بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر - بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت

درجه کارشناسی ارشد ریاضی

تبدیلات ضربی روی فضاهای برگمن انعکاسی هستند

استاد راهنما: دکتر حسین محبی

مؤلف : محمد رضا سید جعفری

اردیبهشت ۷۳

بسمه‌تعالی

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیلی دوره مزبور

شناخته نمی‌شود.

دانشجو: محمدرضا سید جعفری

استاد راهنما: دکتر حسین محبی

داور ۱: دکتر مهدی رجبعلی‌پور

داور۲: دکتر محمود محسنی‌مقدم

تقدیم به:

پدر، مادر و دو فرزندم علی و امیرحسین

تقدیم به:

همسرم حمیده بخاطر قبول مسئولیت بزرگش

قدردانی و تشکر

ستایش خداوندگاری را که به اینجانب توفیق کسب دانش داد و از او می‌خواهم که مرا در استفاده از این دانش برای خدمت به خلق خدا رهنمون شود.

جزوه حاضر حاصل تلاشی است که برای پایان کار درجه کارشناسی ارشد صورت گرفته است. که توسط استاد ارجمند و بسیار مهربانم آقای دکتر حسین محبی هدایت گردیده است که در اینجا لازم می‌دانم که از محبت‌های نامبرده نهایت تشکر را بنمایم. و امیدوارم که خداوند نگهبان همیشه زندگی ایشان باشد. و همچنین از آقایان دکتر مهدی رجبعلی‌پور و دکتر محمود محسنی اساتید برجسته و نامدار بخش ریاضی که داوری این پایان‌نامه را به عهده داشتند کمال تشکر را دارم.

در خاتمه از خانم سطوعی و خانم خالقی بخاطر زحمتشان در تایپ این پایان‌نامه بسیار ممنون می‌باشم.

محمدرضا سید جعفری

چکیده

مقاله حاضر تلاشی برای نشان دادن این است که برای جبرهای تبدیلات ضربی روی فضاهای برگمن، به زیر فضاهای پایای بخصوصی رهنمون می‌شود.

اولین ایده در مقاله [۳] توسط Scott Brown نشان داده شده است که هر تبدیل زیر نرمال دارای زیرفضاهای پایای غیر بدیهی است.

اما بعد از آن آقای C.apostol در [۴] و [۵] با بکار بردن ایده‌های آقای بران از فضاهای باناخ برای ساختن زیر فضاهای پایا استفاده نمود.

ما در اینجا به فضای باناخ $X=L^p_a(\Omega)$ که Ω یک زیر مجموعهٔ بازکراندار از C^d است توجه می‌کنیم. همچنین جبر $\mathcal{B}$ که شامل تمام تبدیلات ضربی روی X است را در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم:

اولاً: جبر $\mathcal{B}$ که شامل تمام تبدیلات ضربی روی $L^p_a(\Omega)$، دارای خاصیت $A_{\aleph_0}$ است.

ثانیاً: Lat $\mathcal{B}$ دارای بی‌شمار عضو می‌باشد.

ثالثاً: جبر $\mathcal{B}$ انعکاسی است.

رابعاً: جبر $\mathcal{B}$ سوپر انعکاسی است.

تمام تعاریف در فصل مقدمه آورده شده‌اند.

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه

مقدمه

برای عدد صحیح $d\geq 1$ گیریم:

$$C^d = \{(z_1,\dots z_d):z_i\in C\}$$

چون $C\cong R^2$، پس بطور وضوح داریم $C^d\cong R^{2d}$. همچنین فرض کنید λ اندازه لبگ برروی C^d و Ω یک زیر مجموعه بازکراندار از C^d باشد. از این رو تحدید λ برروی Ω آنرا به یک اندازه لبگ $2d$ بعدی تبدیل می‌کند.

برای عدد حقیقی $1\leq P<\infty$ گیریم

$$L^p(\Omega)=\{f:\Omega\longrightarrow C:(\int|f|^p d\lambda)^{1/p}<\infty\}$$

بطور وضوح $L^p(\Omega)$ یک فضای نرم دار خطی با

$\|f\|^p=(\int|f|^p d\lambda)^{1/p},\ f\in L^p(\Omega)$ می‌باشد. و همچنین $L^p(\Omega)$ یک فضای باناخ است.

بطور معمول $H^\infty(\Omega)$ فضای تمام توابع تحلیلی کراندار روی Ω می‌باشد. نرم

$$\|f\|_\infty=\sup\{|f(z):z\in\Omega\}$$

$H^\infty(\Omega)$ را به یک فضای باناخ تبدیل می‌کند. برای اثبات این مطلب فرض کنید

$f,g\in H^\infty(\Omega)\Rightarrow f+g$ تحلیلی است

و همچنین

$$\|f+g\|=\sup\{|(f+g)(z)|:z\in\Omega\}\leq$$

$$\sup\{|f(z)|:z\in\Omega\}+\sup\{|g(z)|:z\in\Omega\}=\|f\|_\infty+\|g\|_\infty<\infty$$

و در نتیجه $f+g\in H^\infty(\Omega)$

و اگر $\alpha\in C$ و $f\in H^\infty(\Omega)$ داریم αf تحلیلی و

$$\|\alpha f\|_\infty=\sup\{|\alpha f(z)|: z\in\Omega\}=|\alpha|\ \sup\{|f(z)|:z\in\Omega\}$$

$$=|\alpha|\ \|f\|_\infty<\infty \Longrightarrow \alpha f\in H^\infty(\Omega)$$

و همچنین د ریم.

$$\|f\|_\infty=\sup\{|f(z)|: z\in\Omega\}\geq\{|f(z)|, \forall z\in\Omega$$

پس اگر $f\neq o$ آنگاه $\|f\|_\infty>o$.

آنچه که در بالا دیده شد $\|\ \|_\infty$ یک نرم روی $H^\infty(\Omega)$ است. با توجه به اینکه $H^\infty(\Omega)$ یک فضای برداری نیز هست از این رو $H^\infty(\Omega)$ یک فضای نرم دار می‌باشد. همچنین می‌دانیم فضای C کامل (complete) است. پس اگر $\{f_n\}$ یک رشته کوشی در $H^\infty(\Omega)$ باشد، داریم.

$$\forall\epsilon>\circ\exists N>\circ \Longrightarrow \|f_n-f_m\|_\infty<\varepsilon \qquad , \forall n,m\geq N$$

و در نتیجه

$$\sup\{|f_n(z)-f_m(z)|:z\in\Omega\}<\varepsilon \Longrightarrow$$

$$|f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon\ , \forall z\in\Omega,\ n\ ,\ m\geq N$$

و در نتیجه $\{f_n(z)\}$ یک رشته کوشی در C است و دارای حد می‌باشد. فرض کنید $\lim f_n(z)=f(z)$ حال ادعا می‌کنیم f تحلیلی است. چون Ω یک زیر مجموعه باز کراندار از C^d است. لذا دنباله $\{K_j\}_{j\geq1}$ از زیر مجموعه‌های فشردهٔ C^d موجود است بطوریکه $\Omega=U^\infty_{j=1}K_j$.

در نتیجه

$$f_n(z)\longrightarrow f(z) \qquad , \qquad \forall z\in K_j \quad , \quad \forall j=1,2,\ldots$$

بنابراین f تحلیلی است. حال اگر $\varepsilon=1$، $N>\circ$ موجود است بطوریکه

$|f_n(z)-f(z)|<1, \quad \forall n\geq N, \ z\in\Omega \Longrightarrow$

$|f(z)|<1+|f_n(z)|$ و $\forall n\geq N, \ z\in\Omega.$

حال اگر

$n=N, \ |f(z)|<1+|f_N(z)|\leq 1+M_N, \forall z\in\Omega.$

که

$M_N=\sup\{|f_1(z)|,\dots,|f_N(z)|\}$

لذا داریم

$\|f\|_\infty<\infty \Longrightarrow f\in H^\infty(\Omega).$

در نتیجه $H^\infty(\Omega)$ کامل است و از اینرو یک فضای باناخ می‌باشد.

حال فرض کنید:

$L^p{}_a(\Omega)=\{f\in L^p(\Omega):$ تحلیلی است f و $\int|f|^p d\lambda<\infty\}$

واضح است که $L^p{}_a(\Omega)$ یک زیر فضای بسته از $L^p(\Omega)$ است.

برای هر $f\in H^\infty(\Omega)$ تعریف می‌کنیم:

$$M_f: L^p{}_a(\Omega) \longrightarrow L^p{}_a(\Omega)$$

$$g \longrightarrow fg$$

واضح است M_f یک تبدیل خطی است. چون

$M_f(g_1+g_2)=f(g_1+g_2)=fg_1+fg_2, \quad \forall g_1.g_2\in L^p{}_a(\Omega)$

$M_f(\alpha g)=\alpha fg=\alpha M_{fg}, \forall g\in L^p{}_a(\Omega), \alpha\in C$

همچنین M_f یک تبدیل خطی خوش تعریف می‌باشد چون

$$\int|fg|^p=\int|f|^p|g|^p\leq\|f\|_\infty\int|g|^p<\infty,\ \forall f\in H^\infty(\Omega),\ g\in L^p{}_a(\Omega).$$

در نتیجه $fg\in L^p{}_a(\Omega)$ و بنابراین M_f خوش تعریف است.

M_f یک تبدیل خطی پیوسته است. چون

اگر $\{g_n\}$ یک رشته در $L^p{}_a(\Omega)$ باشد که $g_n\longrightarrow 0$. برای $f\in H^\infty(\Omega)$ داریم:

$$fg\longrightarrow \circ \Longrightarrow M_{fgn}\longrightarrow \circ.$$

رابطه بالا شرط پیوستگی M_f را برآورده می‌کند.

فرض کنید $\beta=\{M_f:f\in H^\infty(\Omega)\}$. واضح است که β یک جبر است.

تعریف:

$\mathrm{Lat}\beta=\{S$: S یک زیر فضای خطی بسته از $L^p{}_a(\Omega)$ است و $\beta S\subseteq S\}$

آنچه که در این مقاله اثبات خواهیم نمود این است که $\mathrm{Lat}\beta$ دارای بی‌شمار عضو بوده و همچنین جبر β سوپر انعکاسی (super-reflexive) است.

نخست به معرفی فضاها و توابع مورد نیزمان در این مقاله می‌پردازیم.

فرض کنیم $X=L^p{}_a(\Omega)$, $Y=L^q(\Omega)/L^p{}_a(\Omega)^\perp$ بطوریکه $1/_p+1/_q=1$.

می‌دانیم $L^q(\Omega)$ فضای دوگان $L^p(\Omega)$ برطبق:

$$<f,g>=\int_\Omega f(z)g(z)d\,z \quad \text{و} \quad (f\in L^p(\Omega),\ g\in L^q(\Omega))$$

می‌دانیم که $L^p{}_a(\Omega)$ یک زیر فضای بسته از $L^p(\Omega)$ می‌باشد، از اینرو داریم

$$X^*=(L^p{}_a(\Omega))^*=\frac{L^p(\Omega)^*}{L^p{}_a(\Omega)^\perp}=\frac{L^q(\Omega)}{L^p{}_a(\Omega)^\perp}=Y$$

خواص $H^\infty(\Omega)$:

جبر $H^\infty(\Omega)$ یک زیر فضا از فضای $L^\infty(\Omega)$ از توابع اندازه پذیر f می‌باشد ب نرم

$$\|f\| = \text{ess sup}\{|f(z)| : z\in\Omega\} < \infty$$

همچنین $H^\infty(\Omega)$ یک زیر فضای w*-closed از $L^\infty(\Omega)$ با توجه به دوگانگی $<L^1(\Omega), L^\infty(\Omega)>$ می‌باشد.

$L^\infty(\Omega)$ بعنوان فضای دوگان $L^1(\Omega)$ معرفی می‌شود. از این رو توپولوژی W^* روی $L^\infty(\Omega)$ از این دوگانگی می‌آید بااین واقعیت که $H^\infty(\Omega)$ در توپولوژی W^* بسته است.

فرض کنید $Q(\Omega)$ خانواده تمام تابعک‌های خطی روی $H^\infty(\Omega)$ باشند که در توپولوژی w^* پیوسته هستند. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$Q(\Omega) = \frac{L^1(\Omega)}{{}^\perp H^\infty(\Omega)}$$

خاصیت ۱-۱: $Q(\Omega)$ **یک فضای باناخ جدا شدنی است و** $Q^*(\Omega) = H^\infty(\Omega)$.

اثبات: چون $L^p(\Omega)$ برای $1 \leq p < \infty$ یک فضای باناخ جدا شدنی است، از اینرو $Q(\Omega)$ نیز چنین است. چون $H^\infty(\Omega)$ زیر فضای w^*-بسته از $L^\infty(\Omega)$ است. داریم

$$({}^\perp H^\infty(\Omega))^\perp = H^\infty(\Omega) \Longrightarrow$$

$$Q^* = \left(\frac{L^1(\Omega)}{{}^\perp H^\infty(\Omega)}\right)^* = ({}^\perp H^\infty(\Omega))^\perp = H^\infty(\Omega). \quad \blacksquare$$

خاصیت ۲-۱: **فضای X یک** $H^\infty(\Omega)$ **- مدول برطبق**

$$H^\infty(\Omega)\times X \longrightarrow X$$

$$(f,x) \longrightarrow fx$$

می‌باشد.

اثبات: بطور وضوح $H^{\infty}(\Omega)$ با توجه به جمع و ضرب توابع یک حلقه و X یک گروه آبلی می‌باشد و همچنین داریم:

$$\forall f,g\in H^{\infty}(\Omega),\ x,\ x'\in X$$

$$(f+g,x)=(f+g)x=fx+gx=(f,x)+(g,x)$$

$$\blacksquare.(f,x-x')=f(x+x')=fx+fx'=(f,x)+(f,x')$$

خاصیت ۳-۱: فضای Y یک $H^{\infty}(\Omega)$- مدول بر طبق

$$H^{\infty}(\Omega)\times Y\rightarrow Y$$

$$(f,[g])\ \rightarrow\ f[g]=[fg]$$

اثبات: به طور وضوح Y با توجه به جمع کلاسهای هم‌ارزی یک گروه آبلی است و داریم

$$\forall\ f,f'\in H^{\infty}(\Omega)\ ,\ [g].[g']\in Y$$

$$(f+f',[g])=(f+f')[g]=[(f+f')g]=[fg]+[f'g]=(f,[g])+(f',[g])$$

$$\blacksquare.(f.[g+g'])=f[g+g']=[fg+fg']=[fg]+[fg']=(f,[g])+(f,[g'])$$

خاصیت ۴-۱: برای هر $x\in X$ و $y\in Y$

$$x\otimes y:\ H^{\infty}(\Omega)\longrightarrow C$$

$$g\longrightarrow\ <gx,y>$$

تابعکی است که به طور W^{*}- پیوسته بر طبق دوگانگی $Q(\Omega)$ می‌باشد.

اثبات: می‌دانیم اگر D یک فضای با ناخ جداشدنی و $f,D^{*}\longrightarrow C$ یک تابعک خطی پیوسته‌باشد، آنگاه f به طور W^{*}- پیوسته است اگر و تنها اگر f به طور رشته‌وار W^{*}- پیوسته باشد.

حال چون $Q(\Omega)$ یک فضای باناخ جداشدنی است، $Q^*(\Omega)=H^\infty(\Omega)$ است، پس اگر ثابت

کنیم $x\otimes y$ به طور رشته‌وار W^*- پیوسته است. مسئله حل است.

فرض کنید $\{g_n\}$ یک رشته در $H^\infty(\Omega)$ باشد به طوری که $g_n\to \circ$.

بنابراین دنباله $\{g_n\}_{n\geq 1}$ کراندار است، و نیز روی زیر مجموعه‌های فشردهٔ K از Ω، $g_n\to \circ$

بطور یکنواخت.

از اینرو

$$|(x\otimes y)(g_n)|=|<g_nx,y>|=|\int g_nxydz|$$

$$\leq \|g_n\|_\infty \|x\|_p \|y\|_q \lambda(K)\leq \|g_n\|_\infty \|x\|_p \|y\|_q \lambda(\Omega).$$

کنون داریم $x\otimes y(g_n)\longrightarrow x\otimes y(g)$.■

خاصیت ۵-۱: برای هر $\mu\in\Omega$

$$E_\mu : H^\infty(\Omega)\longrightarrow C$$
$$g\longrightarrow g(\mu)$$

تابعکی است که به طور W^*- پیوسته بر طبق دوگانگی $Q(\Omega)$ می‌باشد.

اثبات: با توجه به تذکر در اثبات خاصیت گذشته فرض کنید $\{g_n\}$ در $H^\infty(\Omega)$ باشد و

$g_n\longrightarrow g\ (g\in H^\infty(\Omega))$ در نتیجه

$$g_n(\mu)\longrightarrow g(\mu),\quad \forall\mu\in\Omega$$

و بنابراین

$$E_\mu(g_n)\longrightarrow E_\mu(g),\quad \forall\mu\in\Omega.$$

در نتیجه E_μ به طور W^*- پیوسته بر طبق دوگانگی $Q(\Omega)$ می‌باشد.■