بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض
گرایش جبر

تحویل پذیری روی حلقه های تقسیم

استاد راهنما:

دکتر حسین مومنایی کرمانی

مؤلف:
ملوک خاتون بزرگ زاده

شهریورماه۸۹

تقدیم به:

برترین استادان زندگی ام که صادقانه زیستن را به من آموختند

پدرم: مشعل دار صبر و گذشت

و مقدس ترین واژه زندگی ام

مادرم: مشعل دار مهربانی و فداکاری

و فرشته روشنی بخش مسیرزندگی ام

عشقشان را ره توشه ی زندگی ام کردند تا افسانه زندگی ام را معنایی بهتر بخشند.

سپاس نامه:

امروز که برگی از زندگی ام در راستای علم ورق می خورد از پروردگارم که در این مدت عنایت او سختی های این راه را بر من هموار ساخت، سپاسگزارم. پس از آن صمیمانه ترین سپاس ها را به پدر و مادر مهربانم تقدیم می نمایم که همواره با صبر و شکیبایی همراه و یاور من در امر تحصیل بوده اند. بنا به گفته ی امام علی (ع) که فرمودند:"هر کس کلامی به من بیاموزد مرا بنده ی خود ساخته است". از استاد گرامی ام جناب آقای دکتر مومنایی به خاطر راهنمایی های ارزشمندشان در پیشبرد این پایان نامه کمال تشکر را دارم و از خداوند رحمان برای ایشان سلامتی و موفقیت روزافزون در همه ی مراحل زندگی خواستارم. از استادان محترم جناب آقای دکتر آقامولایی و جناب آقای دکتر موسوی که داوری پایان نامه اینجانب را پذیرفتند، صمیمانه سپاسگزارم.

با تشکر از حمایت های مالی قطب جبرخطی و بهینه سازی دانشگاه شهیدباهنر کرمان

چکیده:

فرض کنیم D یک حلقه تقسیم و V یک فضای برداری متناهی البعد روی D و $\mathcal{C}$ مجموعه ای از ماتریس های $n \times n$ با درایه هایی در D باشد. این مجموعه ساختارهای جبری دارد: از جمله یک جبر یا یک نیمگروه. در این پایان نامه هدف ما این است که بیان کنیم تحت چه شرایطی $\mathcal{C}$ تحویل پذیر است. اگر یک مجموعه به طور همزمان مثلثی شونده باشد چون یک زنجیر ماکسیمال از زیرفضاهای پایا وجود دارد پس تحویل پذیری نتیجه می شود. بنابراین اکثر اثبات های ما در این پایان نامه بر این اساس است که نشان دهیم تحت چه شرایطی $\mathcal{C}$ به طور همزمان مثلثی شونده است. در فصل اول مقدمات و پیشنیازها آورده شده است. در فصل دوم قضایا و نتایجی بیان می شود که مثلثی شدن و تحویل پذیری ماتریس ها را روی حلقه تقسیم خاص یعنی میدان نشان می دهد و در فصل سوم این قضایا برای ماتریس ها روی حلقه تقسیم تعمیم داده شده اند. در مورد حلقه های تقسیم بر خلاف میدان ها متعدی بودن و تحویل ناپذیر بودن یکسان نیستند. برای همین در فصل آخر تحویل ناپذیری و متعدی بودن زیرجبری از جبرهای ماتریسی را بیان می کنیم و نشان می دهیم که مرکزسازها ی یک منبع از مثال های جالب از زیرجبرهای متعدی هستند.

واژه های کلیدی: حلقه تقسیم، به طور همزمان مثلثی کردن، مثلثی شدنی، مثلثی کردن بلوکی، جبر، نیمگروه، تحویل پذیر، تحویل ناپذیر، تعدی، *مرکزساز*.

مقدمه:

همیشه کار کردن با یک ماتریس مثلثی راحت تر از یک ماتریس دلخواه است. در مورد میدان ها چون مقادیر ویژه دقیقا عناصر روی قطر اصلی هستند. اطلاعات زیادی در باره ی ماتریس از جمله دترمینان، وارون پذیری و رد به ما می دهد. در این پایان نامه به دنبال پاسخ دادن به این سوأل هستیم که چه وقت یک مجموعه از ماتریس ها به طور همزمان مثلثی شونده است یعنی اگر $\mathcal{C}$ مجموعه ای از ماتریس های مثلثی شونده با درایه هایی در حلقه تقسیم D باشد چه وقت یک ماتریس S وارون پذیر وجود دارد به طوری که برای هر $A \in \mathcal{C}$، SAS^{-1} مثلثی شونده است. چون ماتریس ها روی میدان شناخته تر هستند ریاضیدانان موفق شده اند شرایطی روی $\mathcal{C}$ به دست آورند که تحت این شرایط $\mathcal{C}$ به طورهمزمان قابل مثلثی شدن باشد. اما در مورد حلقه های تقسیم این مسأله کمی مشکل تر است و باید شرایط اضافی را برای به دست آوردن این نتیجه روی $\mathcal{C}$ بگذاریم. درمورد حلقه تقسیم برخلاف میدان ها متعدی بودن و تحویل ناپذیر بودن جبری از ماتریس ها یکسان نیست مسأله دیگر در این پایان نامه مشخص کردن زیرجبرهای تحویل ناپذیر و متعدی در جبرهای ماتریسی است. و نشان دادن کلاس خاصی از آنها که به شکل مرکزساز هستند، می باشد.

این پایان نامه شامل چهار فصل است در فصل اول تعاریف و لم ها وقضایای مقدماتی بیان شده اند که در فصل های آینده از آنها استفاده شده است. فصل دوم درباره ی مثلثی کردن ماتریس ها روی میدان ها است. قضیه برنساید در این فصل آورده شده است که بیان می کند روی میدان F تنها جبر تحویل ناپذیر $M_n(F)$ است، این فصل شامل دو بخش است بخش اول تحویل پذیری و مثلثی کردن جبری از ماتریس ها و بخش دوم تحویل پذیری و مثلثی کردن نیمگروهی از ماتریس ها روی میدان ها است و قضایای معروفی در این فصل بیان شده اند. در فصل سوم مثلثی شدن ماتریس ها روی حلقه های تقسیم مطرح می شود و قضایا و مطالبی که در فصل ۲ در مورد میدان گفته شد برا ی حلقه های تقسیم تعمیم داده می شود. قضیه معروفی که در این فصل بیان می شود قضیه مثلثی کردن بلوکی است که در فصل دوم در مورد میدان بیان شده است در این فصل نشان می دهیم که برای یک حلقه تقسیم دلخواه لازم است که شرط زنجیری را روی مجموعه قرار دهیم تا قضیه برقرار باشد و نتایج مهمی از این قضیه بیان می شود این فصل شامل سه بخش است در بخش اول بحث مثلثی کردن ماتریس ها را روی حلقه تقسیم دلخواه مطرح می کنیم. در بخش دوم مثلثی کردن ماتریس ها را روی حلقه های تقسیم متناهی البعد بررسی می کنیم. در این بخش بیان می شود اگر $\mathcal{A}$ یک F-جبر تقسیمی که F مرکز D است، باشد تحت چه شرایطی $\mathcal{A}$ مثلثی

شدنی است. تعدادی از قضایای فصل ۲ که در مورد حلقه تقسیم دلخواه برقرار نبود، در این حالت برقرار خواهد شد یکی از این قضایا، قضیه مثلثی کردن بلوکی است که همانند میدان ها روی F–جبرها برقرار است در بخش سوم این فصل ماتریس ها را روی حلقه تقسیم خاص و معروف کواترنیون ها بررسی می کنیم در این بخش نشان می دهیم که شرایطی که مثلثی شدن مجموعه ای از ماتریس ها را روی میدان F نتیجه می داد، مثلثی شدن ماتریس هایی با درایه های کواترنیونی را نیز نتیجه می دهد. همانطور که در فصل های قبل گفته شد تحویل ناپذیر و متعدی بودن برای ماتریس های روی حلقه تقسیم با هم یکی نیستند در فصل چهارم تعدی و تحویل ناپذیری زیرجبری از جبرهای ماتریسی روی حلقه تقسیم D را بررسی می کنیم و یک قضیه مهم و کاربردی را بیان می کنیم که کلاس های زیرجبرهای تحویل ناپذیر را به طور کامل مشخص می کند و همچنین نشان می دهیم مرکزسازها مثال های زیبایی از زیرجبرهای متعدی هستند.

فهرست مطالب

فصل اول
تعاریف و پیش نیازها

این فصل شامل دو بخش است که بخش اول شامل تعاریف اولیه و آشنائی با حلقه ماتریسها و مثلثی شدن آنها است و بخش دوم قضایا و لم هایی را بیان می کند که در فصل های آینده از آنها استفاده می شود.

۱-۱تعاریف و مفاهیم اولیه

در ابتدای این بخش تعدادی تعریف و همچنین مطالبی را بیان می کنیم که در پایان نامه از آن ها استفاده خواهیم کرد. در سرتاسر این پایان نامه حلقه ها یکدار فرض شده اند.

تعریف ۱-۱-۱: فرض کنیم D یک حلقه یکدار باشد که هر عضو غیرصفر در آن دارای وارون است در این صورت D را یک حلقه تقسیم گوییم.

در جبر مجرد یک حلقه تقسیم را یک میدان اریب می گویند. همه ی میدان ها حلقه تقسیم هستند. مرکز حلقه های تقسیم همیشه جابجایی است و در نتیجه یک میدان است.

در این پایان نامه $\mathbb{C}$ و$\mathbb{R}$ به ترتیب نشان دهنده ی میدان اعداد مختلط و اعداد حقیقی هستند. مثال جالبی از حلقه های تقسیم ناجابجایی، حلقه ی تقسیم کواترنیون ها می باشد. حلقه تقسیم کواترنیون ها که با $\mathbb{H}$ نمایش داده می شود به صورت

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

تعریف می شود. یک فضای برداری ٤-بعدی است که عناصر آن کواترنیون های حقیقی نامیده می شوند. هر x در $\mathbb{H}$ به صورت $x = a + bi + cj + dk$ نوشته می شود که $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ و $(۱,۰,۰,۰) = ۱$ و $i = (۰,۱,۰,۰)$ و $j = (۰,۰,۱,۰)$ و $k = (۰,۰,۰,۱)$. $\mathbb{H}$ با جمع مولفه به مولفه و ضربی که با قوانین

$$ki = -ik = j \,,\, jk = -kj = i \,,\, ij = -ji = k \,,\, i^۲ = j^۲ = k^۲ = -۱$$

انجام می گیرد، تشکیل یک حلقه تقسیم می دهد. برای آشنائی بیشتر حلقه های تقسیم کواترنیونی به [۲۵] مراجعه شود.

تعریف۱-۱-۲: فرض کنیم E و D دو حلقه تقسیم باشند، E یک توسیع از D گفته می شود اگر $D \subseteq E$ و $Z(D) \subseteq Z(E)$. که $Z(D)$ مرکز حلقه تقسیم D و $Z(E)$ مرکز حلقه تقسیم E می باشد.

فرض کنیم $d,\acute{d} \in D$ در این صورت $d,\acute{d}$ را مزدوج گوییم اگر $s \in D \neq ۰$ وجود داشته باشد به طوری که $d = s\acute{d}s^{-۱}$. به سادگی بررسی می شود که رابطه ی مزدوج بودن یک رابطه ی هم ارزی است وکلاس های این رابطه هم ارزی را کلاس های تزویج می گوییم.

نمادگذاری ۱-۱-۳: فرض کنیم D یک حلقه تقسیم و n یک عدد طبیعی باشد، در این صورت مجموعه ی همه ی بردارهای ستونی $n \times ۱$ با درایه هایی در D را با D^n و جبر همه ی ماتریس های $n \times n$ با درایه هایی در D را با $M_n(D)$ نمایش می دهیم.

مجموعه تمام ماتریس $n{\times}n$ با درایه هایی در D تشکیل یک حلقه یکدار می دهد و یک D-مدول یکانی است.

فرض کنیم V یک فضای برداری راست روی D باشد. مجموعه ی همه ی نگاشت های خطی روی V را با $\mathcal{L}(V)$ نشان می دهیم. اگر $\mathcal{B}$ پایه ای برای V باشد هر عضو از $\mathcal{L}(V)$ نسبت به پایه $\mathcal{B}$ دارای نمایش ماتریسی است. اثبات می شود $\mathcal{L}(V) \cong M_n(D)$ که این یکریختی حلقه ای است. چون اسکالرها لزوما با نگاشت ها جابه جا نمی شوند. در حالت کلی این یکریختی D- مدولی نیست به عنوان مثال اگر I نشان دهنده ی ماتریس همانی باشد و فرض کنیم V یک D- دومدول باشد، آن گاه برای هر عضو غیرمرکزی $\lambda \in D$ ماتریس λI نمایش ماتریسی هیچ نگاشت خطی T تعریف شده با $Tv = \lambda v$ نیست.

تعریف ۱-۱-۴: اگر D یک حلقه تقسیم و F مرکز آن باشد، در این صورت زیرحلقه $\mathcal{R}$ از $M_n(D)$، F-جبر یا به طور اختصار جبرگفته می شود اگر

۱) $\mathcal{R}$ یک F-مدول یکانی باشد.

۲) برای هر $A, B \in \mathcal{R}$ و $c \in F$ داشته باشیم:

$$c(AB) = (cA)B = A(cB).$$

اگر F-جبر $\mathcal{R}$ به عنوان یک حلقه، تقسیمی باشد در این صورت آن را جبرتقسیمی می نامند.

هر حلقه تقسیم D یک جبر تقسیمی روی F (مرکزش) است زیرا D یک فضای برداری روی F است. پس به عنوان یک فضای برداری روی F یا متناهی البعد است یا متناهی البعد نیست.

تعریف ۱-۱-۵: حلقه تقسیم D روی F(مرکزش) جبری نامیده می شود هرگاه هر عضو از D ریشه ی یک چندجمله ای غیرصفر با ضرایب در F باشد.

تعریف ۱-۱-۶: فرض کنیم V یک فضای برداری راست متناهی البعد روی حلقه تقسیم D باشد. اگر $\mathcal{C}$ یک زیرمجموعه غیرتهی از $\mathcal{L}(V)$ باشد، در این صورت

۱: زیرفضای M از V تحت $\mathcal{C}$ پایا گفته می شود هرگاه برای هر $A \in \mathcal{C}$ داشته باشیم $AM \subseteq M$. در این صورت M را یک زیرفضای $\mathcal{C}$-پایا گوییم. برای هر زیرمجموعه $\mathcal{C}$ از $\mathcal{L}(V)$، $\{۰\}$ و V زیرفضاهای $\mathcal{C}$-پایای بدیهی V هستند.

۲: $\mathcal{C}$ را تحویل پذیر گوییم اگر $\mathcal{C} = \{0\}$ یا یک زیرفضای $\mathcal{C}$-پایای غیربدیهی از V وجود داشته باشد در غیراین صورت $\mathcal{C}$ را تحویل ناپذیر گوییم.

۳: $\mathcal{C}$ را متعدی گوییم اگر برای $v, w \in V$ که $v \neq ۰$، $T \in \mathcal{C}$ وجود داشته باشد ، به طوری که $Tv = w$. یا به طور معادل برای همه ی $۰ \neq u \in V$، $\mathcal{C}u = V$.

٤: $\mathcal{C}$ را در $\mathcal{L}(V)$ چگال گوییم اگر برای هر تعداد متناهی از بردارهای مستقل خطی $v_۱, v_۲, \cdots, v_k \in V$ و بردارهای دلخواه $w_۱, w_۲, \cdots, w_k \in V$، $T \in \mathcal{C}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $i = ۱,۲,\cdots, k$، $Tv_i = w_i$.

از تعاریف بالا به وضوح دیده می شود که برای هر $V \neq \{۰\}$ زیرحلقه های چگال از $\mathcal{L}(V)$ متعدی و زیرحلقه های متعدی از $\mathcal{L}(V)$ تحویل ناپذیر هستند اما عکس مطلب لزوما برقرار نیست. در صورتی که D یک میدان باشد خواهیم دید که عکس نیز برقرار است و در این حالت متعدی بودن و تحویل ناپذیر بودن یکسان هستند.

تعریف ۱-۱-۷: فرض کنیم $\mathcal{X}$ یک زیرمجموعه غیرتهی در $\mathcal{L}(V)$ باشد، در این صورت $\mathcal{X}$ به طور همزمان مثلثی شدنی یا به طور خلاصه مثلثی شدنی(شونده) گفته می شود. اگر پایه ای برای فضای برداری V وجود داشته باشد به طوری که نمایش ماتریسی همه تبدیلات خطی در $\mathcal{X}$ نسبت به این پایه ماتریس بالا مثلثی باشند. در قضیه ۱-۲-۱ نشان خواهیم داد که این معادل است با این که یک زنجیر ماکسیمال از زیرفضاهای $\mathcal{X}$-پایای V وجود داشته باشد. (یعنی اگر زنجیر

$$\{۰\} = M_۰ \subset M_۱ \subset \cdots \subset M_{n-۱} = M_n = V$$

از زیرفضاهای $\mathcal{X}$-پایای $M_۰$،$M_۱$،$\cdots$،M_n از V وجود داشته باشد، به طوریکه $dim(M_i) - dim(M_{i-۱}) = ۱$، این زنجیر را زنجیر مثلثی شونده می گوییم.).

همانطور که گفته شد برای یک فضای برداری راست متناهی البعد V روی حلقه تقسیم D می توانیم $\mathcal{L}(V)$ را با $M_n(D)$ یکی در نظر می گیریم پس تحویل پذیری و تحویل ناپذیری روی زیر مجموعه $\mathcal{X}$ از ماتریس ها در $M_n(D)$ همانند مجموعه ای از عملگرها در $\mathcal{L}(V)$ تعریف می شود و همین طور مثلثی کردن. پس $\mathcal{X}$ مثلثی شونده است اگروتنهااگر ماتریس وارون پذیر $S \in M_n(D)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $T \in \mathcal{X}$، $STS^{-۱}$ یک ماتریس بالا مثلثی باشد.

اگر A و B نمایش های ماتریسی یک نگاشت خطی نسبت به پایه های $\mathcal{B}_۱$ و $\mathcal{B}_۲$ باشند، در این صورت یک ماتریس وارون پذیر $S \in M_n(D)$ وجود دارد به طوری که $B = SAS^{-۱}$. یعنی نمایش های ماتریسی یک نگاشت خطی در $\mathcal{L}(V)$ که V یک فضای برداری متناهی البعد راست روی حلقه تقسیم D است نسبت به پایه های $\mathcal{B}_۱$ و $\mathcal{B}_۲$ با هم یکریخت هستند.

تعریف ۱-۱-۸: مدول چپ A روی حلقه R ساده(تحویل ناپذیر) گفته می شود هرگاه $RA \neq ۰$ و A زیرمدول چپ غیربدیهی نداشته باشد. حلقه R ساده گفته می شود اگر $R^۲ \neq ۰$ و R ایده ال دوطرفه غیربدیهی نداشته باشد.

تعریف ۱-۱-۹: اگر R یک حلقه و V یک R-مدول چپ باشد، پوچساز V مجموعه ای از عضوهای R مانند r است به طوری که $rV = ۰$ و با نماد $ann(V)$ نمایش داده می شود.

تعریف ۱-۱-۱۰: R-مدول چپ V وفادار گفته می شود اگر پوچساز V صفر باشد.

تعریف ۱-۱-۱۱: اگر برای حلقه R یک R-مدول چپ ساده وفادار وجود داشته باشد آن گاه، حلقه ی R اولیه گفته می شود.

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک F-جبر باشد که F یک میدان است برای یک زیرمجموعه $\mathcal{X}$ از $\mathcal{A}$، $Alg_F(\mathcal{X})$، نشان دهنده ی جبر تولیدشده توسط $\mathcal{X}$ روی F است. اگر $\mathcal{X}$ تحت ضرب حلقه ای بسته باشد، $\mathcal{X}$ را نیمگروه می گوییم. در این صورت $Alg_F(\mathcal{X})$ همان فضای برداری تولیدشده توسط $\mathcal{X}$ است.

در جبرخطی مقدار ویژه برای ماتریس های روی میدان تعریف شده است. در مورد حلقه های تقسیم چون عناصر لزوماً با هم جابجا نمی شوند برای یک ماتریس مقادیر ویژه چپ و راست که لزوماً با هم جابجا نمی شوند خواهیم داشت در زیر آن ها را تعریف می کنیم.

تعریف ۱-۱-۱۲: فرض کنید V یک فضای برداری راست متناهی البعد روی حلقه تقسیم D باشد. اگر $T \in \mathcal{L}(V)$ دلخواه باشد، $\lambda \in D$ را یک مقدار ویژه راست از T نامیده می شود هرگاه بردار غیرصفر $x \in V$ وجود داشته باشد به طوری که $Tx = x\lambda$، در این صورت x را یک بردار ویژه راست مربوط به مقدار ویژه راست λ گوییم.

از $Tx = x\lambda$ نتیجه می شود که اگر $۰ \neq d \in D$ آن گاه $T(xd) = (xd)d^{-۱}\lambda d$. پس مزدوجی از هر مقدار ویژه راست یک مقدار ویژه راست است، بعلاوه اگر $U \in \mathcal{L}(V)$، وارون پذیر باشد آن گاه

$$UTU^{-۱}(Ux) = (Ux)\lambda$$

پس نگاشت های خطی مشابه مقدار ویژه های راست یکسان دارند. در [۲] ملاحظه می کنیم اگر $dim_D(V) = n$، آن گاه مقادیر ویژه T حداکثر در n کلاس تزویجی قرار می گیرند.

تعریف ۱-۱-۱۳: فرض کنیم V یک فضای برداری متناهی البعد روی حلقه تقسیم D باشد $\lambda \in D$ را یک مقدارویژه داخلی برای $T \in \mathcal{L}(V)$ گوییم هرگاه یک زیرفضای T-پایای W از V و یک بردار $x \in V \backslash W$، وجود داشته باشد به طوری که $Tx - x\lambda \in W$.

مشابه مقدار ویژه های راست، مزدوج هر مقدار ویژه داخلی مجدداً یک مقدار ویژه داخلی است و نگاشت های متشابه مقدار ویژه داخلی یکسان دارند زیرا اگر طبق تعریف $Tx - x\lambda \in W$ آن گاه

$$T(xd) - (xd)(d^{-۱}\lambda d) = Txd - x\lambda d = (Tx - x\lambda)d \in W$$

به آسانی بررسی می شود که اگر $D = F$ یعنی D یک میدان باشد در این صورت مقادیر ویژه داخلی و مقادیر ویژه راست یکسان هستند.

برای یک ماتریس $A \in M_n(D)$، مقدار ویژه راست و مقدار ویژه داخلی همانند نگاشت های خطی روی V تعریف می شوند. اگر A مثلثی شونده باشد آن گاه درایه های قطر اصلی در فرم مثلثی A، مقادیر ویژه داخلی A هستند بعلاوه هر مقدار ویژه داخلی دیگری از A، مزدوجی از یک درایه قطری فرم مثلثی A است. برای ماتریس $A \in M_n(D)$ مقدار ویژه چپ هم به طور طبیعی تعریف می شود ولی مقادیر ویژه چپ خیلی از خصوصیات مقادیر ویژه راست را دارا نیستند. مقادیر ویژه راست خصوصیاتی شبیه به مقادیر ویژه در حالت میدان ها دارند. اگر درایه های یک ماتریس متعلق به یک میدان باشند آن گاه مقادیر ویژه چپ و راست و مقادیر ویژه داخلی یکی هستند و در فرم مثلثی، مقادیر ویژه روی قطر اصلی قرار می گیرند. در این حالت مجموعه مقادیر ویژه A را طیف A گوییم و با $\sigma(A)$ نمایش می دهیم.

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر در $\mathcal{L}(V)$ باشد و $x \in V$ یک بردار دلخواه باشد در این صورت $\{Ax: A \in \mathcal{A}\}$ یک زیرفضای $\mathcal{A}$-پایا از V است، و اگر $x \in V$ وجود داشته باشد به طوری که $V = \{Ax: A \in \mathcal{A}\}$ آن گاه x را یک دور برای $\mathcal{A}$ گوییم.

۱-۲ قضایا و لم های پایه ای

اگر V یک فضای برداری و N زیرفضایی از آن باشد آن گاه فضای خارج قسمتی V/N مجموعه ی همه ی همدسته های $[x] = x + N = \{x + z: z \in N\}$ است که $x \in V$. این فضا با جمع $[x] + [y] = [x + y]$ وضرب $\lambda[x] = [\lambda x]$ برای هر اسکالر λ تشکیل یک فضای برداری می دهد.

اگر $\mathcal{X}$ مجموعه ای از نگاشت های خطی روی V و M و N زیرفضاهای $\mathcal{X}$-پایا از V باشند که $N \subset M$ آن گاه مجموعه عملگرهای خارج قسمتی $\mathcal{X}$ نسبت به $\{M,N\}$ به صورت $\tilde{\mathcal{X}} = \left\{\tilde{A}: \frac{M}{N} \longrightarrow \frac{M}{N}, A \in \mathcal{X}\right\}$ که با عمل $\tilde{A}(x+N) = Ax + N$ برای همه ی $x \in M$ تعریف می شود. در این حالت چون M و N، $\mathcal{X}$-پایا هستند $\tilde{A}$ خوشتعریف است.

اگر $\mathcal{P}$ خاصیتی از نگاشت های خطی باشد، خاصیت $\mathcal{P}$ توسط خارج قسمت به ارث برده می شود هرگاه برای هر مجموعه $\mathcal{C}$ از عملگرهای خطی و زیرفضاهای $\mathcal{C}$-پایای $N \subset M$، اگر مجموعه ی $\mathcal{C}$ خاصیت $\mathcal{P}$ را داشته باشد آن گاه مجموعه ی عملگرهای خارج قسمتی از $\mathcal{C}$ نسبت به $\{N,M\}$ یعنی $\tilde{\mathcal{C}}$ نیز خاصیت $\mathcal{P}$ را داشته باشد.

قضیه ۱-۲-۱: اگر V یک فضای برداری راست روی حلقه تقسیم D باشد در این صورت زیرمجموعه غیرتهی $\mathcal{X}$ از $\mathcal{L}(V)$ مثلثی شونده است اگروتنهااگر یک زنجیر ماکسیمال از زیرفضاهای $\mathcal{X}$-پایای $M_۰$،$M_۱$،$\cdots$،M_n از V موجود باشد به طوری که $dim(M_i) - dim(M_{i-۱}) = ۱$.

اثبات: فرض کنیم $\mathcal{X}$ مثلثی شونده باشد، یعنی پایه ای برای V وجود دارد به طوری که نسبت به آن پایه هر عضو $\mathcal{X}$ بالا مثلثی است، فرض کنیم $\mathcal{B} = \{\alpha_۱, \alpha_۲, \cdots, \alpha_n\}$ پایه مورد نظر برای V باشد. در نظر می گیریم $T \in \mathcal{X}$ دلخواه و نمایش ماتریسی آن نسبت به پایه $\mathcal{B}$ به صورت زیر باشد

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & \lambda_۲ & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ ۰ & {\lambda^۱}_۲ & {\lambda^1}_3 & \cdots & {\lambda^۱}_n \\ \vdots & 0 & {\lambda^2}_3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & {\lambda^{n-۲}}_n \\ 0 & ۰ & 0 & ۰ & {\lambda^{n-۱}}_n \end{bmatrix}$$

پس اثر T را روی هر یک از اعضاء پایه به صورت زیر داریم

$$T(\alpha_۱) = \alpha_۱\lambda_۱ + \alpha_۲ ۰ + \cdots + \alpha_n ۰,$$

$$T(\alpha_۲) = \alpha_۱\lambda_۲ + \alpha_۲{\lambda^۱}_۲ + \alpha_۳ ۰ + \cdots + \alpha_n ۰$$

$$\vdots$$

$$T(\alpha_n) = \alpha_۱\lambda_n + \alpha_۲{\lambda^۱}_n + \cdots + \alpha_n{\lambda^{n-۱}}_n$$

حال زیر فضاهای $\mathcal{X}$-پایا را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$M_۰ = \langle ۰ \rangle \ , \ M_۱ = \langle \alpha_۱ \rangle \ , \ \cdots \ , \ M_n = \langle \alpha_۱ | \alpha_۲ | \cdots | \alpha_n \rangle$$

نشان می دهیم M_i ها زیر فضاهای $\mathcal{X}$-پایا هستند. برای هر $T \in \mathcal{X}$ و هر $x \in M_k$ داریم

$$Tx = T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} T(\alpha_i)\lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{j+1} \lambda^{j}{}_{i} \in M_k$$

پس $TM_k \subseteq M_k$ یعنی M_i زیرفضاهای $\mathcal{X}$-پایا هستند و همچنین زنجیر

$$\langle 0 \rangle = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = V$$

از زیرفضاهای $\mathcal{X}$-پایا را داریم که $M_i \subset M_{i+1}$(با توجه به تعریف می بینیم $M_i \subseteq M_{i+1}$ از این که $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}$ پایه ای برای V است، $\alpha_{i+1} \in M_{i+1}$ ولی $\alpha_{i+1} \not\in M_i$ پس $M_i \neq M_{i+1}$.) بنابراین در زنجیرفوق زیر مجموعه ها اکید می باشند به ازای هر i، $dim(M_i) = i$. در نتیجه $dim(M_i) - dim(M_{i-1}) = 1$.

بالعکس فرض کنیم زنجیر

$$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_{n-1} \subset M_n = V$$

از زیرفضاهای $\mathcal{X}$-پایای $M_n, M_{n-1}, \cdots, M_1$ از V را داشته باشیم به طوری که $dim(M_i) - dim(M_{i-1}) = 1$ نشان می دهیم که این زنجیر مثلثی شونده است، با توجه به زنجیر ملاحظه می کنیم اگر $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_i\}$ پایه ای برای M_i باشد چون $M_i \subset M_{i+1}$ پس $\mathcal{B}_i$ قابل توسیع به پایه ای برای V است چون برای هر i،

$$dim\ (M_{i+1}) - dim(M_i) = 1$$

پس با اضافه کردن یک بردار به $\mathcal{B}_i$ ، پایه $\mathcal{B}_{i+1}$ برای M_{i+1} به دست می آید به همین ترتیب اگر فرض کنیم $dim\ (V) = n$ پایه ای به صورت $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}$ برای V به دست می آید.

حال برای هر $T \in \mathcal{X}$ داریم

$$T\alpha_1 \in \langle \alpha_1 \rangle = M_1 \longrightarrow \quad T\alpha_1 = \alpha_1 \lambda_1$$

$$T\alpha_2 \in \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = M_2 \longrightarrow \quad T\alpha_2 = \alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2\, \lambda^{1}{}_{2}$$

$$\vdots$$

$$T\alpha_n \in \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n \rangle = M_n \longrightarrow \quad T\alpha_n = \alpha_1 \lambda_n + \alpha_2 \lambda^{1}{}_{n} + \ldots + \alpha_n \lambda^{n-1}{}_{n}$$

نمایش T نسبت به پایه $\mathcal{B}$ به صورت زیر است

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & \lambda_۲ & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ ۰ & {\lambda^۱}_۲ & {\lambda^1}_3 & \cdots & {\lambda^۱}_n \\ \vdots & 0 & {\lambda^2}_3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & {\lambda^{n-۲}}_n \\ 0 & ۰ & 0 & ۰ & {\lambda^{n-۱}}_n \end{bmatrix}$$

که مثلثی است و حکم اثبات می شود.■

لم بعد، لم مثلثی کردن است که یک محک مناسب برای نشان دادن مثلثی شدن مجموعه ای از نگاشت های خطی است، که مکرراً برای اثبات مثلثی شدن به کار می رود.

لم ۱-۲-۲(لم مثلثی کردن[۱]): فرض کنیم $\mathcal{P}$ مجموعه ای از خاصیت ها باشد که توسط خارج قسمت ها به ارث برده می شود. اگر هر مجموعه از نگاشت های خطی روی فضایی از بعد بزرگتر از ۱ که در خاصیت $\mathcal{P}$ صدق می کند تحویل پذیر باشد، آن گاه هر مجموعه از نگاشت های خطی صادق خاصیت $\mathcal{P}$ مثلثی شونده است.

اثبات: فرض کنیم $\mathcal{X}$، مجموعه ای از نگاشت های خطی باشد که در خاصیت $\mathcal{P}$ صدق می کنند یک زنجیر ماکسیمال از زیرفضاهای پایای $\mathcal{X}$ را در نظر می گیریم

$$\{۰\} = M_۰ \subset M_۱ \subset \cdots \subset M_{n-۱} \subset M_n = V$$

کافیست نشان دهیم که برای یک i ثابت، بعد فضای خارج قسمتی $M_i/M_{i-۱}$ مساوی ۱ است. به برهان خلف فرض کنیم بعد $M_i/M_{i-۱}$ بزرگتر از ۱ باشد. طبق فرض مجموعه ی همه ی نگاشت های خطی $\mathcal{X}$ نسبت به $\{M_{i-۱}, M_i\}$ زیر فضاهای پایای غیربدیهی مانند L دارد

$$L = \{[x]: x \in M_i\}$$

حال در نظر می گیریم $\acute{L} = \{x \in M_i: [x] \in L\}$ ادعا می کنیم $\acute{L}$، $\mathcal{X}$-پایاست زیرا برای هر $x \in \acute{L}$ و $T \in \mathcal{X}$چون M_i، $\mathcal{X}$-پایا است $Tx \in M_i$ پس $[Tx] \in L$ در نتیجه $Tx \in \acute{L}$. $\acute{L}$ غیربدیهی است چون L غیربدیهی است و $M_{i-۱} \subset \acute{L} \subset M_i$ که این تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می شود.■

در این قسمت می خواهیم با ماتریس های روی حلقه های تقسیم بیشتر آشنا شویم قضایایی که بیان می شود این هدف را برای ما ممکن می سازد.

گزاره ۱-۲-۳: هر حلقه تقسیم D یک حلقه ساده است .

---

۱. Triangularization Lemma

اثبات: فرض کنیم I یک ایده ال از D باشد آن گاه برای هر $a \in I$ چون $a^{-1} \in D$ پس از ایده ال بودن I نتیجه می گیریم $1 = aa^{-1} \in I$ در نتیجه $I = D$. ■

گزاره۱-۲-٤: اگر R یک حلقه ی یکدار باشد. در این صورت ایده ال های $M_n(R)$ از فرم $M_n(I)$ هستند که I ایده الی از R است.

اثبات: اگر I یک ایده ال در R باشد واضح است که $M_n(I)$ ایده الی در $M_n(R)$ است حال اگر فرض کنیم J یک ایده ال از $M_n(R)$ باشد تعریف می کنیم

$$I := \{x: x = a_{11}, [a_{ij}] \in J\}$$

به سادگی اثبات می شود که I ایده الی از R است، حال باید نشان دهیم که $J = M_n(I)$، برای هر ماتریس $M = [m_{ij}]$ رابطه $E_{ij}ME_{kl} = m_{jk}E_{il}$ * را داریم که $\{E_{ij}\}$ نشان دهنده ی ماتریس های مقدماتی هستند. فرض کنیم که $M = [m_{ij}] \in J$، با فرض $i = l = 1$، رابطه بالا نشان می دهد که $m_{jk}E_{11} \in J$ بنابراین $m_{jk} \in I$ برای همه ی j, k و این نشان می دهد که $J \subseteq M_n(I)$. برعکس برای هر $A = [a_{ij}] \in M_n(I)$، نشان می دهیم $A \in J$ برای اثبات این مطلب کافیست نشان دهیم برای همه ی i, l، $a_{il}E_{il} \in J$. یک ماتریس $M = [m_{ij}] \in J$ پیدا می کنیم به طوری که $a_{il} = m_{11}$، آن گاه برای $j = k = 1$ در رابطه * به دست می آوریم $a_{il}E_{il} = m_{11}E_{il} = E_{i1}ME_{1l} \in J$ پس $A = [a_{ij}] \in J$ پس $M_n(J) \subseteq I$ و در نتیجه $M_n(J) = I$. ■

نتیجه ۱-۲-۵ : فرض کنیم D یک حلقه تقسیم در این صورت $M_n(D)$ یک حلقه ساده است.

اثبات: ایده ال های $M_n(D)$ به صورت $M_n(I)$ است که I ایده الی از D می باشد، چون ساده است پس تنها ایده ال های D، $\{0\}$ و D هستند در نتیجه $M_n(D)$ ایده ال سره غیربدیهی ندارد و این یعنی $M_n(D)$ ساده است. ■

اشتراک همه ایده ال های چپ ماکسیمال R را رادیکال جیکوبسون R گوییم و با $Rad(R)$ نشان می دهیم. اگر $R \neq 0$ بنا به لم زرن[2] ایده ال چپ ماکسیمال همواره وجود دارد. و اگر $R = 0$ تعریف می کنیم $Rad(R) = 0$.

حلقه R نیمه ساده گفته می شود اگر رادیکال جیکوبسون R صفر باشد. به راحتی دیده می شود که هر حلقه ی ساده، نیمه ساده است و اگر حلقه R دارای این خاصیت باشد که هر زنجیر نزولی از ایده آل های چپ آن ایستا باشد آن گاه R را یک حلقه آرتینی چپ گویند.

---

[2]. Zorn's Lemma