بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

## پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی–گرایش جبر

عنوان:

# اندازه گنگی اعداد $\pi$ و $\ln ۳$

استاتید راهنما:

دکتر تاتیانا حسامی پیله رود

دکتر ندا آهنجیده

استاد مشاور:

دکتر خدابخش حسامی پیله رود

توسط:

فاطمه کبیری قلعه‌تکی

اسفند ۸۹

تقدیم

این مجموعه کوچک و ناقابل را به پاس عاطفه سرشار و مهر همیشه فروزان به مهربان ترین کسانم یعنی خانواده گرامی و بخصوص **همسر عزیزم** تقدیم می‌دارم.

# تشکر و قدردانی

خدای مهربان را سپاسگذارم که یک بار دیگر مرا یاری کرد تا در کنار اساتید گرامی اندکی از دریای علم آنها بهره گیرم.

# چکیده

در این پایان نامه ابتدا اثباتی کلی برای گنگ بودن اعداد $\pi$، $\ln ۲$، $\zeta(۲)$ و $\zeta(۳)$ که توسط بیکرز و هایلبروک، به کمک خواص چندجمله‌ای های لژاندار به دست آمده، ارائه می‌شود.
سپس با به دست آوردن اندازه استقلال خطی اعداد ۱، $\ln ۲$ و $\ln ۳$ بر روی میدان اعداد گویا و کاربرد قضیه لاپلاس، بهترین اندازه گنگ بودن عدد $\ln ۳$ تا به امروز که در سال ۲۰۰۷ توسط سالی خوف به دست آمده است محاسبه می‌شود یعنی، $\mu(\ln ۳) \leq ۵/۱۲۵$.
در پایان بهترین اندازه گنگی عدد $\pi$ تاکنون، که در سال ۲۰۰۸ توسط سالی خوف به دست آمده، با استفاده از خواص تابع دی گاما و کاربرد قضیه لاپلاس ثابت می‌شود.

# فهرست مندرجات

# فهرست نمادها

| | |
|---|---|
| مجموعه اعداد طبیعی | $\mathbb{N}$ |
| مجموعه اعداد صحیح | $\mathbb{Z}$ |
| مجموعه اعداد گویا | $\mathbb{Q}$ |
| مجموعه اعداد حقیقی | $\mathbb{R}$ |
| مجموعه اعداد مختلط | $\mathbb{C}$ |
| کوچکترین مضرب مشترک اعداد $1, \cdots, n$ | $d_n$ |
| تابع گاما | $\Gamma(x)$ |
| تابع دی گاما | $\Psi(x)$ |
| تابع پی | $\pi(x)$ |
| تابع پی سای | $\psi(x)$ |
| تابع زتا | $\zeta(s)$ |
| تابع تتا | $\theta(x)$ |
| مشتق مرتبه‌ی $m$ —ام تابع $f$ | $f^{(m)}$ |
| مشتق تابع گاما | $\Gamma'(x)$ |
| ثابت اویلر | $\gamma$ |
| ثابت ارشمیدسی | $\pi$ |
| عدد نپر | $e$ |

| | |
|---|---|
| درجه‌ی چندجمله ای $f(x)$ | $\deg f(x)$ |
| مینیمم تابع $f(x)$ | $\min f(x)$ |
| قسمت حقیقی تابع $f(x)$ | $\Re f(x)$ |
| قسمت صحیح عدد $x$ | $[x]$ |
| قسمت کسری عدد $x$ | $\{x\}$ |
| منظور لگاریتم در مبنای $e$ است | $\log x$ |
| حد | $\lim$ |
| بی نهایت | $\infty$ |
| متعلق بودن | $\in$ |
| طول $w$ | $\|w\|$ |
| حلقه‌ی چندجمله ای ها از $x$ با ضرایب از $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z}[x]$ |
| ضریب دو جمله ای $n$ بر $k$ | $\binom{n}{k}$ |
| حاصل ضرب متناهی از $n$ عدد | $\prod_{i=۱}^{n}$ |
| مجموع متناهی از $n$ مقدار | $\sum_{i=۱}^{n}$ |
| انتگرال معین | $\int_a^b$ |
| انتگرال دوگانه معین | $\int_a^b \int_c^d$ |

# پیشگفتار

در این پایان نامه، ابتدا روش یکسانی را برای اثبات گنگ بودن اعداد $\pi$، $\ln ۲$، $\zeta(۲)$ و $\zeta(۳)$، مطرح می‌کنیم. سپس به مطالعه‌ی بهترین اندازه گنگی اعداد $\pi$ و $\ln ۳$ می‌پردازیم. به همین منظور مباحث خود را در چهار فصل تنظیم کرده‌ایم. در فصل اوّل مقدمه و تعاریف مقدماتی از نظریه اعداد را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم روشی یکسان برای اثبات گنگ بودن اعداد $\pi$، $\ln ۲$، $\zeta(۲)$ و $\zeta(۳)$ را که توسط بیکرز و هایلبروک ارائه شده، بیان می‌کنیم.

در فصل سوم بهترین اندازه گنگی عدد $\ln ۳$ تا به امروز را که توسط سالی‌خوف به دست آمده، مطرح می‌کنیم.

در فصل چهارم نیز به مطالعه بهترین اندازه گنگی عدد $\pi$ تا به امروز، که توسط سالی‌خوف به دست آمده می‌پردازیم.

# فصل ۱

# مقدمه و تعاریف مقدماتی

## ۱.۱ مقدمه

بررسی گنگ بودن عدد $\pi$ در ریاضیات تاریخچه‌ای ۲۰۰۰ ساله دارد، این مسئله با بررسی مسئله تربیع دایره که توسط یونانیان باستان مطرح شد، شروع شد. در سال ۱۷۶۱ لامبرت [۱] برای اولین بار، گنگ بودن عدد $\pi$ را اثبات کرد. در سال ۱۸۸۲ لیندمان [۲] متعالی بودن عدد $\pi$ را اثبات نمود. گروهی از اعداد که بررسی طبیعت حسابی آنها هنوز هم برای ریاضیدان ها جالب است، مقادیر تابع زتای ریمان در اعداد صحیح مثبت فرد بزرگتر از ۳ می‌باشد.

[۱] Lambert

[۲] Lindemann

تعریف ۱.۱.۱ : به ازای هر عدد مختلط $s$ که قسمت حقیقی آن بزرگتر از یک است، تابع زتای ریمان را به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

بنابر این

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{i^2} + \cdots = \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^2} = 1/64493\cdots$$

و

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{i^3} + \cdots = \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^3} = 1/20205\cdots.$$

اویلر در سال ۱۷۳۵، [۹] برای تابع زتای ریمان در نقطه‌ی $s = 2$ فرمول جالبی به دست آورد. وی ثابت کرد:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

این رابطه با استفاده از روشهای مختلفی اثبات می‌شود، ما آن را با استفاده از انتگرالهای دوگانه در لم ۲.۱.۲ ثابت خواهیم کرد. با توجه به رابطه‌ی بالا، از متعالی بودن عدد $\pi$ متعالی بودن عدد $\zeta(2)$ به دست می‌آید امّا برای عدد $\zeta(3)$ فرمول مشابهی وجود ندارد و بررسی گنگ بودن $\zeta(3)$ از چند قرن پیش آغاز شد که در نهایت در سال ۱۹۷۸ آپری[۳] [۱۵] توانست گنگ بودن عدد $\zeta(3)$ را اثبات نماید. در سال ۱۹۸۰ بیکرز[۴] [۲] اثبات ساده تری برای گنگی اعداد $\zeta(2)$ و $\zeta(3)$ ارائه داد. اثبات

[۳] Apery

[۴] Beukers

های گوناگونی برای گنگی اعداد گفته شده در کتابی از بارووین[۵] [۳] جمع آوری شده است. در فصل دوم گنگی اعداد $\pi$، $\ln ۲$، $\zeta(۲)$ و $\zeta(۳)$ را به روشی یکسان، با کمک چندجمله‌ایهای لژاندار اثبات می‌کنیم.

تعریف ۲.۱.۱ : گوئیم عدد حقیقی $\alpha$ دارای اندازه گنگی $\mu \geq ۲$ است، هرگاه به ازای هر $\epsilon > ۰$ یک عدد صحیح مثبت $q_۰$ وابسته به $\epsilon$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq q^{-\mu-\epsilon}$$

که در آن $p$ و $q$ اعداد صحیح هستند و $q \geq q_۰(\epsilon)$.

بهترین برآورد برای اندازه گنگی عدد $\ln ۳$ در سال ۱۹۸۷ توسط آرهین [۶] به دست آمده بود. وی ثابت کرد $\mu(\ln ۳) \leq ۸/۶۱۶$. در سال ۲۰۰۷ سالی‌خوف [۷] برآورد بهتری برای گنگی این عدد به دست آورد که اساس این اثبات بر مبنای ساختاری است که هاتا[۸] [۷] برای به دست آوردن اندازه گنگی عدد $\pi$ از آن استفاده کرده است. وی اثبات نمود که $\mu(\ln ۳) \leq ۵/۱۲۵$. در فصل سوم به اثبات این قضیه می‌پردازیم.

امّا اولین برآورد اندازه گنگی عدد $\pi$ توسط ماهلر [۹] [۱۰] در سال ۱۹۵۳ به دست آمد. وی ثابت کرد

که به ازای هر $p, q \in \mathbb{N}$ به‌طوری‌که $q$ به قدر کافی بزرگ است، داریم

[۵] Borwein

[۶] Rhin

[۷] Salikhov

[۸] Hata

[۹] Mahler

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^{30}}.$$

پس از وی در سال ۱۹۷۴ مینیوت [10] [۱۱] این نتیجه را بهبود بخشید و توان ۲۰ را جایگزین توان ۳۰ کرد و در سال ۱۹۸۲ چودنوسکی [11] [۴] عدد ۲۰ را به۱۹/۲۸۹۹۹۴۴۰۰۰ تقلیل داد و در سال ۱۹۹۰ و ۱۹۹۳ هاتا در چند مقاله [۵, ۶, ۷]، عدد اخیر را به ۸/۰۱۶۰۴۵۰۰۰ کاهش داد.

بهترین نتیجه‌ای که تا کنون به دست آمده، متعلق به سالی‌خوف است که در سال ۲۰۰۸ ثابت کرد این توان می‌تواند ۷/۶۰۶۳۰۰۰ باشد. در فصل چهارم به بررسی این نتیجه می‌پردازیم.

## ۲.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۲.۱ : اعدد $\pi$ و $\ln 2$ به صورت سری های متعارف زیر تعریف می شوند:

$$\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \frac{1}{2i+1} = 3/141592\cdots ,$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{i\geq 1}(-1)^{i-1}\frac{1}{i} = 0/693147\cdots .$$

تعریف ۲.۲.۱ : عدد $\alpha$ را جبری می نامند، هرگاه ریشه‌ی چندجمله‌ای

$$\varphi(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad \varphi(x) \not\equiv 0$$

با ضرایب گویا باشد. عدد حقیقی یا مختلط $\alpha$ را که جبری نباشد، متعالی نامند.

[10] Mignotte

[11] Chudnovsky

تعریف ۳.۲.۱ : به ازای هرعدد طبیعی $n$ و عدد حقیقی $x$ چند جمله‌ای لژاندار $P_n(x)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_n(x) = \frac{۱}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n(۱-x)^n).$$

تعریف ۴.۲.۱ : فرض کنید $x > ۰$ عددی حقیقی باشد. در این صورت تابع $\pi(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} ۱.$$

# فصل ۲

# اثبات های مشابه برای گنگ بودن اعداد $\pi$، $\ln ۲$، $\zeta(۲)$ و $\zeta(۳)$

در این فصل اثبات یکسانی برای گنگ بودن اعداد $\pi$، $\ln ۲$، $\zeta(۲)$ و $\zeta(۳)$ ارائه می‌دهیم. این روش اثبات در سال ۲۰۰۱ توسط هایلبروک [۸] به دست آمده است.

## ۱.۲ فرمول هایی برای مقادیر $\zeta(۲)$ و $\zeta(۳)$.

در این بخش ابتدا مقادیر $\zeta(۲)$ و $\zeta(۳)$ را با استفاده از انتگرال های دوگانه نمایش می‌دهیم سپس فرمول اویلر را برای مقدار $\zeta(۲)$ که به صورت

$$\zeta(۲) = \frac{\pi^۲}{٦}$$

می‌باشد را ثابت می‌کنیم.

**لم ۱.۱.۲** : اعداد $\zeta(2)$ و $\zeta(3)$ را می توان به صورت زیر نمایش داد

$$\zeta(2) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\, dxdy\ ,$$

$$\zeta(3) = -\frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} \ln xy\, dxdy.$$

**اثبات:** انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\, dxdy$$

چون تابع $\frac{1}{1-xy}$ به ازای $|xy| < 1$ دارای بسط سری توانی $\sum_{i=0}^{\infty} x^i y^i$ است، داریم

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\, dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i\geq 0} x^i y^i\, dxdy.$$

با توجه به این که سری $\sum_{i\geq 0} x^i y^i$ در حجره‌ی $[0, 1-\epsilon] \times [0, 1-\epsilon]$ به طور یکنواخت همگراست داریم

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy} = \sum_{i\geq 0} \int_0^1 \int_0^1 x^i y^i\, dxdy = \sum_{i\geq 0} \int_0^1 x^i\, dx \int_0^1 y^i\, dy$$

$$= \sum_{i\geq 0} \frac{x^{i+1}}{i+1}\Big|_0^1 \times \frac{y^{i+1}}{i+1}\Big|_0^1 = \sum_{i\geq 0} \frac{1}{(i+1)^2} = \zeta(2)$$

بنابر این طبق تعریف $\zeta(2)$ به دست می‌آوریم:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\, dxdy = \zeta(2)$$

به طور مشابه برای $\zeta(3)$ داریم

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}\ln xy\,dxdy = \int_0^1\int_0^1 \sum_{i\geq 0} x^i y^i \ln xy\,dxdy$$
$$= \int_0^1\int_0^1 \sum_{i\geq 0}(x^i y^i \ln x + x^i y^i \ln y)\,dxdy$$

با توجه به تقارن $x$ و $y$ داریم

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}\ln xy\,dxdy = 2\int_0^1\int_0^1 \sum_{i\geq 0} x^i y^i \ln x\,dxdy$$

چون سری $\sum_{i\geq 0} x^i y^i \ln x$ در حجره‌ی $[0,1-\epsilon]\times[0,1-\epsilon]$ به طور یکنواخت همگراست، پس با توجه به پیوستگی $x\ln x$ و $y$ در [0,1] داریم

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}\ln xy\,dxdy \ = 2\sum_{i\geq 0}\int_0^1 x^i \ln x\,dx \int_0^1 y^i\,dy$$

با استفاده از روش انتگرال گیری جزء به جزء به دست می‌آوریم

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}\ln xy\,dxdy = 2\sum_{i\geq 0}\frac{1}{i+1}\left(x^{i+1}\ \ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 x^{i+1}\frac{1}{x}\,dx\right)\frac{1}{i+1}$$

اما تابع $x^{i+1}\ln x$ به ازای $x\geq 0$ در همسایگی نقطه‌ی $0$ پیوسته است. پس حد تابع با مقدار تابع در $x=0$ برابر است، یعنی

$$\lim_{x\to 0} x^{i+1}\ln x = 0$$

بنابر این داریم

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}\ln xy\,dxdy = -2\sum_{i\geq 0}\frac{1}{(i+1)^3}$$