بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه لرستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

عنوان

کاهش سه قطری بلوکی ماتریس های تقریباً نرمال و رتبه مختل شده

نگارش

ماهرخ محمدی اصل

استاد راهنما

دکتر مجتبی قاسمی

اساتید مشاور

دکتر علی بارانی

مهندس عبدالرضا مصلایی

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی

بهمن ماه ۱۳۹۳

همه امتیازات این پایان‌نامه به دانشگاه لرستان تعلق دارد. در صورت استفاده از تمام یا بخشی از مطالب در مجلات، کنفرانس‌ها یا سخنرانی‌ها، باید نام دانشگاه لرستان (یا استاد یا اساتید راهنمای پایان‌نامه) و نام دانشجو با ذکر ماخذ و ضمن کسب مجوز کتبی از دفتر تحصیلات تکمیلی دانشگاه ثبت شود. در غیر این‌صورت مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت.

چکیده

عنوان پایان‌نامه: کاهش سه قطری بلوکی ماتریس های تقریباً نرمال و رتبه مختل شده
استاد راهنما : دکتر مجتبی قاسمی **اساتید مشاور:** دکتر علی بارانی و مهندس عبدالرضا مصلایی
درجه تحصیلی : کارشناسی ارشد **رشته :** ریاضی کاربردی(جبر خطی عددی) **محل تحصیل :** دانشگاه لرستان **دانشکده :** علوم پایه **تعداد صفحات :** ۹۴ صفحه
کلید واژه‌ها: ماتریس نرمال، ماتریس تقریباً نرمال، الگوریتم لانزوس، کاهش سه قطری بلوکی، ساختار رتبه ماتریس
چکیده: در این پایان نامه، پس از پرداختن به مقدماتی از ماتریس‌های نرمال، ماتریس‌های تقریباً نرمال بیان می‌شود. و سپس الگوریتم لانزوس، که اساس کار را در این رساله تشکیل می‌دهد و برای کاهش ماتریس‌های تقریباً نرمال، به شکل سه قطری بلوکی است، بیان می‌شود. این پایان نامه شامل سه فصل بوده، و هدف نگارنده از آن، بیان یک روش برای کاهش ماتریس‌های تقریبا نرمال به شکل سه قطری بلوکی است و درپایان مطالبی در مورد مقادیر ویژه این ماتریس‌ها که بر یک نمودار جبری با درجه حداکثردو واقع شده است، بیان می‌شود.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد بزرگوار، جناب آقای دکترمجتبی قاسمی که با سعه صدر اینجانب را در انجام پایان نامه راهنمایی نمودند صمیمانه تشکر و قدر دانی کنم که قطعا بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقایان دکتر علی بارانی و مهندس عبدالرضا مصلایی که زحمت مشاوره این پایان نامه را تقبل فرمودند کمال امتنان را دارم.

تقدیم...

تقدیم به ساحت مقدس مولایم آقا امام زمان (عج) که عنایتشان بدرقه راهم بوده است.

تقدیم به مادرم آیت صبر و طلایه دار ایثار و ایمان به پاس زحماتی که در تمام سالهای تحصیلم متقبل شده است.

و تقدیم به پدرم که انس با قرآن عزیزترین میراث او به من است.

تقدیم به همسرم که با گذشت و فداکاری خود در دوران تحصیل همواره مشوق من بوده است.

و تقدیم به فرزندانم یکتا و محمد مهدی که سبب دلگرمی من هستند.

پیشگفتار

مهمترین ویژگیهای ماتریسهای نرمال در سال ۱۹۸۷ توسط ولکویسز[۱]،سا [۲]، جانسن[۳] وگراوان[۴] که شامل ۷۰ شرط است معرفی شد در یک دهه بعد حدود ۲۰ شرط دیگر توسط ایکرامف [۵] و السنر [۶] ارائه شد که به ترتیب به لیست های $GJSW$ وEI معروف هستند.

این پایان نامه به صورت زیر سازماندهی شده است:

در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی که شامل مفاهیم پایه ای در مورد ماتریسها و ماتریسهای نرمال و قضایای مربوطه مورد بررسی قرارگرفته است و همچنین شرایط معادل با نرمال بودن ماتریسها بیان و اثبات شده است. در فصل دوم الگوریتم لانزوس بیان شده و در فصل سوم کاهش سه قطری بلوکی ماتریسهای تقریباً نرمال، توسط الگوریتم لانزوس بیان و اثبات شده است.

مقاله اصلی مورد مطالعه و بررسی در این پایان‌نامه، مقاله زیر می‌باشد:

Roberto Bevilacqua ,Gianna M. Del Corso and Luca Gemignani

Block Tridiagonal Reduction of Perturbed Normal and Rank Structured Matrices

May 2, 2013

[۱] H.Wolkowicz

[۲] E.M.Sa

[۳] C.R.Jonson

[۴] R.Grone

[۵] Kh.D Ikraov

[۶] L.Elsner

در انتهای این پایان‌نامه، کتاب‌نامه و واژه‌نامه فارسی به انگلیسی مورد استفاده در این پایان‌نامه درج شده است.

فهرست مطالب

فهرست مطالب ث

لیست تصاویر چ

لیست جداول ح

۱ مفاهیم مقدماتی ۱

۱.۱ اصطلاحات ۱

۲.۱ تعاریف اولیه ۳

۳.۱ نکاتی در مورد رتبه ۵

۴.۱ معکوس مور–پنرس ۱۳

۵.۱ ماتریس های نرمال ۱۵

۶.۱ تحویل ماتریسهای نرمال ۲۲

۷.۱ شرایط هم ارزی ماتریس های نرمال ۲۷

۸.۱ اثبات خاصیت ها ۳۲

۲ الگوریتم لانزوس برای ماتریسهای متقارن ۴۰

۱.۲ روش آرنولدی ۴۱

۲.۲ الگوریتم آرنولدی بلوکی ۴۳

۱.۲.۲ الگوریتم لانزوس متقارن ۴۴

۳.۲ الگوریتم لانزوس متقارن پایه ۴۶

۴.۲ الگوریتم لانزوس بلوکی ۵۱

۳ ماتریس های تقریباً نرمال ۵۴

۱.۳ مقدمه ۵۴

۲.۳ سه قطری بلوکی شدن همزمان ۵۷

۱.۲.۳ ماتریس های تقریباً ۱-نرمال ۵۹

۲.۲.۳ ماتریس های تقریباً ۲-نرمال ۶۸

۳.۳ ماتریسهای تقریباً هرمیتی یا یکانی ۷۴

۴.۳ مقادیر ویژه روی یک خم جبری ۷۸

کتاب‌نامه ۸۶

***واژه نامه فارسی به انگلیسی* ۹۰**

لیست تصاویر

۱.۳ ماتریس سه قطری بلوکی حاصل از پروسه لانزوس بلوکی به کار گرفته شده برای ماتریس-بردار با بردارهای آغازین در فضای ستونی C ۷۴

۲.۳ ماتریس سه قطری بلوکی حاصل از پروسه لانزوس بلوکی بکار گرفته شده برای ماتریس-بردار با بردارهای آغازین در فضای ستونی S ۷۷

۳.۳ ماتریس سه قطری بلوکی حاصل از پروسه لانزوس بلوکی بکار گرفته شده برای ماتریس همراه . ۷۷

۴.۳ ماتریس سه قطری بلوکی حاصل از پروسه لانزوس بلوکی بکار گرفته شده برای تصحیح رتبه یک ماتریسهای نرمالی که مقادیر ویژه آنها بر یک سهمی واقع شده است. ۸۵

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل به معرفی نمادها و بیان تعاریف و مقدمات اولیه که در فصل‌های بعدی از آنها استفاده می شود، می‌پردازیم.

۱.۱ اصطلاحات

مطالب این بخش از مرجع [۲۵] انتخاب شده است.

$M_n(C)$: مجموعه همه ماتریس‌های $n\times n$ با درایه های مختلط.

N_n: مجموعه همه ماتریس‌های $n\times n$ نرمال.

با فرض اینکه $A=[a_{ij}]\in M_n(C)$.

A^T: ترانهاده از ماتریس A یعنی: $A^T=[a_{ji}]$.

$\bar{A}$: مزدوج ماتریس A یعنی: $\bar{A} = [\bar{a_{ij}}]$.

A^*: ترانهاده مزدوج از ماتریس A یعنی: $A^* = \bar{A}^T = [\bar{a_{ji}}]$.

$A^{-۱}$: معکوس ماتریس A.

trA: اثر ماتریس A یعنی: $trA = a_{۱۱} + a_{۲۲} + ... + a_{nn}$.

با فرض اینکه ماتریس A نامنفرد است، $(A^*)^{-۱} = (A^{-۱})^*$ و $(A^T)^{-۱} = (A^{-۱})^T$.

I_n, o_n: به ترتیب ماتریس‌های صفر و همانی $n{\times}n$ هستند.

$P_A(x)$: چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A که برابر است با $det(xI_n - A)$.

$\lambda{\in}C$: مقدار ویژه ماتریس A که ریشه چندجمله‌ای $|\lambda I_n - A|$ است.

$\sigma{\in}C$: مقدار تکین ماتریس A که در حالت حقیقی همان مقدار ویژه از ماتریس $(AA^T)^{۱/۲}$ و در حالت مختلط همان مقدار ویژه از ماتریس $(AA^*)^{۱/۲}$ می‌باشد.

$\lambda(A)$: طیف[۱] ماتریس A که مجموعه متشکل از مقادیر ویژه A است.

$\rho(A)$: شعاع طیفی[۲] از ماتریس A که ماکزیمم مجموعه متشکل از اندازه‌های مقادیر ویژه ماتریس A است.

$$\rho(A) = max|\lambda|, \lambda{\in}\sigma(A)$$

A^+ : معکوس مور-پنرس[۳] (شبه معکوس) معکوسی تعمیم یافته است که در چهار تساوی مور-پنرس

[۱]spectrum

[۲]spectral radius

[۳]Moor-penrose inverse

صدق می‌کند.

$< A, B >$: ضرب داخلی معمولی دو ماتریس A وB.

$[A, B]$: جابجاگر A و B که برابر $AB - BA$ است. اگر $B = A^*$ باشد آن را خود جابجاگر می‌نامند.

$\|A\|$: نرم مطلق[۴] ماتریس A که برابر با ماکزیمم مجموع ستونی اعضای آن ماتریس از نظر قدر مطلق است.

$\|A\|_۲$: نرم طیفی[۵] ماتریس A یا دو نرم که بزرگترین مقدار منفرد از ماتریس A است.

$\|A\|_F$: نرم فربنیوس[۶] ماتریس A که برابر با $\sqrt{(AA^*)}$ است.

۲.۱ تعاریف اولیه

مطالب این بخش از مرجع [۲۵] انتخاب شده است.

بافرض اینکه $A, B \in M_n(C)$ آنگاه:

ماتریس A متقارن است هرگاه $A^T = A$.

ماتریس A متقارن ـ کج است هرگاه $A^T = -A$.

ماتریس A هرمیتی است هرگاه $A^* = A$.

ماتریس A هرمیتی ـ کج است هرگاه $A^* = -A$.

ماتریس A یکانی است هرگاه $AA^* = I$.

[۴] absolute matrix norm

[۵] spectral matrix norm

[۶] Frobenius norm

ماتریس A متعامد[۷]است هرگاه $AA^T = I$.

ماتریس A خود توان[۸]است هرگاه $A^n = A$.

ماتریس A نرمال است هرگاه $AA^* = A^*A$.

ماتریس A نرمال مربع است هرگاه $A^۲$ نرمال باشد.

ماتریس A معین مثبت است هرگاه برای هر بردار ناصفر $x{\in}C^n$ داشته باشیم $x^*Ax > ۰$.

ماتریس A نیمه معین مثبت[۹] است هرگاه برای هر بردار ناصفر $x{\in}C^n$ داشته باشیم $x^*Ax \geqslant ۰$.

ماتریس A نامنفی است هرگاه برای $i, j = ۱, ۲, ۳, ..., n$ داشته باشیم $a_{ij}{\geq}۰$.

ماتریس A قطری است هرگاه $A = diag(a_{۱۱}, a_{۲۲}, ..., a_{nn})$ وبرای $j{\neq}i$ داشته باشیم $a_{ij} = ۰$.

ماتریس A بالا مثلثی است هرگاه برای $i > j$ داشته باشیم $a_{ij} = ۰$.

ماتریس A پایین مثلثی است هرگاه برای $i < j$ داشته باشیم $a_{ij} = ۰$.

ماتریس A سه قطری است هرگاه برای هر جفت i, j در صورتی که $|j - i|{\leq}۱$ داشته باشیم $A = tridiag(a_{i,i-۱}, a_{ii}, a_{i,i+۱})$.

ماتریس A قطری بلوکی است هرگاه $A = diag(A_{۱۱}, A_{۲۲}, ..., A_{nn})$ که هر کدام از درایه های روی قطر یک بلوک است.

دو ماتریس A وB دارای خاصیت جابجایی هستند هرگاه $AB = BA$.

ماتریس A یک ماتریس جایگشت است هرگاه ستونهای آن یک جایگشت از ماتریس همانی باشد.

ماتریس A را منفرد گویند هرگاه $detA = ۰$ و نامنفرد گویند هرگاه $detA{\neq}۰$ باشد.

---

[۷]orthogonal

[۸]idempotent

[۹]semidefinite

تعریف ۱.۲.۱. رتبه ماتریس: اگر A یک ماتریس $m\times n$ باشد رتبه سطری A را تعداد سطرهای مستقل خطی A، و رتبه ستونی A را تعداد ستونهای مستقل خطی A تعریف می‌کنیم. رتبه سطری و ستونی هر ماتریس با هم برابرند که آن را رتبه ماتریس گوییم و آن را با $rank(A)$ نمایش می‌دهیم.

۳.۱ نکاتی در مورد رتبه

مطالب این بخش از مرجع [۱] انتخاب شده است.

الف) اگر $A \in M_{m,n}(C)$ آنگاه رتبه A^* مساوی رتبه A^T مساوی رتبه $\bar{A}$ مساوی رتبه A است.

ب) اگر $A \in M_m(F)$ و $C \in M_n(F)$ نامنفرد باشند و $B \in M_{m,n}(F)$ سپس رتبه AB مساوی رتبه B مساوی رتبه BC مساوی رتبه ABC و این یعنی حاصلضرب ماتریس‌های نامنفرد، از چپ و راست در یک ماتریس رتبه را تغییر نمی‌دهد.

پ) $A, B \in M_{m,n}(F)$ سپس رتبه A مساوی رتبه B اگر و فقط اگر ماتریسهای نامنفرد $X \in M_m(F)$ و $Y \in M_n(F)$ وجود داشته باشند به طوری‌که $B = XAY$.

ت) اگر $A \in M_{m,n}(C)$ آنگاه رتبه A مساوی رتبه A^*A.

ث) اگر $A \in M_{m,n}(C)$ آنگاه برای $X \in M_{m,k}(F)$ و $Y \in M_{n,k}(F)$ که دارای ستون‌های مستقل خطی هستند k = رتبه A اگر و فقط اگر $A = XY^T$.

همچنین برای $B \in M_k(F)$ و برای بعضی از $X \in F^m$ و $Y \in F^n$ تساوی $A = XBY^T$ برقرار است و ۱ = رتبه A اگر و فقط اگر $A = XBY^T$.

برای مطالعه بیشتر به مرجع [۱] مراجعه کنید.

تعریف ۱.۳.۱. نرم برداری: اگر V یک فضای برداری روی میدان F باشد تابع $\|.\|$ که به صورت $\|.\| : V \longrightarrow R$ تعریف می‌شود را یک نرم روی V گوییم هرگاه دارای شرایط زیر باشد:

یک. $\|x\| > 0 \qquad \forall x \in V$

دو. $\|x\| = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0$

سه. $\|cx\| = |c|\|x\| \qquad , c \in F \qquad \forall x \in V$

چهار. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in V$

تعریف ۲.۳.۱. ترکیب خطی: بردار β از V یک ترکیب خطی بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ از V نامیده می‌شود هرگاه اسکالرهای $c_1, c_2, ..., c_n$ در F وجود داشته باشد، به طوری‌که:

$$\beta = c_1\alpha + ... + c_n\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i$$

تعریف ۳.۳.۱. ماتریس A راقطری شدنی گوییم، هرگاه A با یک ماتریس قطری متشابه باشد یعنی:

$$S^{-1}AS = \Lambda$$

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید A و B دو ماتریس قطری شدنی باشند، گوییم A و B بطور همزمان قطری

شدنی اند اگر و فقط اگر یک ماتریس غیر تکین S موجود باشد به طوری‌که:

$$S^{-1}AS = \Lambda_1 \qquad \text{و} \qquad S^{-1}AS = \Lambda_2$$

لم ۱.۳.۱. فرض کنیم $A, B \in M_n$ بطور همزمان قطری شدنی باشند در این صورت A و B جابه جایی اند.

اثبات. چون A و B بطور همزمان قطری شدنی‌اند پس داریم:

$$\exists\, S \qquad S^{-1}AS = \Lambda_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1^A & & & 0 \\ & \lambda_2^A & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & {\lambda_n}^A \end{bmatrix}$$

و همچنین برای B داریم:

$$S^{-1}BS = \Lambda_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^B & & & 0 \\ & \lambda_2^B & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^B \end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$A = S\Lambda_1 S^{-1} \qquad \text{و} \qquad B = S\Lambda_2 S^{-1}$$

$$AB = S\Lambda_1 S^{-1} S\Lambda_2 S^{-1} = S\Lambda_1\Lambda_2 S^{-1} = S\begin{bmatrix} \lambda_1^A\lambda_1^B & & & 0 \\ & \lambda_2^A\lambda_2^B & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & {\lambda_n}^A{\lambda_n}^B \end{bmatrix} S^{-1}$$

$$= S\begin{bmatrix} \lambda_1^B\lambda_1^A & & & 0 \\ & \lambda_2^B\lambda_2^A & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & {\lambda_n}^B{\lambda_n}^A \end{bmatrix} S^{-1}$$

$$= S\Lambda_2\Lambda_1 S^{-1} = S\Lambda_2 S^{-1} S\Lambda_1 S^{-1} = BA$$

تعریف ۵.۳.۱. تشابه یکانی: ماتریس A با ماتریس B متشابه یکانی است اگر و فقط اگر یک ماتریس U یکانی موجود باشد، به طوری‌که:

$$B = U^*AU$$

در حقیقت $A \longrightarrow U^*AU$ یک تبدیل خطی از M_n به M_n است.

قضیه ۱.۳.۱. (قضیه شور) [۱۰] فرض کنید $A \in M_n$ و $\lambda_1, ..., \lambda_n$ مقادیر ویژه A باشند آنگاه ماتریس یکانی $U \in M_n$ موجود است به طوری‌که

$$U^*AU = T = (t_{ij})_{n\times n}$$

که در آن T یک ماتریس بالا مثلثی با قطر اصلی متشکل از مقادیر ویژه A است. یعنی $t_{ii} = \lambda_i$، $1\leq i\leq n$ اگر $A \in M_n(R)$ و همه مقادیر ویژه آن حقیقی باشند آنگاه U می‌تواند متعامد حقیقی انتخاب شود.

اثبات. برای اثبات به مرجع [۱] رجوع کنید.

قضیه ۲.۳.۱. قضیه کیلی همیلتون[۱۱] فرض کنید $p_A(t)$ چند جمله‌ای مشخصه $A \in M_n$ باشد در این صورت $p_A(A) = 0$. برای اثبات به مرجع [۱] رجوع کنید.

لم ۲.۳.۱. فرض کنید $A \in M_n$ و $B \in M_n$ و اگر $X \in M_{n,m}$ آنگاه برای هر چند جمله ای $g(t)$ معادله ماتریسی $g(A)X - Xg(B) = 0$ برقرار است. برای اثبات به مرجع [۱] رجوع کنید.

قضیه ۳.۳.۱. قضیه سیلوستر[۱۲] الف) فرض کنید $A \in M_n$ و$B \in M_m$ آنگاه برای هر $C\in M_{m,n}$ معادله ماتریسی $AX - XB = C$ یک جواب منحصر بفرد $X \in M_{n,m}$ دارد اگر و فقط اگر A و B مقدار ویژه مشترک نداشته باشند. یعنی اگر $\sigma(A)\cap\sigma(B) = \varnothing$ معادله ماتریسی $AX - XB = C$ تنها دارای جواب بدیهی $X = 0$ است.

---

[۱۰] shur

[۱۱] Cayley Hamilton

[۱۲] Sylvester

ب) اگر A و B حقیقی باشند آنگاه معادله ماتریسی $AX - XB = C$ برای هر $C \in M_{m,n}(R)$ دارای یک جواب منحصر به فرد $X \in M_{m,n}(R)$ می‌باشد. برای اثبات به مرجع [۱] رجوع کنید.

اثبات. الف) تبدیل خطی $T(X) = AX - XB$ از $T : M_{n,m} \longrightarrow M_{n,m}$ را در نظر بگیرید معادله $T(X) = C$ برای هر $C \in M_{m,n}$ دارای جواب منحصر بفرد X می‌باشد برای این منظور کافی است نشان دهیم $T(X) = 0$ فقط دارای جواب $X = 0$ است. اگر $AX - XB = 0$ طبق لم قبلی $p_B(A)X - Xp_B(B) = 0$ و طبق قضیه کیلی همیلتون $P_B(B) = 0$ و بنابراین $p_B(A)X = 0$. فرض کنید $\lambda_1, ..., \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس B باشند بنابراین

$$p_B(t) = (t - \lambda_1)...(t - \lambda_n)$$

$$p_B(A) = (A - \lambda_1 I)....(A - \lambda_n I)$$

اگر $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \varnothing$ پس هر عامل $(A - \lambda_i I)$ نامنفرد است و بنابراین $p_B(A)$ نامنفرد است و تنها جواب $p_B(A)X = 0$، $X = 0$ است. واضح است که اگر $p_B(A)X = 0$ دارای جواب غیر بدیهی باشد دراین صورت $p_B(A)$ باید منفرد باشد بنابراین تعدادی از عاملهای $(A - \lambda_i I)$ منفرد هستند و تعدادی از λ_j ها مقادیر ویژه A هستند بنابراین $\sigma(A) \cap \sigma(B) \neq \varnothing$. □

تعریف ۶.۳.۱. زیر فضای کریلف[۱۳]:دستگاه $Ax = b$ را در نظر می گیریم

زیر فضای $k_i(A, b) = span\{b, Ab, A^2b, ..., A^ib\}$ را زیر فضای کریلف i ام A و b گوییم.

[۱۳] Krylov