بسم اللہ الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

بررسی عدد احاطه گری جمعی در حاصل ضرب گراف ها

نگارش

عباس محمدی

استاد راهنما: دکتر حمید رضا میمنی

استاد مشاور: عبدالرضا اسکویی

پایان نامه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی

شهریور ۱۳۸۹

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

تعهد نامه اصالت اثر

اینجانب عباس محمدی متعهد می شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است ، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مآخذ ذکر گردیده است . این پایان نامه قبلا برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است . در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد .

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی می باشد .

نام و نام خانوادگی دانشجو: عباس محمدی

امضاء

تهران- لویزان- کدپستی ۱۶۷۸۸- صندوق پستی ۱۶۳-۱۶۷۸۵ تلفن ۹-۲۲۹۷۰۰۶۰ (داخلی ۲۷۳۷) نمابر ۲۲۹۷۰۰۱۱ پست الکترونیکی
srtu@srttu.ac.ir

شماره: ۳۶۴/۱۴
تاریخ: ۸۹/۱۰/۰۶
پیوست:

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

صورتجلسهٔ دفاع پایان‌نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد آقای **عباس محمدی** رشتهٔ **ریاضی‌کاربردی** تحت عنوان **بررسی عدد احاطه‌گر جمعی در حاصل ضرب گراف‌ها** که در تاریخ: **۸۹/۶/۲۳** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی برگزار گردید و نتیجه به شرح زیر می باشد.

☑ قبول (بادرجه عالی امتیاز ۲۰ بیست تمام) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود

۱ ـ عالی (۲۰ - ۱۸)

۲ ـ بسیار خوب (۱۷/۹۹ - ۱۶)

۳ ـ خوب (۱۵/۹۹ - ۱۴)

۴ ـ قابل قبول (۱۳/۹۹ - ۱۲)

اعضاء	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
استاد راهنما	دکتر حمیدرضا میمنی	دانشیار	
استاد مشاور	آقای عبدالرضا اسکویی	مربی	
استاد داور داخلی	دکتر علی ذعیم‌باشی	استادیار	
استاد داور خارجی	دکتر علیرضا اشرفی	استاد	
نماینده تحصیلات تکمیلی	آقای حمید دهنوی	کارشناس‌ارشد	

تهران، لویزان، کدپستی: ۱۵۸۱۱ - ۱۶۷۸۸
صندوق پستی: ۱۶۳ - ۱۶۷۸۵
تلفن: ۹-۲۲۹۷۰۰۶۰ فکس: ۲۲۹۷۰۰۳۳
Email:sru@sru.ac.ir
www.srttu.edu

تشکر و قدر دانی :

بر خود وظیفه می دانم از زحمات فراوان و بی دریغ استاد ارجمندم جناب آقای دکتر حمید رضا میمنی که با حوصله و صبر در طی مدت تحصیل وهمچنین در انجام تمام مراحل این پایان نامه نهایت همکاری را با بنده داشته اند تشکر و قدر دانی نمایم . امیدوارم در کمال صحت و سلامت در عرصه علم و دانش موفقیت روز افزون کسب نمایند.

چکیده

عدد احاطه گری جمعی در سال ۱۹۸۰ توسط کوکاینی[۱] معرفی شد و هم اکنون افراد بسیاری روی این مفهوم مشغول به کار هستند . از جمله ریاضیدانان معروفی که می توان نام برد فاوارن[۲] و هنینگ [۳] می باشند . عدد احاطه گری جمعی ، مفهوم بسیار مهمی در علوم کامپیوتر و صنعت دارد . در این پایان نامه در فصل اول به بیان مفهوم عدد احاطه گری جمعی و تعاریف و قضیه های مقدماتی می پردازیم . در فصل دوم عدد احاطه گری جمعی را در ضرب گراف ها به ویژه ضرب دکارتی مورد بررسی قرار می دهیم . در فصل سوم رابطه عدد احاطه گری جمعی را با گراف های پنجه آزاد بررسی می کنیم . در فصل چهارم کران ارائه شده برای عدد زیر تقسیم احاطه گری جمعی را در گراف ها و مکمل آن ها بررسی می کنیم و در فصل پنجم به بررسی عدد احاطه گری بازدارنده جمعی در درخت ها می پردازیم .

کلمات کلیدی : گراف ، احاطه گری ، احاطه گری جمعی ، عدد احاطه گری جمعی ، عدد زیرتقسیم احاطه گری جمعی ، عدداحاطه گری بازدارنده جمعی ، گراف پنجه آزاد.

1- Cockayne
2- Favaron
3- Henning

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست علائم و اختصارات

ماکسیمم عدد در میان مجموعه درجات رئوس گراف G .... $\Delta(G)$

مجموعه رئوس گراف G .... $V(G)$

مجموعه یال های گراف G .... $E(G)$

مکمل گراف G .... $\bar{G}$

همسایگی باز راس v .... $N(v)$

همسایگی بسته راس v .... $N[v]$

درجه راس v .... $deg(v)$

مسیر از مرتبه n .... P_n

دور از مرتبه n .... C_n

گراف کامل از مرتبه n .... K_n

گراف دو بخشی کامل m و n راسی .... $K_{m,n}$

حاصل ضرب کارتزین گراف های G و H .... $G \Box H$

حاصل ضرب تنسوری گراف های G و H .... $G \otimes H$

عدد احاطه گری گراف G .... $\gamma(G)$

عدد احاطه گری جمعی گراف G .... $\gamma_R(G)$

عدد زیرتقسیم احاطه گری جمعی گراف G .... $sd\gamma_t(G)$

عدد احاطه گری بازدارنده جمعی T .... $\gamma_{tr}(T)$

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل به طور خلاصه به تعاریف مربوط به احاطه گری جمعی و قضایایی که در فصلهای بعدی از آنها استفاده می‌شود اشاره‌ای می‌کنیم.

۱–۱ تعاریف

در این بخش به بیان مفهوم احاطه گری جمعی و تعاریف مرتبط با آن می پردازیم.

تعریف ۱–۱–۱– فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف باشد ، مجموعه احاطه گر گراف ، زیر مجموعه‌ی S از رئوس است به طوری که هر راس $x \in V \backslash S$ با یک راس در S مجاور باشد . مجموعه احاطه گر را به اختصار DS [۱] می نامیم . عدد احاطه گری $\gamma(G)$ مینیمم اندازه‌ی یک مجموعه‌ی احاطه گر در G است .

تعریف ۱–۱–۲– مجموعه‌ی احاطه گر جمعی G را یک مجموعه‌ی احاطه گر G در نظر می گیریم به طوری که برای هر $x \in V$ ، x با یک راس در S مجاور باشد . مجموعه احاطه‌گر جمعی را به اختصار TDS [۲] می نامیم.عدد احاطه گری جمعی $\gamma_t(G)$ مینیمم اندازه‌ی یک مجموعه‌ی احاطه گر جمعی در G است .

هر گراف بدون راس منفرد یک TDS دارد ، زیرا کافیست $S=V$ را در نظر بگیریم .

تعریف ۱–۱–۳– بیشترین اندازه از یک مینیمال TDS در G رابا $\Gamma_t(G)$ نشان می دهیم .$\Gamma(G)$ نیز به طور مشابه تعریف می شود .

[۱] مخفف $DominatingSet$

[۲] مخفف $TotalDominatingSet$

تعریف ۱—۱—۴— یک مجموعهTDS مینیمال بااندازه $\Gamma_t(G)$ را یک $\Gamma_t(G)$ — مجموعه می نامیم $\Gamma(G)$. — مجموعه نیز به طور مشابه برای DS تعریف می شود .

تعریف ۱—۱—۵— فرض کنید $v \in V$. همسایگی باز v را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$N(v) = \{u \in V \mid uv \in E\} \tag{۱ − ۱}$$

همسایگی بسته v را به صورت زیر داریم :

$$N[v] = \{v\} \cup N(v) \tag{۲ − ۱}$$

تعریف ۱—۱—۶— فرض کنید $S \subseteq V$ ، همسایگی باز S را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v) \tag{۳ − ۱}$$

همسایگی بسته v را به صورت زیر داریم :

$$N[S] = N(S) \cup S \tag{۴ − ۱}$$

تذکر: فرض کنید $S, T \subseteq V$. گوییم S ، T را احاطه می کند اگر $T \subseteq N[S]$ و S ، T رابه صورت جمعی احاطه می کند اگر $T \subseteq N(S)$.

تعریف ۱—۱—۷— فرض کنید $v \in S$ و $w \in V\backslash S$. راس w را همسایگی خصوصی بیرونی v می نامیم و می گوییم w یک epn [۳] راس v است هر گاه $N(w) \cap S = \{v\}$.

تعریف ۱—۱—۸— فرض کنید $v \in S$ و $w \in S$. راس w را همسایگی خصوصی درونی v می نامیم و می گوییم w یک ipn [۴] راس v است هر گاه $N(w) \cap S = \{v\}$.

تعریف ۱—۱—۹— همسایگی خصوصی S $(S - pn)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$pn(v,S) = \{u \in V \mid N(u) \cap S = \{v\}\} \tag{۱ – ۵}$$

تذکر :

$$epn(v,S) = pn(v,S) \cap V\backslash S \tag{۱ – ٦}$$

$$ipn(v,S) = pn(v,S) \cap S \tag{۱ – ۷}$$

$$pn(v,S) = epn(v,S) \cup ipn(v,S) \tag{۱ – ۸}$$

تعریف ۱—۱—۱۰— فرض کنید $S \subseteq V$. تعداد رئوسی که در S مجاور v هستند را با $d_S(v)$ نشان می دهیم . بیشترین درجه در گراف را ماکسیمم درجه می گوییم و با $\Delta(G)$ نشان می دهیم . کمترین درجه در

[۳] مخفف external private neighbor

[۴] مخفف internal private neighbor

گراف را مینیمم درجه می گوییم و با $\delta(G)$ نشان می دهیم .

تعریف ۱—۱—۱۴— کمر گراف G راطول کوتاهترین دور در گراف در نظر می گیریم و با $g(G)$ نشان می دهیم .

تعریف ۱—۱—۱۵— یک خوشه از G را مجموعه‌ی S در G در نظر می گیریم به طوری که $G[S]$ کامل باشد .

تعریف ۱—۱—۱٦— یال uv از G را یال خوب می نامیم هر گاه هر کدام از $N[u], N[v]$ یک خوشه در $G - uv$ القا کنند .

تعریف ۱—۱—۱۷— گراف $\overline{G}$ را گراف مکمل G درنظر می گیریم هر گاه $V(G)$ رئوس آن باشد و $xy \in E(\overline{G})$ اگر و فقط اگر $xy \in (G)$.

۱—۲ قضایا

در این بخش کران بالا و کران پایین برای عدد احاطه گری جمعی را بررسی می کنیم .

مشاهده ۱—۲—۱—[۱] فرض کنید گراف G را بدون راس منفرد و S یک TDS در گراف G باشد . مجموعه‌ی S یک TDS مینیمال از G است اگر و فقط اگر برای هر $v \in S$

$$epn(v,S) \neq \emptyset \quad \text{یا} \quad pn(v,S) = ipn(v,S) \neq \emptyset \qquad (۱-۹)$$

قضیه ۱—۲—۲—[۲] اگر گراف G بدون راس منفرد باشد ، آنگاه

$$\gamma_t(G) \le n - \Delta(G) + 1 \qquad (1-10)$$

قضیه ۱—۲—۳—[۲] اگر گراف G بدون راس منفرد باشد و $\Delta(G) < n - 1$ ، آنگاه

$$\gamma_t(G) \le n - \Delta(G) \qquad (1-11)$$

نتیجه ای که از دو قضیه قبل بدست می آیداین است که اگر در گراف G ، $\gamma_t(G) = n - \Delta(G) + 1$ ، آنگاه $\Delta(G) \ge n - 1$. از این رو اگر G گراف منتظمی باشد ،آنگاه G گراف کامل است .

قضیه ۱—۲—۴— اگر G همبند باشد ، آنگاه

$$\gamma_t(G) \ge \lceil \frac{n}{\Delta(G)} \rceil \qquad (1-12)$$

اثبات : فرض کنید S یک مجموعه احاطه گر جمعی در G باشد. هر راس در S حداکثر $\Delta(G) - 1$ راس از $V(G)\backslash S$ و حداقل یک راس از S را احاطه می کند . بنابراین $|S|(\Delta(G) - 1) + |S| \ge n$ در نتیجه $\gamma_t(G) \ge \lceil \frac{n}{\Delta(G)} \rceil$. □

در قضیه‌ی فوق اگر $G = K_n$ ، $G = C_{4}n$ یا $G = P_{4}n$ آنگاه $\gamma_t(G) = \lceil \frac{n}{\Delta(G)} \rceil$.

قضیه ۱—۲—۵— اگر G گرافی با قطر ۲ باشد ، آنگاه

$$\gamma_t(G) \le \delta(G) + 1 \qquad (1-13)$$

اثبات : فرض کنید راس x کمترین درجه را در گراف G داشته باشد . از آنجا که قطر G برابر ۲ است بنابراین $N(x)$ یک مجموعه احاطه گر برای G است . حال S را به صورت مقابل در نظر می گیریم $S = N(x) \cup x$ ، S یک مجموعه احاطه گر جمعی برای G است و $|S| = \delta(G) + ۱$ بنابراین $\gamma_t(G) \leq \delta(G) + ۱$.

در قضیه‌ی فوق اگر $\gamma_t(C_۵) = ۳$ و $\delta(C_۵) = ۳$ و قطر $C_۵$ برابر ۲ باشد ، آنگاه $\gamma_t(C_۵) = \delta(C_۵) + ۱$.□

قضیه ۱—۲—۶— اگر G گراف همبند با $g(G) \geq ۵$ (کمر گراف) و $\delta(G) \geq ۲$ باشد ، آنگاه

$$\gamma_t(G) \leq n - \lceil \frac{g(G)}{۲} \rceil + ۱ \qquad (۱ - ۱۴)$$

اثبات : فرض کنید G گرافی همبند با $g(G) \geq ۵$ و C کوتاهترین دور درG باشد گراف G' را گراف حاصل از حذف دور C در G در نظر می گیریم . راس دلخواه $v \in V(G')$ از آنجا که $\delta(G) \geq ۲$ بنابراین v حداقل دو همسایه مانند x و y دارد . فرض کنید $x, y \in C$. اگر $d(x,y) \geq ۳$ آنگاه با جایگزین کردن مسیر از x به y روی C با مسیر x, v, y ، $g(G)$ کاهش می یابد واین تناقض است . اگر $d(x,y) \leq ۲$ آنگاه x, y, v روی $C_۳$ یا $C_۴$ در G قرار دارد واین تناقض با فرض $g(G) \geq ۵$ است .

بنابراین هیچ راس G' ۲ یا بیشتر از ۲ همسایه در C ندارد . از آنجا که $\delta(G) \geq ۲$ ، گراف G' مینیمم درجه با حداقل $\delta(G) - ۱$ دارد که $\delta(G) - ۱ \geq ۱$. بنابراین G' راس تنها ندارد .

حال فرض کنید S' یک γ_t — مجموعه برای C باشد بنابراین $S = S' \cup V(G')$ یک TDS برای G است .

بنابراین $\gamma_t(G) \leq n - \lceil \frac{g(G)}{۲} \rceil + ۱$ (توجه شود که $\gamma_t(G) \leq \lfloor \frac{g(G)}{۲} \rfloor + ۱$) .□

در پایان این فصل به عدد احاطه گری برخی گراف ها اشاره می کنیم . برای مسیر های به طول n عدد احاطه گری جمعی به صورت مقابل است ، $\gamma_t(P_n) = \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor + \lceil \frac{n}{۴} \rceil - \lfloor \frac{n}{۴} \rfloor$ [۳].

در گراف های منتظم عدد احاطه گری یک است و عدد احاطه گری جمعی ۲ می باشد . در گراف ستاره از مرتبه n یعنی S_n عدد احاطه گری جمعی به صورت مقابل است ، $\gamma_t(S_n) = ۲$. در C_n ، عدد احاطه گری جمعی از نصف مرتبه گراف بزرگتر است .