دانشگاه تفرش

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

تشابه، توپولوژی و یکنواختی در فضاهای متری تعمیم یافته

اساتید راهنما:

دکتر علی پارسیان

دکتر اسماعیل پیغان

استاد مشاور:

دکتر اسماعیل نظری

دانشجو:

فاطمه شریفی

1390

چکیده

در این پایان نامه پس از معرفی مفاهیمی چون توپولوژی، اصول جدا سازی، مشبّکه ها، توپولوژی اسکات و متریک های تعمیم یافته و سیستم های تشابهی تعمیم یافته و گوی های پیش باز راست، چپ و ساختارهای همسایگی بدست آمده از گوی های پیش باز به مطالعه سیستم های انتقالی، مشبّکه های پیوسته و جبری و معادل هایی از توابع پیوسته موضعی و سرتاسری می پردازیم. همچنین قضایای مهم مرتبط با این مفاهیم را ارائه می دهیم.

کلمات کلیدی: متریک های تعمیم یافته، تشابه، یکنواختی، مشبّکه ها، سیستم های تعمیم یافته، توابع پیوسته موضعی، توابع پیوسته سرتاسری و سیستم های انتقالی

فهرست مطالب

فصل پنجم: مشبّکه ها و فضاهای تشابهی

فصل ششم: توصیفاتی از توابع پیوسته موضعی و سرتاسری

مقدمه

توپولوژی اسکات یکی از مهم ترین توپولوژیک هاست که در علوم دیگر از جمله علوم کامپیوتر نیز کاربرد فراوان دارد. این توپولوژی توسط د. اسکات[1]، در سال 1972 برای مشبّکه های کامل معرفی گردید و سپس روی مجموعه های مرّتب جزئی مورد استفاده قرار گرفت[16].

این پایان نامه مشتمل بر شش فصل می باشد.

در فصل اوّل به بیان تعاریف و مفاهیم مقدّماتی توپولوژی از جمله انواع توپولوژی، اصول جداسازی، مشبّکه ها و توپولوژی اسکات که در فصل های بعدی مورد استفاده قرار می گیرد، پرداخته شده است. تمام مطالب بیان شده در این فصل در اکثر کتب توپولوژی عمومی از جمله مرجع [2] موجود می باشد.

یکی از مهم ترین و معمولی ترین طریقه روش های ساخت یک توپولوژی روی یک مجموعه این است که توپولوژی را بر حسب متریکی روی آن مجموعه تعریف کنیم. با توجه به اهمیت این مبحث، در فصل دوّم فضاهای متریک تعمیم یافته را معرفی کرده و مباحثی از این گونه فضاها مانند متریک نما، شبه متریک نما و متریک نمای جزئی را مورد مطالعه قرار می دهیم. همچنین مثال های متنوعی از این مفاهیم را در این فصل ارائه داده می شود.

در فصل سوّم فضاهای همسایگی را بیان کرده و سپس با قرار دادن شرایطی این فضاها با فضاهای توپولوژیک معادل می شوند. این معادل سازی باعث می شود که ما به جای فضاهای توپولوژیک بتوانیم از فضاهای همسایگی که کار کردن با آنها ساده است، استفاده کنیم. در ادامه این فصل به معرفی سیستم های تشابهی تعمیم یافته و... که در فصل های بعد از آن استفاده می شوند، می پردازیم.

فصل چهارم در برگیرنده تعاریف، گزاره ها و قضایای مهم در مورد سیستم های انتقالی می باشد. این سیستم ها همان سیستم های تشابهی تعمیم یافته با شرایط اضافی می باشند.

1. D. Scott

در فصل پنجم مشبّکه های پیوسته و جبری، نیم مشبّکه ها و فضاهای تشابهی مورد مطالعه و بررسی قرار می گیرد. تمام گزاره ها و قضایای بیان شده در این فصل پایه و اساس مطالب فصل بعد را تشکیل می دهد.

از آنجا که استفاده از تابع ناظر مستلزم ایجاد تشابه بیشتر و همچنین کار دشواری است، لذا در فصل ششم به معرفی مفاهیم دیگر می پردازیم که نیازی به استفاده از تابع ناظر نمی باشد. در واقع این فصل در بر گیرنده توابع پیوسته موضعی و سرتاسری و رسته های مرتبط با این توابع می باشد.

فصل اوّل

تعاریف و مقدمات مورد نیاز

1-1) تعاریف

در این فصل ابتدا تعاریف مورد نیاز و اساسی را بیان می کنیم.

تعریف 1-1-1: فرض کنیم X مجموعه ی دلخواه باشد. یک توپولوژی τ روی مجموعه ی X، یک مجموعه از زیر-مجموعه های X می باشد که در اصول زیر صدق می کند:

i) $\varnothing, X \in \tau$

ii) تحت اجتماع دلخواه بسته است، یعنی اگر $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ خانواده ی اندیس دار از عناصر τباشد آنگاه$\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \in \tau$.

iii) تحت اشتراک متناهی بسته است، یعنی اگر $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^{n}$خانواده ی متناهی از عناصر τباشد آنگاه$\bigcap_{\alpha=1}^{\alpha=n} U_\alpha \in \tau$.

تعریف 1-1-2: یک فضای توپولوژیک[1]، یک زوج (X,τ) است که در آن X یک مجموعه و τ یک توپولوژی روی X می باشد.

1.Topological space

مثال 1-1-3: اگر X مجموعه ای دلخواه باشد، گردایه ی همه ی زیر مجموعه های آن تشکیل توپولوژیی در X می دهد که به توپولوژی گسسته[1] موسوم است. گردایه ی همه ی زیر مجموعه های X که فقط شامل $\varnothing$ و X باشد نیز یک توپولوژی در X است؛ که آن را توپولوژی ناگسسته[2] یا توپولوژی بیمایه می نامیم.

مثال 1-1-4: مجموعه $S=\{0,1\}$ را با توپولوژی $\{S,\{1\}, \varnothing\}$، توپولوژی سیرپینسکی[3] گوییم.

تعریف 1-1-5: مجموعه ها در τ مجموعه های باز نامیده می شوند. یک پایه [4] از (X, τ) زیر مجموعه ی مانند β از τ است، بطوری که برای هر O در τ و هر $x\in O$، مجموعه ی B در β موجود باشند به گونه ای که $x\in B \subseteq O$.

تعریف 1-1-6: گردایه ای از زیر مجموعه های X را یک زیر پایه [5] برای یک توپولوژی روی X می خوانند اگر اجتماع اعضای آن برابر X باشد.

تعریف 1-1-7: فرض کنیم $A \neq \varnothing$ یک مجموعه باشد. یک ترتیب روی A رابطه ای مانند $< \subseteq A\times A$ است بطوری که،

i) رابطه $<$ مقایسه پذیر است، یعنی برای هر $x, y\in A$ که $x \neq y$ داریم، $x < y$ یا $y < x$.

ii) رابطه $<$ غیر بازتابی است، یعنی برای هر $x \in A$، $x \not< x$.

iii) رابطه $<$ انتقالی یا ترایایی است، یعنی برای هر $x, y, z\in A$ که $x < y$ و $y < z$ آنگاه $x < z$.

مجموعه A همراه با ترتیب $<$ را مجموعه مرتب[6] می نامیم.

1. Discrete topology
2. Indiscrete topology
3.Sierpinski topology
4. Basis
5. Subbasis
6.Ordered set

تعریف 1–1–8: فرض کنیم X یک مجموعه با یک رابطه ی ترتیبی $<$ باشد. برای هر عضو دلخواه $a, b\in X$ با شرط $a < b$، چهار زیر مجموعه از X به صورت زیر مشخص می شوند که آنها را بازه های (فاصله های) تعیین شده توسط a و b می نامیم.

$$(a, b) =\{x \mid a < x < b\} \qquad [a, b) =\{x \mid a \le x < b\}$$

$$(a, b] =\{x \mid a< x \le b\} \qquad [a, b] =\{x \mid a \le x \le b\}$$

مجموعه ی (a, b) بازه های باز در X، $[a, b]$ بازه های بسته در X، $[a, b)$ و $(a, b]$ را مجموعه های نیمه باز در X می نامند.

تعریف 1–1–9: فرض کنیم X یک مجموعه با یک رابطه ی ترتیبی و حداقل دو عنصر باشد. همچنین گیریم β گردایه ی تمام زیر مجموعه هایی که به صورت یکی از انواع زیر باشد:

i) تمام بازه های باز (a, b) در X.

ii) تمام بازه های نیمه باز به فرم $[a_0 , b)$ که a_0 کوچکترین عضو X است (اگر چنین عضوی موجود باشد).

iii) تمام بازه های نیمه باز به فرم $(a, b_0]$ که b_0 بزرگترین عضو X است (اگر چنین عضوی موجود باشد).

گردایه ی β یک پایه برای توپولوژی X است که آن را توپولوژی ترتیبی[1] می نامیم.

تعریف 1–1–10: فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد و $Y \subseteq X$. در این صورت گردایه ی $\tau_Y = \{U\cap Y \mid U\in\tau\}$ یک توپولوژی در Y است. این توپولوژی را توپولوژی القائی τ به Y یا توپولوژی زیر - فضایی[2] در Y می نامند. همچنین Y را زیر فضای X می خوانند.

تعریف 1–1–11: فرض کنیم (X, τ) و (X, τ') دو فضای توپولوژیک باشند. در این صورت گردایه ی

$$\beta = \{U\times V \mid U\in\tau , V\in\tau' \}$$

1.Order topology
2.Supspace topology

یک پایه ی توپولوژیک در $X\times Y$ است. توپولوژی تعریف شده به وسیله ی این پایه را توپولوژی حاصلضربی [1] در X می‌–خوانیم.

تعریف 1–1–12: دو فضای توپولوژیک مفروض (X, τ_X) و (Y, τ_Y) را در نظر می گیریم، تابع $f : X\to Y$ پیوسته است اگر تصویر معکوس هر مجموعه ی باز درY باز در X باشد. به عبارت دیگر

$$V\in\tau_Y \qquad \Rightarrow \qquad f^{-1}(V) \in\tau_X$$

تعریف 1–1–13: تابع $F: X\times Y\to Z$ را بطور مجزّاً پیوسته در هر متغیر [2] گوییم، هرگاه برای هر $b\in Y$ نگاشت $h: X\to Z$ با ضابطه $h(x) = F(x, b)$ پیوسته و همین طور برای هر $a\in X$ نگاشت $k: X \to Z$ با ضابطه $k(y) = F(a, y)$ پیوسته باشد.

گزاره 1–1–14: اگر تابع $F: X\times Y\to Z$ پیوسته باشد، آنگاه F بطور مجزّاً پیوسته در هر متغیر است.□

البته عکس گزاره بالا در حالت کلی برقرار نیست، در این مورد می توان مثال زیر را مطرح کرد.

مثال 1–1–15: فرض کنیم $F: \mathbb{R}\times \mathbb{R}\to\mathbb{R}$، با ضابطه ی زیر در نظر می گیریم.

$$\begin{cases} F(x, y) = x y/ x^2 + y^2 & (x, y) \neq (0, 0) \\ F(x, y) = 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ابتدا نشان می دهیم F بطور مجزّاً پیوسته در هر متغیر است. برای هر b از $\mathbb{R}$ ، تابع $h : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه ی زیر در نظر می گیریم.

$$\begin{cases} F(x, b) = x b / x^2 + b^2 & (x, b) \neq (0, 0) \\ F(x, b) = 0 & (x, b) = (0, 0) \end{cases}$$

کافیست پیوستگی h را تنها در نقطه ی $x = 0$ بررسی کنیم.

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} xb / x^2 + b^2 = 0 = h(0)$$

1.Product topology
2.Continuous in each argument separately or separately continuous

بنابراین h تابعی پیوسته است.

همچنین برای هر a از $\mathbb{R}$ تابع $k: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه ی زیر در نظر می گیریم.

$$\begin{cases} F(a, y) = a\,y / a^2 + y^2 & (a, y) \neq (0, 0) \\ F(a, y) = 0 & (a, y) = (0, 0) \end{cases}$$

کافیست پیوستگی k را در نقطه ی $y = 0$ بررسی کنیم.

$$\lim_{y\to 0} k(y) = \lim_{y\to 0} ay / a^2 + y^2 = 0 = k(0)$$

بنابراین k تابعی پیوسته است. بحث فوق نشان می دهد که تابع F بطور مجزّا پیوسته در هر متغیر است.

حال تابع $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعریف شده با ضابطه ی $g(x) = F(x, x)$ را بدست می آوریم، که به صورت زیر می باشد.

$$\begin{cases} F(x, x) = 1/2 & x \neq 0 \\ F(x, x) = 0 & x = 0 \end{cases}$$

در پایان نشان می دهیم که F پیوسته نیست. فرض کنیم F پیوسته باشد. داریم:

$$0 \leq (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \quad \Rightarrow \quad 2xy \leq x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad x\,y / x^2 + y^2 \leq 1/2$$

باز $(-1/2, 1/2)$ را از $\mathbb{R}$ در نظر می گیریم. در این صورت $F^{-1}(-1/2, 1/2)$ بازی از $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ و شامل $(0, 0)$ است. بنابراین باز $(-r, r) \times (-r, r)$ شامل $(0, 0)$ موجود است که $(-r, r) \times (-r, r) \subseteq F^{-1}(-1/2, 1/2)$.

بنابراین $F(r/2, r/2) \in (-1/2, 1/2)$ امّا $F(r/2, r/2) = 1/2$ که تناقض است. در نتیجه F پیوسته نیست.

تعریف 1–1–16: فرض کنیم $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ یک نگاشت پیوسته و یک به یک و $f(X) = Z \subseteq Y$ زیرفضای Y باشد، در این صورت تابع $f' : X \to Z$ که از تحدید حوزه مقادیر f بدست آمده دوسویی است و اگر f' هومئومورفیسمی بین X و Z باشد، آنگاه f را یک نشاننده توپولوژیک[1] X در Y گوییم.

1.Topological embedding

تعریف 1–1–17: گوییم فضای X در نقطه ی x پایه شمارا دارد هرگاه گردایه ی شمارایی از همسایگی های x مانند β موجود باشد بطوری که هر همسایگی x دست کم حاوی یک عضو این گردایه باشد. اگر فضایی در هر نقطه اش یک پایه ی شمارا داشته باشد، گوییم در اولین اصل شمارایی صدق می کند.

تعریف 1–1–18: هرگاه فضای توپولوژیک X دارای پایه شمارا باشد، گوییم X در دومین اصل شمارایی صدق می‌کند.

تعریف 1–1–19: فضای توپولوژیک X را T_0 گوییم هرگاه برای هر دو نقطه ی متمایز x و y از X حداقل یکی از این نقاط شامل همسایگی ای باشد که شامل نقطه ی دیگر نباشد.

تعریف 1–1–20: فضای توپولوژیک X را T_1 گوییم هرگاه برای هر دو نقطه ی متمایز x و y از X هر یک دارای همسایگی ای باشند که شامل دیگری نباشد.

تعریف 1–1–21: فضای توپولوژیک X را T_2یا هاسدورف[1] گوییم هرگاه برای هر دو نقطه ی متمایز x و y از X همسایگی هایی چون U و V به ترتیب شامل x و y موجود باشند بطوری که، $U \cap V = \varnothing$.

تعریف 1–1–22: گیریم X یک فضای T_1 باشد (در چنین شرایطی کلیه ی مجموعه های تک عضوی X بسته اند). در این صورت فضای X را T_3یا منظم[2] گوییم هرگاه برای هر $x \in X$ و هر مجموعه ی بسته B از X همسایگی هایی مجزّا از X به ترتیب شامل x و B موجود باشند.

تعریف 1–1–23: فضای توپولوژیک X را $T_{3\frac{1}{2}}$یا تیخونوف[3] گوییم هرگاه بطور کامل منظم باشد، یا به عبارت دیگر هرگاه برای هر $x \in X$ و مجموعه بسته A که شامل نقطه ی x نیست، تابعی پیوسته مانند $\varphi: X \to I$ موجود باشد بطوری که،

$$\varphi(x) = 1 \qquad \& \qquad \forall a \in A\ ,\ \varphi(a) = 0$$

البته در تعریف بالا می توان به جای A از متمم همسایگی مانند U (یا U^C) که شامل نقطه ی x است استفاده کرد.

1.Hausdorff space
2. Regular space
3.Tychonoff space

برای هر فضای X، فرض کنیم I^X نمایش مجموعه ی همه ی نگاشت های پیوسته $f : X \to I$ است. گیریم $\{I_f \mid f \in I^X\}$ یک خانواده از بازه های واحد اندیس دار I^X باشد، و P^X حاصلضرب دکارتی $\Pi\{I_f \mid f \in I^X\}$ است[2].

قضیه 1–1–24: اگر X بطور کامل منظم باشد، آنگاه قابل نشانیدن در $\Pi\{I_f \mid f \in I^X\}$ می باشد[2].

تعریف 1–1–25: گیریم X یک فضای T_1 باشد. در این صورت فضای X را T_4 یا نرمال[1] گوییم هرگاه برای هر دو مجموعه ی بسته و مجزّای A و B از X همسایگی هایی مجزّا از X به ترتیب شامل A و B موجود باشند.

تعریف 1–1–26: فضای توپولوژیک X را T_5 گوییم هرگاه هر زیر فضای X نرمال باشد.

تذکر 1–1–27: همواره روابط زیر برقرار است:

$$T_5 \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

1–2) مشبّکه[2] ها

تعریف 1–2–1: فرض کنیم X مجموعه ای ناتهی است. یک پیش ترتیب $\leq$ روی X یک رابطه ی دوتایی روی X است که بازتابی و ترایایی می باشد. در این صورت زوج $(X, \leq)$ را مجموعه ی پیش مرتب[3] می نامیم. پیش ترتیب $\leq$ روی X را که برای هر $x, y \in X$، $x \leq y$ یا $y \leq x$ پیش ترتیب کلی[4] (کامل) روی X نامیم و زوج $(X, \leq)$ را مجموعه ی پیش مرتب کلّی (پیش مرتب کامل) گوییم.

1. Normal space
2. Lattice
3. Preordered set
4.Total preorder

تعریف 1–2–2: یک پیش ترتیب پادمتقارن روی X را یک ترتیب[1] روی X نامیم؛ یعنی برای هر $x, y \in X$، $x \le y$ یا $y \le x$ آنگاه $x = y$.

مثال 1–2–3: مجموعه $X = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid card(A) < \infty\}$ را در نظر می گیریم و رابطه $\le$ روی X را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A \le B \quad \Leftrightarrow \quad \max(A) \le \max(B)$$

به راحتی می توان تحقیق کرد که $\le$ پیش ترتیب کلّی روی X است، اما یک ترتیب روی X نیست، زیرا به عنوان مثال اگر $A=\{1, 2, 3\}$ و $B=\{-\sqrt{2}, 3\}$، آنگاه $A \le B$ و $B \le A$ $(A \sim B)$ ولی $A \ne B$. این دو مجموعه حتی از لحاظ تعداد عناصر هم یکسان نیستند، بنابراین این هم ارزی با هم ارزی در تئوری مجموعه ها متفاوت است.

تعریف 1–2–4: گوییم a یک کران پایین مجموعه $X \subseteq L$ که مجموعه L با رابطه $\le$ یک مجموعه پیش ترتیب است هرگاه برای هر $x \in X$، $a \le x$ باشد.

تعریف 1–2–5: گوییم b یک کران بالا مجموعه $X \subseteq L$ که مجموعه L با رابطه $\le$ یک مجموعه پیش ترتیب است هرگاه برای هر $x \in X$، $x \le b$ باشد.

تعریف 1–2–6: اگر مجموعه ی کران های بالای X دارای کوچکترین عنصر یکتا باشد، آن را کوچکترین کران بالامی نامیم، و با نماد $\bigvee X$ یا $\sup X$ نمایش می دهیم. و بطور مشابه بزرگترین کران پایین تعریف می شود، و با نماد $\bigwedge X$ یا $\inf X$ نمایش داده می شود.

همین طور عبارت $x = \vee^{\uparrow} X$ به این مفهوم است که اوّلاً X مجموعه جهتدار و ثانیاً x کوچکترین کران بالاست.

1.Order

تعریف 1–2–7: فرض کنیم مجموعه L با رابطه $\le$ یک مجموعه پیش ترتیب است. و زیر مجموعه ی ناتهی D از L را جهتدار [1] گوییم هرگاه هر زیر مجموعه ی متناهی از D دارای کران بالا در D باشد. به طور دوگان، زیر مجموعه ی ناتهی F از L را فیلتر شده [2] گوییم هرگاه هر زیر مجموعه ی متناهی از F دارای کران پایین در F باشد.

تعریف 1–2–8: فرض کنیم مجموعه L با رابطه $\le$ یک مجموعه پیش ترتیب است. برای هر $X \subseteq L$ و $x \in L$ داریم:

1) $\downarrow X = \{y \in L : \ y \le x, \ \exists\, x \in X\}$

2) $\uparrow X = \{y \in L : \ x \le y, \ \exists\, x \in X\}$

3) $\downarrow x = \downarrow \{x\}$

4) $\uparrow x = \uparrow \{x\}$

5) X را یک مجموعه پایین گوییم، هرگاه $X = \downarrow X$ و آن را یک مجموعه بالا گوییم، هرگاه $X = \uparrow X$.

6) X را یک ایده آل [3] گوییم، هرگاه یک مجموعه پایین جهتدار باشد و آن را یک فیلتر [4] گوییم، هرگاه یک مجموعه بالا فیلتر شده باشد. مجموعه همه ی ایده آل های L را با $\mathrm{Id}\, L$ نمایش می دهیم.

7) یک ایده آل را اصلی گوییم، هرگاه دارای عنصر ماکزیمم باشد و یک فیلتر را اصلی گوییم، هرگاه دارای عنصر مینیمم باشد.

توجه کنیم که ایده آل های اصلی برای هر $x \in L$ فقط مجموعه های $\downarrow x$ هستند. مجموعه از پایین کراندار یک زیر–مجموعه ی $X \subseteq L$ معادل با مجموعه $\cap \{\downarrow x \ : \ x \in X\}$ می باشد، و این نیز یکسان با مجموعه $\downarrow \inf X$ است در صورت وجود اینفیمم X. باید توجه داشت که همچنین $X \subseteq \downarrow X = \downarrow(\downarrow X)$ ، و بطور مشابه برای $\uparrow X$ نیز برقرار است.

---

1. Direct set
2. Filtered set
3. Ideal set
4. Filter set

تعریف 1–2–9: مجموعه جزئاً مرتب S را نیم مشبّکه اینفیمم [1] گوییم هرگاه هر دو عنصر آن دارای یک اینفیمم باشد، یا بطور معادل هرگاه هر زیر مجموعه ی ناتهی متناهی دارای یک اینفیمم باشد، و به صورت $a \wedge b$ نمایش می‌دهیم. غالباً منظور از نیم مشبّکه همان نیم مشبّکه اینفیمم است.

تعریف 1–2–10: مجموعه جزئاً مرتب S را نیم مشبّکه سوپریمم[2] گوییم هرگاه هر دو عنصر آن دارای یک سوپریمم باشد، یا بطور معادل هرگاه هر زیر مجموعه ی ناتهی متناهی دارای یک سوپریمم باشد، و به صورت $a \vee b$ نمایش می‌دهیم.

تعریف 1–2–11: هر مجموعه که نیم مشبّکه اینفیمم و سوپریمم باشد، یک مشبّکه گوییم.

یک مشبّکه را می توان با ساختارجبری $(L, \vee, \wedge)$ و یا رابطه جزئی $\leq$ روی L نوشت، که هر دو با هم معادلند:

$$a \leq b \iff b = a \vee b \qquad \text{یا} \qquad a \leq b \iff a = a \wedge b$$

مثال 1–2–12: مجموعه توانی با رابطه شمول یک مشبّکه است.

تعریف 1–2–13: اگر یک مجموعه جزئاً مرتب دارای بزرگترین عنصر باشد، آن را واحد یا اوج[3] می نامیم و با $\top$ یا 1 نمایش می دهیم.

تعریف 1–2–14: اگر یک مجموعه جزئاً مرتب دارای کوچکترین عنصر باشد، آن را صفر یا پایین [4] می نامیم و با $\perp$ یا 0 نمایش می دهیم.

تعریف 1–2–15: هر مشبّکه ای که دارای ماکزیمم و مینیمم باشد را مشبّکه کراندار [5] گوییم. و قرارداد می کنیم 0 و 1 به ترتیب مینیمم و ماکزیمم مشبّکه کراندار هستند.

---
1. Inf semilattice
2. Sup semilattice
3. Top
4. Bottom
5. Bound lattice

تعریف 1–2–16: یک مجموعه جزئاً مرتب را کامل نسبت به مجموعه های جهتدار یا کامل جهتدار [۱] گوییم، هرگاه هر زیر مجموعه جهتدار دارای یک سوپریمم باشد، و با dcpo نمایش می دهیم.

تعریف 1–2–17: یک مجموعه جزئاً مرتب نیم مشبّکه و کامل جهتدار را نیم مشبّکه کامل جهتدار[۲] گوییم.

تعریف 1–2–18: مجموعه جزئاً مرتب را مشبّکه کامل [۳] گوییم هرگاه هر زیر مجموعه آن دارای سوپریمم و اینفیمم باشد. و هر مشبّکه کامل، یک مشبّکه کراندار است، ولی هر مشبّکه کراندار، یک مشبّکه کامل نیست.

مثال 1–2–19: فرض کنیم $Q'= [-1,1] \cap Q$ یک مشبّکه کراندار با رابطه ترتیب جزئی $\leq$ باشدکه زیر مجموعه‌ی آن یعنی $\{q\in Q'|\ q^2 < 2\}$ دارای سوپریمم نیست، بنابراین مشبّکه کامل نیست.

گزاره 1–2–20: L یک مشبّکه کرانداراست اگر و تنها اگر هر زیر مجموعه آن کراندار باشد.

اثبات: ($\Leftarrow$) واضح است.

($\Rightarrow$) کافیست که زیر مجموعه ی L را خود L در نظر بگیریم.□

باید توجه کنیم که کرانداری در طرف راست مربوط به مشبّکه ها و کرانداری در طرف چپ مربوط به مجموعه ها است.

گزاره 1–2–21: فرض کنیم L یک مشبّکه کامل باشد، مجموعه زیر را بدین صورت تعریف می کنیم:

$\tau = \{U \subseteq L \ |$ U از بالا بسته و برای هر مجموعه جهتدار S که $\sup S\in U$ دراین صورت $S\cap U \neq \varnothing\}$

این مجموعه تشکیل یک توپولوژی روی L می دهد که آن را توپولوژی اسکات [۴] می نامیم و رابطه روی S رابطه ترتیب جزئی $\leq$ است.

---

1. Directed complete poset
2. Directed complete semilattice
3. Complete lattice
4.Scott topological

اثبات: واضح است که $\varnothing$ و L متعلق به τ است. فرض کنیم $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ گردایه ای از عناصر τ باشد، که در آن J یک مجموعه ی اندیس دلخواه است، $\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \subseteq L$ و برای هر $x\in\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha$، وجود دارد $\alpha\in J$، که $x\in U_\alpha$. چون $x \le y$ بنابراین وجود دارد $\alpha\in J$، که $y\in U_\alpha$. داریم:

$$\sup S\in\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \quad\Rightarrow\quad \exists\ \alpha\in J\ ,\quad \sup S\in U_\alpha$$

$$\Rightarrow\quad \exists\ \alpha\in J\ ,\quad S\cap U_\alpha\neq\varnothing \quad\Rightarrow\quad S\cap \bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha\neq\varnothing$$

فرض کنیم $U,V\in\tau$؛ در این صورت $U\cap V\subseteq L$ و برای هر $x\in U\cap V$، آنگاه $x\in U$ و $x\in V$، و چون $x\le y$ ، بنابراین $y\in U$ و $y\in V$ و لذا $y\in U\cap V$، در نتیجه $U\cap V\in\tau$.

$$\sup S\in U\cap V \;\Rightarrow\; \sup S\in U\ ,\ \sup S\in V \;\Rightarrow\; S\cap U\neq\varnothing\ ,\ S\cap V\neq\varnothing$$
$$\Rightarrow\; x\in S\cap U\ ,\ y\in S\cap V \;\Rightarrow\; x,y\in S \;\Rightarrow \exists\ z\in S\ ;\ x,y\le z$$
$$\Rightarrow\; z\in S\ ,\ z\in U\ ,\ z\in V \;\Rightarrow\; S\cap(U\cap V)\neq\varnothing \;\Rightarrow\; U\cap V\in\tau \qquad \square$$

گزاره1–2–22: فرض کنیم L یک مشبّکه کامل باشد، مجموعه زیر را بدین صورت تعریف می کنیم:

$\tau = \{U\subseteq L \mid$ U از پایین بسته و برای هر مجموعه جهتدار S که $\inf S\in U$ در این صورت $S\cap U\neq\varnothing\}$

این مجموعه تشکیل یک توپولوژی روی L می دهد که آن را توپولوژی هم اسکات[1] می نامیم رابطه روی S رابطه ترتیب جزئی $\le_d$ یا همان $\ge$ است.

اثبات: این گزاره همزاد گزاره1–2–21 است و به طور مشابه اثبات می شود.$\square$

1.CoScott topological

فصل دوّم

فضاهای متریک تعمیم یافته

1-2) مقدمه

یکی از مهمّترین و معمولی ترین روش های ساخت یک توپولوژی روی یک مجموعه این است که توپولوژی را بر حسب متریکی روی آن مجموعه تعریف کنیم. مثلاً توپولوژی هایی که بدین طریق ارائه می شوند دارای اهمیت ویژه ی در آنالیز نوین هستند.

اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، X را در صورتی متری پذیر گوییم که متریکی مانند δ در X وجود داشته باشد که توپولوژی X را القا کند. یک فضای متری عبارت است از فضایی متری پذیر مانند X همراه با متریک مشخص δ که توپولوژی X را تولید می کند.

2-2) متریک نما و اصول جداسازی

تعریف 2-2-1: فرض کنیم X یک مجموعه (مجموعه ای از نقاط) و $\delta: X \times X \to \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$ تابع (یک تابع فاصله) باشند. تابع فاصله δ یک متریک نما[1] است اگر در اصول زیر صدق کند:

i) $\delta(x, x) = 0$ (خود فاصله ها صفر هستند)

ii) $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ (تقارن)

1. Pseudo-metric or Gauge

$$\delta(x, z) \le \delta(x, y) + \delta(y, z) \qquad \text{(iii}$$ (نامساوی مثلثی)

یک متریک اضافه بر اصول ذکر شده برای متریک نما در ویژگی جداسازی زیر نیز صدق می کند:

$$\delta(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y$$

برای یک فرامتریک[1] (فرامتریک نما) نامساوی مثلثی متریک نماکه به صورت زیر است، قویتر می شود:

$$\delta(x, z) \le \delta(x, y) \vee \delta(y, z)$$

که در آن $\vee$ نمایانگر ماکسیمم در $\mathbb{R}^+$ است.

بوضوح مشخص است که هر متریک یک متریک نما است، و هر فرامتریک (فرا متریک نما) یک متریک (متریک نما) می باشد.

مثال 2–2–2: فرض کنیم تابع تعریف شده $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x$، λ اندازه ی لبگ و C مجموعه کانتور باشد، در این صورت $\lambda(C) = 0$ و بنابراین $f|_C \overset{a.e}{=} 0$. سپس $\int_C |f| \, d\lambda = \int_C f \, d\lambda = 0$. اکنون $\delta: L_1(\lambda) \times L_1(\lambda) \to \mathbb{R}^+$ را با ضابطه $\delta(f, g) = \int_C | f - g | \, d\lambda$ تعریف می کنیم. در این صورت δ یک متریک نما است که با توجه به مطالب اخیر یک متریک نیست.

مثال 2–2–3: تابع $\delta: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ با ضابطه $\delta(x, y) = | x-y |$ یک متریک است ولی یک فرامتریک نیست، زیرا $d(0,1) \not\le d(0,\frac{1}{2}) \vee d(\frac{1}{2},1)$ و همین طور نشان می دهد که تابع δ یک متریک نما است ولی یک فرامتریک نیست.

هر فرامتریک یک متریک است و لذا هر فرامتریک یک متریک نما است.

مثال 2–2–4: فرض کنیم $X=\{x, y, z\}$. تابع $\delta: X \times X \to \mathbb{R}^+$ را با ضابطه زیر تعریف می کنیم، در این صورت δ یک متریک است، که یک فرامتریک و همچنین یک فرامتریک نما نیست.

1. Ultra-metric