بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت معلم تهران

مؤسسه ریاضیات

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

عنوان:

الگوریتمهای سریع برای درونیابی چندجمله‌ای، انتگرالگیری و دیفرانسیلگیری

استاد راهنما:

دکتر اسماعیل بابلیان

مؤلف:

علی داوری

شهریور ماه ۱۳۷۷

بسمه تعالی

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

صورتجلسهٔ دفاع از پایان نامهٔ کارشناسی ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان نامه آقای علی داوری دانشجوی دورهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی شاخهٔ کاربردی در روز چهارشنبه مورخه ۷۷/۷/۱ در دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجه آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون ۱۹/۰ (نوزده تمام) می‌باشد.

۱- عالی ☑

۲- بسیار خوب ☐

۳- خوب ☐

۴- قابل قبول ☐

۵- غیر قابل قبول ☐

استاد راهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر غلامرضا جهانشاهلو	دکتر سعید عباس بندی	دکتر اسماعیل بابلیان

اسماعیل بابلیان

رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

تهران - خیابان طالقانی بین بهار و شریعتی - پلاک ۵۹۹ - کدپستی ۱۵۶۱۴

تقدیم به :

پدر بزرگوارم و مادر مهربانم

که تشویقم کردند

راهنمائیم نمودند

و اگر موفقیتی داشته‌ام متعلق به آنهاست .

تقدیر و تشکر

به نام پروردگار عزوجل که توانایی عطا فرمود تا در مسیر پویش گام بردارم.
بعد از سپاس به درگاه حق تعالی بر خود وظیفه می دانم که از زحمات کلیه اساتید معظمی که راهنمای اینجانب بوده‌اند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم، به ویژه از راهنمائیهای بی دریغ استاد ارجمند جناب آقای دکتر اسماعیل بابلیان که در طی دورهٔ کارشناسی ارشد زحمات بیشماری را متقبل شده و از راهنمائیهای ارزندهٔ خود ما را بهره مند نموده‌اند، خالصانه قدردانی و تشکر می‌نمایم.

همچنین از جناب آقای دکتر سعید عباس بندی و جناب آقائ دکتر غلامرضا جهانشاهلو که قبول زحمت نموده و پایان نامهٔ اینجانب را مطالعه نموده و داوری دفاع اینجانب را به عهده گرفتند قدردانی و تشکر می‌نمایم.

... در هر حرفه ای که هستید نه اجازه دهید که به بدبینهای بیحاصل آلوده شوید و نه بگذارید که بعضی لحظات تأسف بار، که برای هر ملتی پیش می‌آید، شما را به یأس و نا امیدی بکشاند. در آرامش حاکم بر آزمایشگاهها و کتابخانه هایتان زندگی کنید. نخست از خود بپرسید: "برای یادگیری و خودآموزی چه کرده ام؟"، سپس همچنان که پیشتر میروید، بپرسید "من برای کشورم چه کرده‌ام؟"، و این پرسش را آنقدر ادامه دهید تا به این احساس شادیبخش و هیجان انگیز برسید که شاید سهم کوچکی در پیشرفت و اعتلای بشریت داشته‌اید.

اما هر پاداشی که زندگی به تلاشهایمان بدهد، یا ندهد، هنگامی که به پایان تلاشهایمان نزدیک می‌شویم هر کداممان باید حق آن را داشته باشیم که با صدای بلند بگوئیم "من آنچه را در توان داشته‌ام انجام داده ام".

لوئی پاستور

(۱۸۲۲-۱۸۹۵)

فهرست

فصل دوم

فصل سوم

الگوریتمهای سریع برای

درونیابی چندجمله‌ای ،انتگرالگیری و دیفرانسیلگیری

چکیده :برای توابع جدولی در گره های چبیشف در یک بازه ،درونیابی طیفی و انتگرالگیری معین از طریق FFT می تواند به صورت پایدار و کارامدی انجام شود .برای دسته های دیگری از نقاط ،مانند گره های گاُوس روی یک بازه ،درونیابی کلاسیک و انتگرالگیری معین ،طرحها پایدار،اما کند هستند و اگر N تعداد نقاط در گسسته سازی بازه باشد احتیاج به $o(N^2)$ عملیات ریاضی دارند.

ما الگوریتمهایی رابرای محاسبه کارآمد درونیابهای چند جمله‌ای لاگرانژ در نقاط چندگانه روی خط و همچنین برای انتگرالگیری معین و دیفرانسلگیری سریع از توابعی که در نقاطی غیراز گره‌های چبیشف جدول‌بندی شده اند ارائه می کنیم.

طرح درونیابی به $o(N\log 1/\varepsilon)$ عملیات ریاضی احتیاج دارد و برای انتگرالگیری و دیفرانسیلگیری طرحها احتیاج به $O\left(N\log N+N\log(1/\varepsilon)\right)$عملیات دارد،که ε دقت محاسبات است و N تعدادگره ها است .لازم به یادآوری است که طرحهای انتگرالگیری پایدار هستند در حالیکه طرحهای دیفرانسیلگیری دارای عدد وضعیت[1] متناسب با N^2 است. الگوریتمها مدلهای کارامدی از روش چندگانه سریع (FMM)که به ویژه برای مسائل یک بعدی طراحی شده‌اند را مورد استفاده قرار می‌دهند . مثالهای متعددی برای مشاهده اجرای عددی تحقیق آورده می‌شود.

---

(۱) condition number

فصل اول

۱.۱ تقریب چند جمله ای

یکی از مفیدترین و معروفترین رده‌های توابع که خط حقیقی رابه توی خود می نگارد ردهٔ چند جمله ایهای جبری است ،یعنی مجموعه توابعی به شکل $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ کــه در آن n یک عـدد صـحیح نـامنفی است $a_n,\ldots,a_1,a_0$ ثابتهای حقیقی هستند.

یک دلیل عمده اهمیت چندجمله ایهای جبری این است که توابع پیوسته را به طور یکنواخت تقریب می کنند،یعنی به ازای هر تـابع تـعریف شـده و پیوسته بر یک بازه بسته ،چند جمله ایی وجود دارد که هر قدر بخواهیم به تابع مفروض نزدیک است .این نتیجه در قضیه زیر دقیق تر بیان شده است .

قضیه ۱.۱ (قضیه تقریب وایرشتراس):

هــرگاه f بـر[a,b] تـعریف شـده وپیوسته بـاشد ،و $\varepsilon>0$ نـیز مـفروض باشد،آنگاه چندجمله ایی چون p ،که بر [a,b] تعریف شده است وجود دارد بطوری که

$$\forall x\in[a,b] \qquad |f(x)-P(x)|<\varepsilon$$

اثبات :[۳]

خاصیت مهم دیگر رده چند جمله ایهادر تقریب توابع ایـن است کـه مشـتق وانتگرال نامعین هر چند جمله ای به آسانی محاسبه می شود ومشتق وانتگرال یک چند جمله ای خود یک چند جمله ای است .

دلایل فوق باعث می شود که اغلب چند جمله ایها برای تقریب توابعی که پیوسته‌اند یاپیوسته فرض می شوند به کار روند.

قضیه وایراشتراس از دیدگاه نظری بسیار مفید است ، لیکن نمی توان از آن برای مقاصد محاسباتی به طور مؤثر استفاده کرد .

به جای یافتن یک چند جمله ای که یک تابع را بر کل یک بازه به طور یکنواخت تقریب کند،اغلب بهتر است چندجمله ایی بیابیم که در شرایطی که برای مسأله مورد نظر مفیدند صدق کند و در عین حال به نوعی به آن تابع نزدیک باشد.

تعریف ۲.۱(چندجمله‌ایهای برنشتاین):

اگر f تابعی بر [۰,۱] باشد ،چندجمله ای بر نشتاین‌از درجه n برای f عبارتست از

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(k/n)x^k(1-x)^{n-k}$$

که در آن $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ است .

می توان نشان داد [۳]که اگر f بر [۰,۱] پیوسته بوده و $x_0\in[0,1]$دراین صورت

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x_0)=f(x_0)$$

۲.۱ درونیابی وچندجمله ای لاگرانژ

بدون شک مسأله درونیابی یکی از مسائل بسیار قدیمی و مهم ریاضی است. درایران نیز دانشمندان بسیاری از قبیل ابوریحان بیرونی ،خواجه نصیرالدین طوسی وغیاث الدین جمشید کاشانی در مورد این مسأله کار کرده اند . [۱۴]

سؤال کلی درونیابی این است که اگر ما توانستیم در زمانهای مختلف جسمی رارؤیت کنیم ،موقعیت آن جسم‌را در زمانهایی که آن را ندیده ایم چطور می توان به طورتقریبی تعیین نمود .

دربخش قبل یک چند جمله ای تقریب ساز که با یک تابع وبعضی از مشتقاتش در یک نقطه یکی باشد مورد بحث قرار گرفت .این چند جمله ای برای توابعی که مشتقات آنها موجود وبه آسانی قابل محاسبه اند روی بازه های کوچک کاملاً مفید است ،اما واضح است که همیشه وضع به این صورت نیست.

در نتیجه ،چند جمله ایهای تیلور اغلب مفید نیست وباید روشهای دیگری برای تقریب جستجو شود در این بخش در پی یافتن چند جمله ایهای تقریب ساز که بتوان انهارا فقط با تعیین چند نقطه در صفحه که باید از آنها بگذرند مشخص کرد، هستیم .

مسأله تعیین یک چند جمله ای از درجه یک که از نقاط (x_0,y_0) و (x_1,y_1)می‌گذرند را در نظر می گیریم .این مسأله عبارتست از تقریب سازی یک تابع مانند f که $f(x_0)=y_0$ و $f(x_1)=y_1$ ،به وسیله یک چندجمله ای درجه اول که با مقادیر f در نقاط مفروض حالت درونیابی دارد یا با آنها یکی است .

اگر $P(x)=a_0+a_1x$ این چندجمله‌ای باشد باید در روابط زیر صدق کند

$$y_0=P(x_0)=a_0+a_1x_0$$

$$y_1=P(x_1)=a_0+a_1x_1$$

با حل این معادلات نسبت به a_0 و a_1 داریم

$$a_1=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$$

$$a_0 = y_1 - a_1 x_1 = y_1 - \left(\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}\right) x_1$$

با جایگذاری مقادیر a_0 و a_1 در معادله $P(x) = a_0 + a_1 x$

$$P(x) = y_1 - \left(\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}\right) x_1 + \left(\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}\right) x = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) y_0 + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) y_1$$

واضح است که با نوشتن $P(x)$ به شکل اخیر $P(x_0) = y_0$ و $P(x_1) = y_1$. بااین روش می توان مقادیر یک تابع را بین دو مقدار ثبت شده نیز تقریب زد ،یعنی این یک روش درونیابی است که اغلب در جداول مثلثاتی یا لگاریتمی به کار می‌رود .برای تعمیم مفهوم درونیابی خطی ،یک چند جمله ای از درجه حداکثر n می یابیم که از $n+1$ نقطه معلوم بگذرد.

این کار را می توان یک روش تقریبی دانست که در آن ،به ازای تابع معلوم f، چند جمله ایی مانند P می یابیم که با مقادیر تابع f در نقاطی معلوم یکی بوده وسپس چند جمله ای P را برای تقریب f در نقاط دیگر به کار می‌بریم.

روند درونیابی که هم اکنون به اختصار توضیح داده شد به تفصیل در قضیه بعد توصیف می شود.

قضیه ۳.۱

هر گاه $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ، $n+1$ نقطه متمایز بوده و f تابعی با مقادیر معلوم در این نقاط باشد ،آنگاه چند جمله ای منحصر به فردی مانند P،از درجه حداکثر n وجود دارد بااین ویژگی که

$P(x_k) = f(x_k)$ و $k = 0, 1, \ldots, n$

این چند جمله ای با روابط زیر داده می شود:

$$P(x) = f(x_0) L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n) L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{n,k}(x) \qquad (1.1)$$

که در آن

$$L_{n,k}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} \qquad (۲.۱)$$

$$L_{n,k}(x)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} \qquad k=0,1,\dots,n$$

اثبات : [۳]

هر گاه در مورد درجه اشتباهی رخ ندهد به جای $L_{n,k}(x)$ فقط $L_k(x)$ می‌نویسیم .

قضیه ۴.۱

هرگاه $x_0,x_1,\dots,x_n$ نقاط متمایزی در بازه $[a,b]$ بوده و $f\in C^{n+1}[a,b]$ آنگاه به ازای هر x در $[a,b]$ نقطه ای مانند ξ_x در (a,b) وجود دارد با این ویژگی که

$$f(x)=P(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \qquad (۳.۱)$$

که در آن P چندجمله‌ای درونیاب fاست که با فرمول (۲.۱) داده می شود.

اثبات :[۳]

۳.۱.چند جمله ایهای متعامد (۱)

تعریف ۵.۱

فرض کنیم توابع f و g بر بازه $[a,b]$ تعریف شده باشند و نیز فرض کنید که تابع $W(x)$ بر (a,b) تعریف شده و مثبت باشد .حاصلضرب داخلی f و g نسبت به

(۱) orthogonal polynomials