمارا نیز بسته است پس $\mathfrak{A}$ یک σ -جبر است در نتیجه $\mathcal{B}=\Sigma(\varphi)\subset\mathfrak{A}$ و این یعنی f تابع اندازه‌پذیر است.

اثبات بقیه‌ی قسمت‌ها نیز مشابه است. ■

نتیجه ۳.۳.۱. *اگر f تابع اندازه‌پذیر باشد آنگاه برای هر* $\alpha\in(-\infty,\infty)$،

$$\{x|\ f(x)=\alpha\}\in\Sigma.$$

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنیم (X,Σ,μ) یک فضای اندازه فازی باشد. مجموعه همه توابع اندازه پذیر نسبت به Σ و نامنفی $f:X\to[0,+\infty)$ را به $\mathcal{F}_+(X)$ نشان می‌دهیم. در ادامه همه توابع مورد بررسی را متعلق با $\mathcal{F}_+(X)$ فرض خواهیم کرد.

۴.۱ انتگرال فازی

نظریه اندازه و انتگرال فازی (معروف به انتگرال سوگینو) برای اولین بار توسط سوگینو به عنوان ابزاری برای مدل بندی مسائل عدم قطعیت معرفی شد. در واقع انتگرال فازی یک تابعک غیرخطی وابسته به اندازه فازی است. انتگرال فازی مشابه انتگرال لبگ است، با این تفاوت که جمع و ضرب موجود در تعریف انتگرال لبگ، به ترتیب توسط عملگرهای $\vee$ و $\wedge$ جایگزین شده‌اند.

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم f یک تابع حقیقی مقدار تعریف شده روی X باشد. برای هر $\alpha \in [۰,\infty]$، فرض می‌کنیم

$$F_\alpha = \{x| \ f(x) \geq \alpha\}$$

$$F_{\alpha^-} = \{x| \ f(x) > \alpha\}$$

F_α و F_{α^-} بترتیب α –برش و α –برش اکید از f هستند.

لم ۲.۴.۱. *F_α و F_{α^-} نسبت به α ناصعودی هستند. یعنی اگر $\beta < \alpha$ آنگاه $F_\beta \supset F_{\alpha^-}$ است.*

برهان. فرض کنیم $x \in F_\beta$، بنابراین $f(x) \geq \beta$. و چون طبق فرض $\alpha < \beta$، لذا $f(x) > \alpha$. بنابراین $x \in F_{\alpha^-}$.

و این یعنی $F_\beta \subset F_{\alpha^-}$.

■

تعریف ۳.۴.۱. (انتگرال فازی). فرض کنیم (X,Σ,μ) یک فضای اندازه فازی، $A \in \Sigma$ و $f \in \mathcal{F}_+(X)$

باشد. انتگرال فازی f روی A نسبت به اندازه فازی μ با رابطه زیر تعریف می شود:

$$\fint_A f d\mu = \bigvee_{\alpha \geq 0} (\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)).$$

که $\bigvee$ و $\bigwedge$ به ترتیب عملگرهای sup و inf روی $[0,\infty]$ هستند.

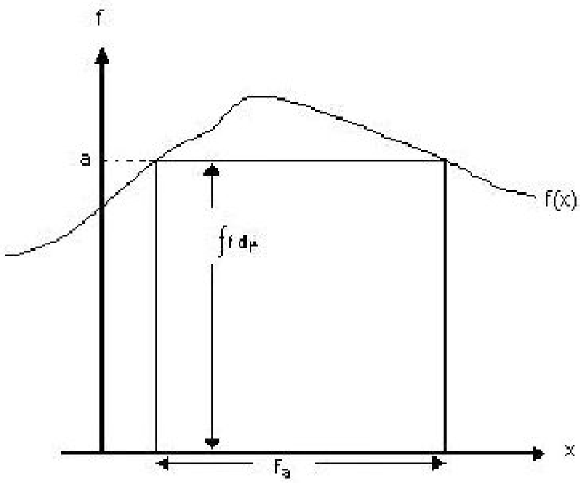
اگر $A = X$، آنگاه

$$\fint_X f d\mu = \fint f d\mu = \bigvee_{\alpha \geq 0} (\alpha \wedge \mu(F_\alpha)).$$

تذکر ۱.۴.۴. *اگر $X = (-\infty, \infty)$، Σ میدان بورل $\mathcal{B}$، μ اندازه لبگ و $f : X \longrightarrow [0,\infty)$ تابع پیوسته تک نمایی*[۴] *باشد آنگاه تعبیر هندسی*

$$\fint f \mathrm{d}\mu$$

برابر با طول ضلع بزرگترین مربع مابین نمودار $f(x)$ و محور X هاست. (شکل زیر)



قضیه ۱.۴.۵. *فرض کنید (X, Σ, μ) یک فضای اندازه فازی، $A \in \Sigma$ و $f \in \mathcal{F}_+(X)$ باشد در اینصورت:*

[۴] Unimodal

$$
\begin{aligned}
⨍_A f\mathrm{d}\mu &= \sup_{\alpha\in[\cdot,\infty)}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)] \\
&= \sup_{\alpha\in[\cdot,\infty]}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha^-})] \\
&= \sup_{\alpha\in[\cdot,\infty)}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha^-})] \\
&= \sup_{E\in\Sigma(f)}[(\inf_{x\in E} f(x))\wedge\mu(A\cap E)] \\
&= \sup_{E\in\Sigma}[(\inf_{x\in E} f(x))\wedge\mu(A\cap E)],
\end{aligned}
$$

که $\Sigma(f)$، $\sigma-$ جبر تولید شده توسط f است و کوچکترین $\sigma-$ جبری است که f روی آن اندازه‌پذیر است.

برهان. ۱) اگر $\alpha=\infty$ آنگاه $F_\alpha=F_{\alpha^-}=\phi$،

$$⨍_A f\mathrm{d}\mu = \sup_{\alpha\in[\cdot,\infty)}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)]$$

و

$$\sup_{\alpha\in[\cdot,\infty]}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha^-})] = \sup_{\alpha\epsilon[\cdot,\infty)}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha^-})]$$

واضح هستند.

۲) نشان می‌دهیم:

$$\sup_{\alpha\in[\cdot,\infty)}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)] = \sup_{\alpha\in[\cdot,\infty)}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha^-})].$$

بنا به لم ۲.۴.۱ و یکنوایی μ برای هر $\alpha\in[\cdot,\infty)$ داریم:

$$\mu(A\cap F_\alpha)\geq\mu(A\cap F_{\alpha^-})$$

همچنین

$$\sup_{\alpha\in[\cdot,\infty)}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)]\geq\sup_{\alpha\in[\cdot,\infty)}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha^-})].$$

از طرفی برای هر $\varepsilon>\cdot$ و $\alpha\in(\cdot,\infty)$ قرار می‌دهیم $\alpha'\in((\alpha-\varepsilon)\vee\cdot),\alpha)$ آنگاه:

$$\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)\leq(\alpha'+\varepsilon)\wedge\mu(A\cap F_{\alpha'^-});$$

حال داریم

$$\begin{aligned}\sup_{\alpha\in[\cdot,\infty)}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)] &= \sup_{\alpha\in(\cdot,\infty)}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)]\\ &\leqslant \sup_{\alpha'\in(\cdot,\infty)}[(\alpha'+\varepsilon)\wedge\mu(A\cap F_{\alpha'^-})]\\ &\leqslant \sup_{\alpha'\in(\cdot,\infty)}[\alpha'\wedge\mu(A\cap F_{\alpha'^-}]+\varepsilon\\ &= \sup_{\alpha\in[\cdot,\infty)}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha^-})]+\varepsilon\end{aligned}$$

و چون ε دلخواه است پس نشان دادیم:

$$\sup_{\alpha\in[\cdot,\infty)}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)]\leqslant\sup_{\alpha\in[\cdot,\infty)}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha^-})].$$

در نتیجه

$$\sup_{\alpha\in[\cdot,\infty)}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)]=\sup_{\alpha\in[\cdot,\infty)}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha^-})].$$

۳) حال نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\fint_A f\mathrm{d}\mu &= \sup_{E\in\Sigma(f)}[(\inf_{x\in E}f(x))\wedge\mu(A\cap E)]\\ &= \sup_{E\in\Sigma}[(\inf_{x\in E}f(x))\wedge\mu(A\cap E)].\end{aligned}$$