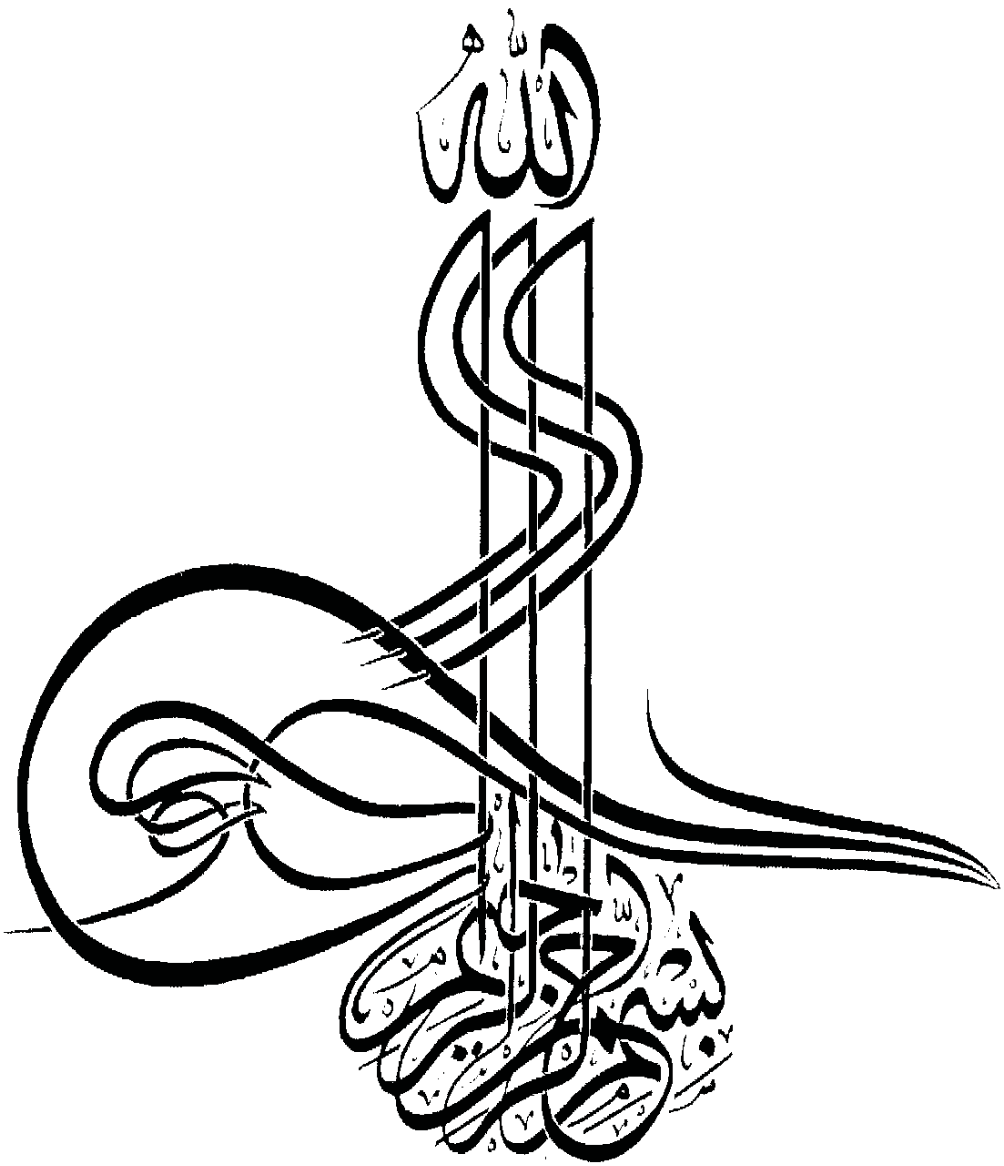

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه بوعلی سینا
دانشکدهٔ علوم پایه
گروه آموزشی ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی

عنوان:

یک جهت اصلاح شده نیوتن برای بهینه سازی نامقید

استاد راهنما:
دکتر حمید اسمعیلی

نگارش:
مهدی موسوی

۱ بهمن ۱۳۹۳

کلیه امتیازهای این پایان‌نامه به دانشگاه بوعلی سینا تعلق دارد. در صورت استفاده از تمام یا بخشی از مطالب این پایان‌نامه در مجلات، کنفرانس‌ها و یا سخنرانی‌ها، باید نام دانشگاه بوعلی سینا و استاد راهنمای پایان‌نامه و نام دانشجو با ذکر مأخذ و ضمن کسب مجوز کتبی از دفتر تحصیلات تکمیلی دانشگاه ثبت شود. در غیر این صورت مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت. درج آدرس‌های ذیل در کلیه مقالات خارجی و داخلی مستخرج از تمام یا بخشی از مطالب این پایان‌نامه در مجلات، کنفرانس‌ها و یا سخنرانی‌ها الزامی می‌باشد.

مقالات خارجی	……………………………, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran.
مقالات داخلی	……………، گروه ……………، دانشکده ……………، دانشگاه بوعلی سینا، همدان.

باسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی

با عنوان:

یک جهت اصلاح شده نیوتن برای بهینه سازی نامقید

جلسه دفاع از پایان‌نامه آقای **مهدی موسوی** به ارزش ۶ واحد در روز **چهارشنبه** مورخ ۱۳۹۳/۱۱/۰۱ ساعت ۱۰ در محل **آمفی تئاتر ۱** دانشکده **علوم پایه** در حضور هیأت داوران برگزار گردید که پس از بررسی‌های لازم، پایان‌نامه نامبرده با نمره به عدد **۱۷/۵۰** به حروف **هفده و نیم** و با درجه **خوب** مورد ارزیابی قرار گرفت.

ردیف	نام و نام خانوادگی	سمت	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر حمید اسمعیلی	استاد راهنما	دانشیار	
۲	دکتر حسن زارعی	داور خارجی	استادیار	
۳	دکتر مهدی قیاسوند	داور داخلی	دانشیار	
۴	دکتر بهروز رفیعی	★ مسئول تحصیلات تکمیلی دانشکده	دانشیار	

★ بدون حق رأی

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

خدایا... [1] به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری. تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

آخرین تاریخ ویرایش: ۲۲ بهمن ۱۳۹۳
زمان: ۲۳:۰۱
آدرس الکترونیکی پژوهشگر[۲]

سپاس گزاری...

سپاس **خداوندگار حکیم** را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. باز فرصتی شد که ژرفتر بنگریمش. تلاشمان در راه علم چیزی نبود جزء ستایش او و حجتی دیگر بر وحدانیتش. بار خدایا تلاشمان را اعتنای رحمتت قرار ده. تو را شکر می‌کنم که همواره امید و دلگرمی من بودی و در هر حال کمک و یار بودی.

ابتدا وظیفه خود می‌دانم از آموزشها و زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای فرهیخته و فرزانه خود، جناب آقای **دکتر حمید اسمعیلی**، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که با صبر فراوان و صرف وقت زیاد، همواره راهنما و راه گشای بنده در طول تحصیل و تکمیل این پایان‌نامه بوده است. از جناب آقای **سعید سعادتی‌پور** دوست عزیزم که دراین راه به بنده کمک نمودند و در آماده‌سازی این پایان‌نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. از جناب آقای **دکتر محمداسماعیل سامعی** [۳] به دلیل راهنمایی های خوبشان در زمینه آماده‌سازی و صفحه‌آرایی مطالب این پایان‌نامه و همچنین کمک های بی‌دریغشان کمال تشکر و قدر دانی را دارم.

مهدی موسوی
همدان-ایران

---

[۲] moosavimehdib22@gmail.com
[۳] mesamei@basu.ac.ir

دانشگاه بوعلی سینا

مشخصات رساله/پایان نامه تحصیلی

عنوان:

یک جهت اصلاح شده نیوتن برای بهینه سازی نامقید

نام نویسنده: مهدی موسوی

نام استاد/اساتید راهنما: دکتر حمید اسمعیلی

نام استاد/اساتید مشاور: -

دانشکده: علوم پایه	**گروه آموزشی: ریاضی**	
رشته تحصیلی: ریاضی کاربردی	**گرایش تحصیلی: -**	**مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد**
تاریخ تصویب پروپوزال: ۱۳۹۲/۰۴/۲۰	**تاریخ دفاع: ۱۳۹۳/۱۱/۰۱**	**تعداد صفحات: ۱۱۹**

چکیده:

در این پایان نامه یک اصلاح روی جهت نیوتن برای حل مساله بهینه‌سازی نامقید مطرح می‌شود. نشان داده شده است که یکی از معایب بزرگ روش نیوتن کندی یا واگرایی آن به ازای نقاط شروعی است که دور از جواب بهینه می‌باشند. ثابت می‌شود که اصلاح مطرح شده در این پایان نامه باعث کاهش تابع یا نرم گرادیان آن در هر تکرار می‌شود که این امر به کارایی روش نیوتن کمک قابل توجهی می‌نماید. نشان می‌دهیم که این روش همگرایی مرتبه دوم دارد و همچنین ناحیه همگرایی آن بزرگ‌تر از روش نیوتن می‌باشد. آزمون‌های عددی انجام شده موید این حقیقت بوده و درستی نتایج بدست آمده را نشان می‌دهند.

واژه‌های کلیدی: بهینه سازی نامقید، تابع هدف، جهت کاهشی، روش نیوتن، جستجوی خطی، همگرایی مرتبه دو، نقاط محوری

فهرست مطالب

مقدمه

مسأله بهینه‌سازی یک قانون و اصل در آنالیز گروهی از تصمیمات یا تخصیص برنامه ریزی مدل‌های ریاضی است. در واقع بهینه‌سازی، علمی برای یافتن بهترین جواب برای مسائل است و این امر همواره یک موضوع جالب و جذاب برای محققان چه از نظر تئوری و چه از نظر تجربی است. امروزه مفهوم بهینه‌سازی به عنوان یک اصل زیر بنایی در تحلیل بسیاری از تصمیم‌گیری‌های پیچیده یا تخصیص، کاملاً پذیرفته شده است. به همین علت، این موضوع به عنوان یکی از شاخه‌های ریاضی مورد مطالعه قرار گرفته است و کاربردهای زیادی در شاخه‌های دیگر علوم و تکنولوژی دارد.

به عنوان مثال در یک شرکت هواپیمایی، بهینه‌سازی عبارت است از پایین آوردن هزینه‌های هواپیماها و خدمه هواپیما است. در مثال دیگر سرمایه داری که قصد دارد سهامش را با کمترین ریسک و بازدهی بالا در بورس سرمایه گذاری کند. در علم فیزیک یک مسأله بهینه‌سازی می‌تواند کم کردن انرژی و بالا بردن بازدهی یک سیستم باشد. در یک واکنش شیمیایی، یک مولکول منفرد تا زمانی‌که مجموع انرژی پتانسیلش به حداقل برسد با دیگر مولکول‌های آزاد واکنش انجام می‌دهد.

اما نکته قابل توجه در این است که برای استفاده از بهینه‌سازی باید تابع هدف را مشخص کنیم که می‌تواند سود، زمان، انرژی پتانسیل و یا هر کمیت دیگری باشد. تابع هدف به کاراکترهای مخصوصی که متغیر آزاد نامیده می‌شوند، بستگی دارد. هدف یافتن مقداری برای متغیرهاست که تابع هدف مقدار بهینه را بگیرد. روند مشخص کردن تابع هدف، متغیرها و قیود برای یک مسأله را مدلسازی گویند. مدلسازی یک مسأله اولین و مهمترین قدم در بهینه‌سازی است. اگر مدل بیش از حد ساده و مختصر باشد بینش درستی را برای مسائل علمی حاصل نمی‌کند و ممکن است جواب‌هایی بدست آید که زیاد مفید نیستند و اگر بیش از حد پیچیده باشد، حل آن سخت می‌شود و ممکن است هزینه زیادی برای بدست آوردن جواب لازم باشد.

بعد از مدلسازی مسأله پیدا کردن یک الگوریتم کارآمد برای حل مسأله قدم مهمی می‌تواند باشد زیرا ممکن است با اتخاذ یک الگوریتم نامناسب برای حل یک مسأله رسیدن به جواب دشوار و زمانبر باشد یا این‌که هزینه زیادی برای همگرایی آن صرف کنیم. امروزه روش‌های گوناگونی برای حل مسائل بهینه‌سازی وجود دارند که هر یک به نوبه خود دارای مزایا و معایبی هستند که بستگی به نوع مسأله نیز دارند. در بسیاری از موارد، تفسیرها و توضیحات ریاضی زیبا و ظریفی به عنوان شرایط بهینگی برای بررسی جواب وجود دارد. اگر شرایط بهینگی برقرار باشند، آنگاه می‌توان اطلاعات مفیدی راجع به چگونگی بهبود تقریب فعلی بدست آورد.

مسأله بهینه‌سازی در حالت کلی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ s.t & x \in R^n \end{array}$$

این مسأله را یک مسأله نامقید می‌نامند که در آن x متغیر تصمیم و $f(x)$ تابع هدف نام دارد. ممکن است این‌طور به‌نظر بیاید که مسائل بهینه‌سازی چنان عاری از ویژگی‌های ساختارینده که مانع از کاربری آنها به عنوان مدل‌های مفید برای مسائل با اهمیت می‌باشند. اما به دو دلیل کاملاً عکس این مطلب صحیح است؛ اولاً می‌توان این استدلال را بیان کرد که اگر دامنه مسأله گسترش یابد به‌طوریکه همه متغیرهای مربوط به تصمیم‌گیری در نظر گرفته شوند، آنگاه هیچ قیدی لازم نیست. به عبارت دیگر، قیدها مبین محدودیت تصنعی میدان عمل هستند و زمانی‌که این میدان توسعه یابد، از صحنه خارج می‌شوند. دلیل دوم برای این که بسیاری از مسائل مهم را می‌توان بدون قید در نظر گرفت، زیرا اکثر مسائل مقید با برخی از ترفندها به مسائل نامقید تبدیل می‌شوند که حل این‌گونه مسائل راحت تر است.

مطالعه مسائل نامقید صرف نظر از این‌که به تبیین دسته مهمی از مسائل می‌انجامد، به‌طور مسلم قدمی است در راه دسترسی به حالت کلی‌تر مسائل مقید. در واقع بهینه‌سازی نامقید به عنوان ابزاری برای حل بعضی از مسائل مقید حائز اهمیت است. بسیاری از جنبه‌های نظری و الگوریتمی در حالت نامقید، و قبل از تعمیم به حالت مقید، به صورت بسیار طبیعی‌تری قابل طرح و بررسی‌اند. زیرا هر مسأله مقید را می‌توان به یک مسأله نامقید هم ارز تبدیل کرد. بنابراین، روش‌هایی که بتوانند مسائل نامقید را خیلی سریع حل کنند از اهمیت فوق العاده‌ای برخوردارند. برای حل مسائل غیرخطی روش‌های گوناگونی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

یکی از این روش‌ها روش نیوتن است که این روش نسبت به دیگـــر روش‌ها کاربردی‌تر است زیرا این روش در صورت برقرار بودن شرایط خاصی دارای همگرایی مرتبه دو است که نسبت به دیگر روش‌ها مرتبه همگرایی آن بالاتر است. اما از اشکالات عمده و اساسی این روش می‌توان به ناکارآمد بودن این روش زمانی‌که ماتریس هسیان منفرد است یا نامعین است و یا این‌که نقطه شروع از نقطه جواب بسیار دور است اشاره کرد. در این پایانامه یک اصلاح برای جهت نیوتن ارائه می‌دهیم و همچنین همگرایی، همگرایی مرتبه دو و توسعه ناحیه همگرایی روش جدید را اثبات خواهیم کرد. برای این کار از ایده تقریب بردار گرادیان در نقاط مهمی بنام نقاط محوری استفاده می‌کنیم که این نقاط نقش موثری در کارایی روش جدید ایفا می‌کنند که به تفصیل راجع به آنها صحبت می‌کنیم.

این پایانامـــــــــه در ۴ فصل تهیه و تنظیم شده است و مطالب آن عمدتاً از مـــــراجع [۱–۳، ۵، ۶، ۸] و [۱۰] استفاده شده است:

فصل ۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی جبرخطی و مبانی بهینه‌سازی را معرفی کرده‌ایم.

فصل ۲ در این فصل روش‌های حل مسائل غیرخطی نامقید را بیان کرده‌ایم، روش نیوتن و همگرایی و همگرایی مرتبه دو آن به تفصیل شرح داده شده است و نیز معایب آن به همراه اصلاحاتی برای آن توضیح داده شده است.

فصل ۳ در این فصل یک اصلاح جدید برای جهت نیوتن ارائه داده‌ایم و نیز بحث همگرایی آن مفصل توضیح داده شده است.

فصل ۴ در این فصل به مقایسه روش‌های جدید مطرح شده از نظر عددی پرداخته‌ایم و نتایج بدست آمده مبین کارایی روش جدید در حل مسائل نامقید است.

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

در این فصل مروری بر مفاهیم بنیادی از جبرخطی‌عدی، آنالیز ریاضی و همچنین مبانی بهینه‌سازی خواهیم داشت. در پایان بحث همگرایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۱ مفاهیم اساسی جبر خطی

۱.۱.۱ نرم های برداری

تابع قدرمطلق ابزاری برای مقایسه دو عدد حقیقی از نظر اندازه می‌باشد. در این بخش نرم یا اندازه بردارها را معرفی می‌کنیم که تعمیم تابع قدرمطلق است. مجموعه تمام بردارهای حقیقی n بعدی را با R^n نمایش می‌دهیم. بردارها را با حروف کوچک سیاه نشان داده و به صورت ستونی در نظر می‌گیریم. برای نشان دادن بردارهای سطری از ترانهاده استفاده می‌کنیم. مثلاً

$$x = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} \qquad x^T = \begin{bmatrix} x_۱ & x_۲ & x_۳ \end{bmatrix}$$

تعریف ۱.۱.۱. یک نرم برداری تابعی مانند $\|.\|$ از مجموعه بردارهای n بعدی R^n به مجموعه اعداد حقیقی مثبت R^+ با خواص زیر است:

۱) $\forall x \in R^n \Rightarrow \|x\| \geq ۰$

۲) $\|x\| = ۰ \iff x = ۰$

۳) به ازای هر $\alpha \in R$ داریم:

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$$

۴) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

که خاصیت ۴ را نامساوی مثلثی می‌نامیم.

فاصله بین بردارهای x و y را با $\|x-y\|$ نمایش می‌دهیم. نرم‌های برداری خواص قدر مطلق را دارا هستند.

انواع نرم:

سه نرم معروف که از همه بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند عبارتند از:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_\infty = \max_i \mid x_i \mid$$

که نرم دو را نرم اقلیدسی یا نرم طبیعی می‌نامیم که مبتنی بر ضرب داخلی استاندارد می‌باشد:

$$x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{1.1}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^T x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{2.1}$$

مثلاً اگر $x = (0, 1, 2, -2, 4)$، آنگاه:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_i x^2} = \sqrt{0+1+4+4+16} = 5$$

قضیه ۲.۱.۱. ***نامساوی کشی-شوارتز***

به ازای هر دو بردار دلخواه x و y در R^n داریم:

$$| x^T y | \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

برهان. برای اثبات به مرجع [1] مراجعه شود. ■

به ازای هر عدد حقیقی $p \geq 1$، p نرم بردار $x \in R^n$ عبارت است از:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \right)^{\frac{1}{p}} . \qquad (۳.۱)$$

۲.۱.۱ نرم‌های ماتریسی

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید $\alpha \in R^n$ و $A, B \in R^{n\times n}$، یک نـــرم ماتریسی تابعی مانند $\|.\| : R^n \longrightarrow R^+$ است که در خواص زیر صدق کند:

۱) $\|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = 0 \quad , \|A\| \geq 0$

۲) $\alpha \in R$ که $\|\alpha A\| =| \alpha | \, \|A\|$

۳) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

۴) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

خاصیت ۴ را خاصیت زیر ضربی می‌نامیم.

ماتریس $A \in R^n$ را در نظر بگیرید، نرم فروبینوس ماتریس A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \|A\|_F^2 &= \sum_{i,j} | a_{ij} |^2 \\ &= \sum_{i} \|A_{i*}\|_2^2 = \sum_{j} \|A_{*j}\|_2^2 \\ &= \big(tarce(A^T A)\big)^{\frac{1}{2}} \qquad (۴.۱) \end{aligned}$$

مثال ۴.۱.۱. *ماتریس زیر را در نظر بگیرید:*

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_F = \sqrt{۴ + ۱ + ۱۶ + ۴} = ۵$$

۳.۱.۱ ماتریس‌های معین‌مثبت

در این بخش به معرفی رده مهمی از ماتریس‌ها به‌نام ماتریس‌های معین‌مثبت [۱] و بعضی خواص آنها می‌پردازیم. ماتریس‌های معین‌مثبت به طور طبیعی در اکثر کاربردها ظاهر می‌شوند و خواص جالبی دارند.

تعریف ۵.۱.۱. ماتریس متقارن $A \in R^{n\times n}$ را :

۱)معین‌مثبت گوییم هرگاه $x^TAx > ۰$ به ازای هر بردار غیر صفر $x \in R^n$

۲)نیمه معین‌مثبت [۲] گوییم هرگاه $x^TAx \geq ۰$ به ازای هر بردار $x \in R^n$

۳) معین‌منفی (نیمه معین‌منفی) [۳] گوییم هرگاه $-A$ معین‌مثبت (نیمه معین‌مثبت) باشد.

تعریف ۶.۱.۱. فرم درجه دو ماتریس A را با $Q_A(x)$ نشان می‌دهیم که اهمیت زیادی در بحث بهینه‌سازی[۴] دارد.

$$Q_A(x) = x^TAx$$

مثال ۷.۱.۱. *ماتریس* $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ *را در نظر بگیرید؛ فرض کنید* $x = (x_۱ \quad x_۲)$ *یک بردار غیر صفر دلخواه باشد:*

$$Q_A(x) = x^TAx = ۲x_۱^۲ + ۲x_۱x_۲ + ۳x_۲^۲ = x_۱^۲ + (x_۱ + x_۲)^۲ + ۲x_۲^۲ > ۰$$

لذا A *معین‌مثبت است.*

تعریف ۸.۱.۱. **مینور اصلی پیشرو**

فرض کنید A ماتریس $n \times n$ باشد؛ ماتریس متشکل از درایه‌های واقع در k سطر اول و k ستون اول A را زیر ماتریس اصلی پیشرو مرتبه k، و دترمینان آن را مینور اصلی پیشرو A می‌نامیم.

[۱] positive definite
[۲] positive semi definite
[۳] negative definite(negative semi definite)
[۴] optimization

قضیه ۹.۱.۱. *اگر A یک ماتریس متقارن $n \times n$ باشد و Δ_k، $1 \le k \le n$، kاُمین مینور اصلی پیشرو آن باشد، آنگاه:*

الف) *ماتریس A معین‌مثبت است اگر و تنها اگر $\Delta_k > 0$، به ازای $k = 1, 2, \cdots, n$.*

ب) *ماتریس A معین‌منفی است اگر و تنها اگر $(-1)^k \Delta_k > 0$ به ازای $k = 1, 2, \cdots, n$. (یعنی $\Delta_1 < 0$ و مینورهای اصلی یک در میان تغییر علامت بدهند.)*

۲.۱ مبانی بهینه‌سازی

در این بخش به موضوع بهینه‌سازی خواهیم پرداخت و برخی از مفاهیم و تعاریف مقدماتی آن که از اساسی‌ترین ابزارهای مطالعه‌ی فصل‌های دیگر است، را بیان می‌کنیم.

۱.۲.۱ برنامه‌ریزی غیرخطی

فرم کلی یک برنامه‌ریزی غیرخطی(NLP) [5] به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t \quad & h_i(x) = 0, \quad i \in I = \{1, \cdots, p\} \\ & g_j(x) \le 0, \quad j \in J = \{1, \cdots, m\} \\ & x \in C \end{aligned} \tag{5.1}$$

که $x \in R^n$ و $C \subseteq R^n$ یک مجموعه معین است. f، h_i ها و g_i ها توابعی تعریف شده روی C (یا یک مجموعه باز که شامل C است) می‌باشند.

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه جواب شدنی مسأله فوق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{F} = \{x \in C \mid h_i(x) = 0, i = 1, \cdots, p \quad and \quad g_j(x) \le 0, j = 1, \cdots, m\} \tag{6.1}$$

حال چند اصطلاح فنی را بیان می‌کنیم:

۱) به تابع f تابع هدف و به متغیر x متغیر تصمیم می‌گوییم. $\mathcal{F}$ را نیز ناحیه شدنی می‌نامیم.

۲) اگر $\mathcal{F} = \varnothing$ آنگاه گوییم که مسأله (۵.۱) یک مسأله نشدنی است.

[5] nonlinear programing

۳) اگر f روی مجموعه $\mathcal{F}$ از پایین بی‌کران باشد گوییم مسأله (۵.۱) بی‌کران است.

۴) اگر $\min$ تابع f در $\overline{x} \in \mathcal{F}$ اتفاق بیفتد، گوییم $\overline{x}$ یک جواب بهینه برای مسأله (۵.۱) است و $f(\overline{x})$ مقدار بهینه است.

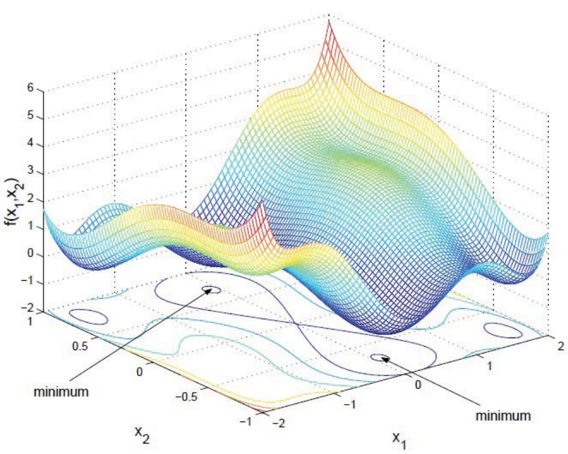
مثال ۲.۲.۱. *مسأله مینیمم سازی زیر را در نظر بگیرید:*

$$\begin{aligned} \min \quad & x_۱^۲(۴ - ۲/۱x_۱^۲ + \tfrac{۱}{۳}x_۱^۴) + x_۱x_۲ + x_۲^۲(-۴ + ۴x_۲^۲) \\ s.t \quad & -۲ \leq x_۱ \leq ۲ \\ & -۱ \leq x_۲ \leq ۱ \end{aligned}$$

مسأله فوق یک مسأله بهینه‌سازی غیرخطی است که تابع هدف آن تابع گوژ پشت (کاو) [۶] نام دارد. ناحیه شدنی مسأله فوق عبارت است از :

$$\mathcal{F} = \{(x_۱, x_۲) : \quad -۲ \leq x_۱ \leq ۲, \quad -۱ \leq x_۲ \leq ۱\}$$

این برنامه دارای دو جواب بهینه (۰/۷۱۷ ,۰/۰۸۹۸) و (۰/۷۱۷ ,۰/۰۸۹۸−) است که در شکل ۱.۱ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱.۱: *تابع گوژ پشت*

[۶] humpback function