بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلّم آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه فیزیک

پایان نامه مقطع کارشناسی ارشد
رشته فیزیک گرایش نظری- بنیادی

ساختارهای مختلط و همتافته بررروی دوجبرهای لی حقیقی چهار بعدی

استاد راهنما:
دکتر عادل رضایی اقدم

استاد مشاور:
دکتر علیرضا راستکار

پژوهشگر:
مهدی سفید

تیر/ ۱۳۸۸
تبریز / ایران

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

آنان که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر،

توانشان رفت تا به توانایی برسم و مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند،

آنان که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان سرمایه های جاودانی زندگی من است.

در برابر وجود گرامیشان زانوی ادب بر زمین می زنم و با دلی مملو از عشق، محبت و خضوع بر دستشان بوسه می زنم.

تشکر و قدردانی

خداوند متعال را سپاسگذارم که توفیق کسب علم و دانش را به من ارزانی داشت.

برخود لازم می دانم ازکلیه اساتیدی که افتخار شاگردی آنها را داشته ام به ویژه جناب آقای دکتر عادل رضایی اقدم، استاد راهنما و جناب آقای دکتر علیرضا راستکار، استاد مشاور و تمامی عزیزانی که مرا در انجام و ارائه ی این پایاننامه یاری داده اند تشکر نموده و از خداوند منان برایشان سلامتی و موفقیت مسئلت دارم.

مهدی سفید

تیر ماه یکهزار و سیصد و هشتاد و هشت

تبریز/ ایران

فهرست مطالب

فصل سوم: ساختارهای مختلط، همتافته و کهلری مربوط به جبرهای دوگان دوجبرهای لی حقیقی چهار بعدی

چکیده

در این پایاننامه ابتدا به بیان طبقه بندی جبرهای لی حقیقی چهار بعدی، نمایش الحاقی و گروه های خودریختی مربوطه می پردازیم. سپس با استفاده از آنها ساختارهای مختلط، همتافته و کهلری را بر روی جبرهای لی حقیقی چهار بعدی محاسبه می کنیم و پس از بیان برخی دوجبرهای لی حقیقی چهار بعدی، ساختارهای ذکر شده را برروی این دوجبرها محاسبه می نمائیم. در پایان به دلیل اهمیت مدل های ابرتقارن $N=(2,2)$ WZW به بیان انطباق این مدل ها با ساختارهای منین پرداخته و یک مثال فیزیکی بیان می کنیم.

واژه های کلیدی: دوجبرلی، ساختار مختلط، ساختار همتافته، ساختار کهلری.

مقدمه

از آنجایی که ساختارهای مختلط، همتافته و کهلری ابزار بسیار مهمی در توصیف و بیان هندسه ی بسیاری از پدیده ها هستند، توجه بسیاری از نویسندگان علاقمند در زمینه های مختلف ریاضی و فیزیک به سوی مطالعه ی این ساختارها و نیز خمینه های مختلط، همتافته و کهلری جلب شده است. از نقطه نظر ریاضی اگر خمینه ی ما همگن باشد لیست مقالات مربوطه با مسائل مختلط و همتافته بسیار زیاد است. مثلاً شرایط فرم های همتافته روی فضای همگن (فضاهای همگن همتافته) در اوایل دهه ی ۱۹۷۰ توسط چُو[1] پیدا شده است [۱]. همچنین خمینه های مختلط همگن در مراحل مختلفی توسط اُولجکلاوس[2] و وین کلمن[3] طبقه بندی شده اند [۲] و [۳]. از نقطه نظرگروه های لی، مسائلی از ساختارهای مختلط چپ ناورداروی خمینه های فشرده به وسیله ساملسون[4] [٤] و روی خمینه های غیرفشرده به وسیله ی موریموتو[5] طبقه بندی شده اند [٥]. طبقه بندی جزئی تری نیز از ساختارهای مختلط چپ ناوردا وقتی گروه لی $GL(2,R)$، $U(2)$ و $SL(3,R)$ باشد بوسیله ساساکی[6] [٦] و [۷] و وقتی گروه لی G گروه مربوط به جبرلی حل پذیر همبند ساده چهار بعدی باشد بوسیله ی اسنو[7] و اواندو[8] [۸] و [۹] انجام گرفته است. از نقطه نظر فیزیکی اهمیت ساختارهای مختلط اولین بار در مطالعه ی مدل های سیگمای ابرتقارن $N=(2,2)$ ظاهر شده است [۱۰]. به این ترتیب که وجود این ساختارهای ابرتقارن معادل با وجود دو ساختار مختلط هرمیتی یا ساختار دوهرمیتی روی خمینه ی هدف می باشد، بطوریکه یک سری قیود بایستی روی ساختار مختلط این خمینه اعمال گردد. علاوه برآن تناظر بین مدل های WZW ابرتقارن $N=(2,2)$ با ساختارهای منین قبلاً اثبات شده است [۱۱]،

[1] Chu
[2] Oeljeklaus
[3] Winkelman
[4] Samelson
[5] Morimoto
[6] Sasaki
[7] Snow
[8] Ovando

[۱۲] و [۱۳]. از طرفی مطالعه ی مدل های ابرتقارن $N=(2,2)$ WZW در نظریه ی ابر ریسمان بسیار حائز اهمیت می باشد. لذا بررسی اینکه ساختارهای مختلط چگونه تحت تبدیلات دوگانگی- T فضای هدف تبدیل می یابند مهم می باشد. این کار قبلاً در مورد تبدیلات آبلی و غیرآبلی انجام شده است [۱٤] و [۱۵]. اما در مورد دوگانگی پواسون-لی مطالعات دقیقی انجام نشده است [۳۱]. در این راستا ما سعی خواهیم کرد که ساختارهای مختلط را روی دوجبرهای لی بدست آوریم. برای این کار ما ابتدا روش جدیدی را برای محاسبه ی ساختارهای مختلط روی جبرهای لی ارائه خواهیم کرد. بویژه این ساختارها را برای جبرهای لی حقیقی چهار بعدی با این روش جدید محاسبه خواهیم کرد. لازم بذکر است که این ساختارها قبلاً با روش نسبتاً پیچیده ای آن هم فقط برروی جبرهای لی حقیقی چهار بعدی حل پذیر انجام شده اند [۱۷]. در ادامه سعی خواهیم کرد که این ساختارها را با استفاده از این روش جدید برروی جبرهای دوگان مربوط به دوجبرهای لی حقیقی چهار بعدی بدست آوریم و در واقع این کار مقدمه ای براین خواهد بود که چطور از دید جبری تغییرات ساختارهای مختلط تحت تبدیلات دوگانگی پواسون-لی انجام می شود. علاوه برآن ما در این پایاننامه با ارائه ی روش جدیدی ساختارهای همتافته و کهلری مربوط به جبرهای لی حقیقی چهار بعدی و جبرهای دوگان مربوط به دوجبرهای لی حقیقی چهار بعدی را محاسبه خواهیم کرد.

فصل بندی پایاننامه بشرح زیر است:

درفصل اول پس از معرفی جبرهای لی حقیقی تجزیه پذیر و تجزیه ناپذیر به بیان طبقه بندی جبرهای لی حقیقی چهار بعدی به روش پترا [۱۸] می پردازیم. سپس برای آسانتر کردن محاسبات، به معرفی محاسبات ماتریسی نمایش الحاقی می پردازیم. درپایان فصل برای بررسی روابط هم ارزی موجود در فصل های ۲و۳ به محاسبه ی گروه های خودریختی جبرهای لی حقیقی چهار بعدی می پردازیم، که نتایج این محاسبات را نیز به طور کامل بیان کرده ایم.

در فصل دوم ابتدا به تعاریف لازم برای خمینه های مختلط می پردازیم. سپس ساختار مختلط را بیان کرده و پس از فرمولبندی این ساختار در پایه های مختصاتی خمینه، روابط را برای پایه های غیر مختصاتی در یک خمینه و نیز گروه لی بدست می آوریم؛ درنهایت روابط جبری حاکم بر این ساختارها را پیدا می کنیم. آنگاه با استفاده از آن ساختارهای مختلط جبرهای لی حقیقی چهار بعدی را محاسبه می کنیم. در بخش دوم به تعریف خمینه ی همتافته و ساختار همتافته پرداخته، با ذکر یک مثال روش محاسبه ی ساختار همتافته را توضیح داده و ساختار همتافته برروی جبرهای لی حقیقی چهار بعدی را محاسبه می کنیم. در پایان پس ازتعریف خمینه های هرمیتی، کهلری و ساختار کهلری این ساختار را نیز برروی جبرهای لی حقیقی چهار بعدی محاسبه می کنیم. قابل ذکراست چنانکه

گفته شد محاسبه ی ساختارهای مختلط، همتافته وکهلری برروی جبرهای لی حقیقی چهار بعدی حل پذیر قبلاً توسط اواندو [۱۷] انجام گرفته است، اما این محاسبه علاوه بر اینکه فقط برروی جبرهای حل پذیر انجام گرفته است دارای روش بسیار پیچیده و مشکلی می باشد که ما با انجام محاسبات تانسوری بسیار آسانتر این محاسبه را برروی همه ی جبرهای لی حقیقی چهار بعدی انجام داده ایم و به نتایج کاملتری نیز دست یافته ایم.

در فصل سوم ابتدا تعاریف و قضایای مربوط به دوجبرهای لی را مرور کرده سپس به معرفی تعدادی از دوجبرهای لی حقیقی چهار بعدی می پردازیم. پس ازآن با استفاده از نمایش الحاقی گروه و خودریختی های مربوطه ساختارهای مختلط، همتافته و کهلری مربوط به جبرهای دوگان دوجبرهای لی حقیقی چهار بعدی را محاسبه می کنیم. در انتها پس از مروری بر تناظر بین مدل های سیگمای ابرتقارن $N=(2,2)$ WZW با ساختارهای منین به بررسی یک مثال فیزیکی می پردازیم.

فصل اول:

معرفی جبرهای لی حقیقی چهار بعدی و نمایش الحاقی آنها

مقدمه

دراین فصل ابتدا به معرفی جبرهای لی حقیقی چهار بعدی تجزیه پذیر و تجزیه ناپذیر پرداخته و روابط جابجایی این جبرها را به روش پترا[1] [۱۸] در کنار جبرهای بایانکی بیان کرده ایم، سپس برای سادگی محاسبات تانسوری و تبدیل این محاسبات به محاسبات ماتریسی در فصل های بعد، نمایش الحاقی را معرفی کرده و نمایش الحاقی مربوط به جبرهای لی حقیقی چهار بعدی را بدست می آوریم. در پایان ماتریس های خودریختی مربوط به این جبرها را با ذکر روش محاسبه بیان می کنیم [۲۹].

۱-۱: معرفی طبقه بندی جبرهای لی حقیقی چهار بعدی

۱-۱-۱: جبرهای لی حقیقی چهار بعدی تجزیه پذیر[2]

این جبرها به صورت $A_2 \oplus A_2$ و یا $A_{3,i} \oplus R$ می‌باشند که $A_{3,i}$ یکی از جبرهای I تا IX بایانکی[3] است و A_2 جبر لی دو بعدی غیر بدیهی[4] است و از رابطه زیر تبعیت می‌کند:

$$[X_1, X_2] = X_2 \qquad (۱-۱)$$

همچنین روابط جابجایی جبرهای لی I تا IX بایانکی به صورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = -aX_2 + n_3 X_3 \\ [X_2, X_3] = n_1 X_1 \\ [X_3, X_1] = n_2 X_2 + aX_3 \\ [X_i, X_4] = 0 \qquad ; i = 1,2,3 \end{cases} \qquad (۲-۱)$$

که ثابت های ساختار n_3, n_2, n_1, a در جدول زیر بیان شده اند.

---
[1] Patera
[2] reducible
[3] Bianchi
[4] non trivial

جدول (۱-۱): ثابت های ساختار جبرهای لی بایانکی

Type	a	n_1	n_2	n_3
I	0	0	0	0
II	0	1	0	0
VII_0	0	1	1	0
VI_0	0	1	-1	0
IX	0	1	1	1
$VIII$	0	1	1	-1
V	1	0	0	0
IV	1	0	0	1
VII_a	a	0	1	1
$III \quad (a=1)$, $VI_a \quad (a\neq 1)$	a	0	1	-1

۱-۱-۲: جبرهای لی حقیقی چهار بعدی تجزیه ناپذیر[1]

با استفاده از جدول پترا [۱۸] این جبرها را می‌توان به صورت زیر دسته‌بندی نمود (در این جدول e همان پایه جبر یعنی X می با شد) [۲۹].

جدول (۱-۲): روابط جابجایی جبرهای لی حقیقی چهار بعدی پترا

Name	Commutator relations	a_i
$A_{4,1}$	$[e_2,e_4]=e_1, \quad [e_3,e_4]=e_2$	0
$A_{4,2}^{p}$	$[e_1,e_4]=pe_1, \quad [e_2,e_4]=e_2,$ $[e_3,e_4]=e_2+e_3 \quad (p\neq 0)$	$\frac{1}{3}(p+2)\delta^4{}_i$
$A_{4,3}$	$[e_1,e_4]=e_1, \quad [e_3,e_4]=e_2$	$\frac{1}{3}\delta^4{}_i$
$A_{4,4}$	$[e_1,e_4]=e_1, \quad [e_2,e_4]=e_1+e_2,$ $[e_3,e_4]=e_2+e_3$	$\delta^4{}_i$
$A_{4,5}^{pq}$	$[e_1,e_4]=e_1, \quad [e_2,e_4]=pe_2, \quad [e_3,e_4]=qe_3$ $(pq\neq 0, \quad -1\leq q\leq p\leq 1)$	$\frac{1}{3}(1+p+q)\delta^4{}_i$
$A_{4,6}^{pq}$	$[e_1,e_4]=pe_1, \quad [e_2,e_4]=qe_2-e_3,$ $[e_3,e_4]=e_2+qe_3 \quad (p\neq 0, \quad q\geq 0)$	$\frac{1}{3}(p+2q)\delta^4{}_i$
$A_{4,7}$	$[e_2,e_3]=e_1, \quad [e_1,e_4]=2e_1, \quad [e_2,e_4]=e_2,$ $[e_3,e_4]=e_2+e_3$	$\frac{4}{3}\delta^4{}_i$
$A_{4,8}$	$[e_2,e_3]=e_1, \quad [e_2,e_4]=e_2, \quad [e_3,e_4]=-e_3$	0
$A_{4,9}^{q}$	$[e_2,e_3]=e_1, \quad [e_1,e_4]=(1+q)e_1, \quad [e_2,e_4]=e_2,$ $[e_3,e_4]=qe_3 \quad (-1<q\leq 1)$	$\frac{2}{3}(1+q)\delta^4{}_i$
$A_{4,10}$	$[e_2,e_3]=e_1, \quad [e_2,e_4]=-e_3, \quad [e_3,e_4]=e_2$	0
$A_{4,11}^{q}$	$[e_2,e_3]=e_1, \quad [e_1,e_4]=2qe_1, \quad [e_2,e_4]=qe_2-e_3,$ $[e_3,e_4]=e_2+qe_3, \quad (q>0)$	$\frac{4}{3}q\delta^4{}_i$
$A_{4,12}$	$[e_1,e_4]=e_1, \quad [e_2,e_4]=e_2,$ $[e_1,e_3]=-e_2, \quad [e_2,e_3]=-e_1$	$\frac{2}{3}\delta^4{}_i$

[1] irreducible

که در حد بعضی از پارامترها، جبرها به هم تبدیل می‌شوند یعنی:

$$\lim_{p\to 0} \; A_{4,2}^{p} \to IV \oplus R \qquad \lim_{p\to 0} \; A_{4,5}^{p\,q} \to VI_a \oplus R$$
$$\lim_{p\to 0} \; A_{4,6}^{p\,q} \to VII_a \oplus R \qquad \lim_{q\to -1} A_{4,9}^{q} \to A_{4.8} \tag{۳-۱}$$
$$\lim_{q\to 0} \; A_{4,11}^{q} \to A_{4.10}$$

۱-۱-۳: طبقه بندی جبرهای لی حقیقی چهار بعدی به روش پترا

در این بخش به بررسی طبقه‌بندی جبرهای لی حقیقی چهار بعدی به روش پترا [۱۸] در کنار جبرهای بایانکی+R می‌پردازیم. از آنجا که در فیزیک بیشتر از این نوع طبقه‌بندی استفاده می‌شود، ما نیز در محاسبات خود از روابط جابجایی این طبقه‌بندی استفاده نموده‌ایم. در این طبقه‌بندی ۱۲ جبر تجزیه ناپذیر $A_{4,i}$، ۹ جبر $A_{3,i} \oplus R$، یک جبر $A_2 \oplus A_2$ و یک جبر بدیهی ($4A_1$ یا $4R$) داریم. با در نظر گرفتن حالات خاص تعداد کل این جبرها ۳۰ می‌باشد. درکار پترا $A_{3,i}$ جبرهای سه بعدی با جبرهای بایانکی فرق دارند، ولی در محاسبات این پایان‌نامه $A_{3,i}$ها را به صورت جبرهای لی بایانکی سه بعدی انتخاب کرده‌ایم که در زیر در کنار روابط جابجایی پترا دیده می‌شوند.

جدول(۱-۳): طبقه بندی جبرهای لی حقیقی چهار بعدی درکنارجبرهای بایانکی+ R

روابط جابجایی غیر صفر	جبرها
	$4A_1$
$[X_1,X_2]=X_2$	$A_2 \oplus 2A_1$
$[X_1,X_2]=-X_2-X_3,[X_3,X_1]=X_2+X_3$	$\mathrm{III} \oplus R$
$[X_1,X_2]=X_2,[X_3,X_4]=X_4$	$2A_2$
$[X_2,X_3]=X_1$	$A_{3,1} \oplus A_1$
$[X_2,X_3]=X_1$	$\mathrm{II} \oplus R$
$[X_1,X_3]=X_1,[X_2,X_3]=X_1+X_2$	$A_{3,2} \oplus A_1$
$[X_1,X_2]=-X_2+X_3,[X_1,X_3]=-X_3$	$\mathrm{IV} \oplus R$
$[X_1,X_3]=X_1,[X_2,X_3]=X_2$	$A_{3,3} \oplus A_1$
$[X_1,X_2]=-X_2,[X_1,X_3]=-X_3$	$\mathrm{V} \oplus R$
$[X_1,X_3]=X_1,[X_2,X_3]=-X_2$	$A_{3,4} \oplus A_1$

$\mathrm{VI}_0 \oplus R$	$[X_1, X_3] = X_2, [X_2, X_3] = X_1$
$A^a_{3,5} \oplus A_1$ $0 < \lvert a \rvert < 1$	$[X_1,X_3]=X_1,[X_2,X_3]=aX_2$
$\mathrm{VI}_\mathrm{a} \oplus R$ $a \neq 0,1$	$[X_1, X_2] = -aX_2 - X_3, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3$
$A_{3,6} \oplus A_1$	$[X_1,X_3]=-X_2,[X_2,X_3]=X_1$
$\mathrm{VII}_0 \oplus R$	$[X_2, X_3] = X_1, [X_1, X_3] = -X_2$
$A^a_{3,7} \oplus A_1$ $a > 0$	$[X_1,X_3]=aX_1 - X_2,[X_2,X_3]=X_1+aX_2$
$\mathrm{VII}_\mathrm{a} \oplus R$ $a \neq 0$	$[X_3, X_1] = X_2 + aX_3, [X_1, X_2] = -aX_2 + X_3$
$A_{3,8} \oplus A_1$	$[X_3,X_1]=2X_2,[X_2,X_3]= X_3,[X_1,X_2]=X_1$
$\mathrm{VIII} \oplus R$	$[X_3, X_1] = X_2, [X_1, X_2] = -X_3, [X_2, X_3] = X_1$
$A_{3,9} \oplus A_1$	$[X_3,X_1]=X_2,[X_2,X_3]= X_1,[X_1,X_2]=X_3$
$IX \oplus R$	$[X_3, X_1] = X_2, [X_1, X_2] = X_3, [X_2, X_3] = X_1$
$A_{4,1}$	$[X_2,X_4]=X_1,[X_3,X_4]=X_2$
$A^a_{4,2}$ $a \neq 0,1$	$[X_1,X_4]=aX_1,[X_2,X_4]= X_2,[X_3,X_4]=X_2+X_3$
$A^1_{4,2}$	$[X_1,X_4]=X_1,[X_2,X_4]= X_2,[X_3,X_4]=X_2+X_3$
$A_{4,3}$	$[X_1,X_4]= X_1,[X_3,X_4]=X_2$
$A_{4,4}$	$[X_1,X_4]=X_1,[X_2,X_4]= X_1+ X_2,[X_3,X_4]=X_2+X_3$
$A^{a,b}_{4,5}$ $-1 \leq a < b < 1$ $ab \neq 0$	$[X_1,X_4]=X_1,[X_2,X_4]= a\,X_2,[X_3,X_4]=b\,X_3$

$A_{4,5}^{a,a}$ $-1 \le a < 1$ $a \ne 0$	$[X_1,X_4]=X_1$,$[X_2,X_4]= a X_2$, $[X_3,X_4]=a X_3$
$A_{4,5}^{a,1}$ $-1 \le a < 1$ $a \ne 0$	$[X_1,X_4]=X_1$,$[X_2,X_4]= a X_2$,$[X_3,X_4]= X_3$
$A_{4,5}^{1,1}$	$[X_1,X_4]=X_1$,$[X_2,X_4]=X_2$,$[X_3,X_4]= X_3$
$A_{4,6}^{a,b}$ $a \ne 0, b \ge 0$	$[X_1,X_4]= aX_1$,$[X_2,X_4]=bX_2 - X_3$,$[X_3,X_4]=X_2+b X_3$
$A_{4,7}$	$[X_1,X_4]=2 X_1$,$[X_2,X_4]= X_2$, $[X_3,X_4]=X_2+X_3$,$[X_2,X_3]=X_1$
$A_{4,8}$	$[X_2,X_4]= X_2$, $[X_3,X_4]=- X_3$,$[X_2,X_3]=X_1$
$A_{4,9}^{b}$ $0 < \lvert b \rvert < 1$	$[X_1,X_4]=(1+b) X_1$,$[X_2,X_4]= X_2$, $[X_3,X_4]=b X_3$,$[X_2,X_3]=X_1$
$A_{4,9}^{1}$	$[X_1,X_4]=2 X_1$,$[X_2,X_4]= X_2$, $[X_3,X_4]= X_3$,$[X_2,X_3]=X_1$
$A_{4,9}^{0}$	$[X_1,X_4]=X_1$,$[X_2,X_4]= X_2$,$[X_2,X_3]=X_1$
$A_{4,10}$	$[X_2,X_4]= -X_3$, $[X_3,X_4]= X_2$,$[X_2,X_3]=X_1$
$A_{4,11}^{a}$ $a > 0$	$[X_1,X_4]=2a X_1$,$[X_2,X_4]= a X_2 - X_3$,$[X_3,X_4]=X_2+a X_3$,$[X_2,X_3]=X_1$
$A_{4,12}$	$[X_1,X_4]=- X_2$,$[X_1,X_3]= X_1$, $[X_2,X_4]=X_1$,$[X_2,X_3]=X_2$

۱-۲: نمایش الحاقی جبرهای لی حقیقی چهار بعدی

ما سعی کرده ایم برای سادگی، محاسبات تانسوری را به محاسبات ماتریسی تبدیل کنیم. لذا در این کار بایستی از نمایش الحاقی استفاده نمائیم. در اینجا تنها به روش بدست آوردن نمایش الحاقی بسنده خواهیم کرد و در فصلهای آینده به تبدیل روابط مورد نیاز به صورت این نمایش اقدام می‌کنیم.

حال اگر روابط جابجایی جبری را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$[X_i, X_j] = f_{ij}^{\ k}\ X_k \qquad (۱-٤)$$

ماتریس های Y_i, χ_i با استفاده از ثا بت های ساختار به شکل زیر می باشند:

$$(\chi_i)_j{}^k = -f_{ij}{}^k \qquad (۵-۱)$$
$$(Y^k)_{ij} = -f_{ij}{}^k$$

که می‌توان این نمایش ها را در چهار بعد به صورت کلی زیر نوشت:

(لازم به ذکر است $fijk = f_{jk}{}^i$)

$$Y_1 := \begin{bmatrix} 0 & -f112 & -f113 & -f114 \\ f112 & 0 & -f123 & -f124 \\ f113 & f123 & 0 & -f134 \\ f114 & f124 & f134 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_2 := \begin{bmatrix} 0 & -f212 & -f213 & -f214 \\ f212 & 0 & -f223 & -f224 \\ f213 & f223 & 0 & -f234 \\ f214 & f224 & f234 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_3 := \begin{bmatrix} 0 & -f312 & -f313 & -f314 \\ f312 & 0 & -f323 & -f324 \\ f313 & f323 & 0 & -f334 \\ f314 & f324 & f334 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_4 := \begin{bmatrix} 0 & -f412 & -f413 & -f414 \\ f412 & 0 & -f423 & -f424 \\ f413 & f423 & 0 & -f434 \\ f414 & f424 & f434 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\chi_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f112 & -f212 & -f312 & -f412 \\ -f113 & -f213 & -f313 & -f413 \\ -f114 & -f214 & -f314 & -f414 \end{bmatrix} \quad \chi_2 := \begin{bmatrix} f112 & f212 & f312 & f412 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f123 & -f223 & -f323 & -f423 \\ -f124 & -f224 & -f324 & -f424 \end{bmatrix}$$

$$\chi_3 := \begin{bmatrix} f113 & f213 & f313 & f413 \\ f123 & f223 & f323 & f423 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f134 & -f234 & -f334 & -f434 \end{bmatrix} \quad \chi_4 := \begin{bmatrix} f114 & f214 & f314 & f414 \\ f124 & f224 & f324 & f424 \\ f134 & f234 & f334 & f434 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با استفاده از روابط فوق می‌توان برای جبرهای ذکر شده در بخش ۱-۱ ماتریس های Y,χ را به صورت زیر بدست آورد:

$\mathrm{III} \oplus R:$

$$Y_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_3 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\chi_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_2 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_3 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A_2 \oplus A_2:$

$$Y_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_2 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\chi_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \chi_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{II} \oplus R:$

$$Y_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\chi_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{IV} \oplus R:$

$$Y_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_3 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\chi_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_2 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{V} \oplus R:$

$$Y_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\chi_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_2 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{VI}_0 \oplus R:$

$$Y_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\chi_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_3 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{VI}_a \oplus R:$

$$Y_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_2 := \begin{bmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_3 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & a & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\chi_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_2 := \begin{bmatrix} 0 & -a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_3 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{VII}_0 \oplus R:$

$$Y_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\chi_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_3 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{VII}_a \oplus R:$

$$Y_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_2 := \begin{bmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_3 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\chi_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_2 := \begin{bmatrix} 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_3 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
