دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

رفتارهای عددی برای معادلات انتگرال- دیفرانسیل تأخیری از نوع ولترا

استاد راهنما

دکتر قدرت عبادی

استاد مشاور

دکتر صداقت شهراد

پژوهشگر

یاسر سلمان زاده

بهمن ۱۳۸۹

تقدیم به روح پاک پدرم

و وجود مقدس مادر فداکارم

که نگذاشت لحظه ای فقدان پدر را احساس کنیم.

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم.

نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

// سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر قدرت عبادی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر صداقت شهمراد که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از کلیه استادهای گرامی دوران تحصیلم، مخصوصاً از آقای دکتر غلامرضا حجتی، دکتر حسین امامعلی‌پور و سایر مسئولین دانشکده علوم ریاضی، دکتر خیری مدیرگروه ریاضی کاربردی، و نیز کارکنان محترم دانشکده علوم ریاضی که در مدت تحصیلات اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

و در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگار مهر و مهربانی، مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدسش را و درود می‌فرستم به ارواح پاک پدرم و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

یاسر سلمان‌زاده

بهمن ۱۳۸۹

نام خانوادگی: سلمان‌زاده نام: یاسر

عنوان پایان‌نامه: رفتارهای عددی برای معادلات انتگرال-دیفرانسیل تأخیری از نوع ولترا

استاد راهنما: دکتر قدرت عبادی

استاد مشاور: دکتر صداقت شهمراد

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ۱۳۸۹ تعداد صفحه: ۸۶

کلیدواژه‌ها: پایداری مجانبی، قاعده‌ی انتگرال‌گیری بول، روش هم‌محلی، تأخیر توزیع شده به صورت پیوسته، تأخیر توزیع شده به صورت گسسته، روش رانگ-کوتای تک‌ضمنی، توابع هموار.

چکیده

این پایان‌نامه، به بحث در مورد رفتارهای عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل تأخیری نوع ولترا که دارای کاربردهای وسیعی در علوم فیزیکی و زیستی است، می‌پردازد. برای این منظور روش جدیدی را در پیش گرفته‌ایم بر این اساس که قسمت دیفرانسیلی این نوع معادلات را با روش رانگ - کوتای تک‌ضمنی مورد مطالعه قرار می‌دهیم و قسمت انتگرالی را با روش هم‌محلی (قاعده‌ی انتگرال گیری بول) تقریب می‌کنیم. پایداری و میزان دقت این نوع روشها مورد بررسی قرار گرفته و در نهایت نتایج عددی برای اثبات مدعا ارائه شده است.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

مقدمه

بسیاری از پدیده‌های جهان ما به گذشته‌ی خود وابسته هستند. مثلاً در بررسی پویایی جمعیت[۱]، نرخ زاد و ولد تابعی از میزان جمعیت در زمانی در گذشته و میزان جمعیت در زمان کنونی است. زیرا که دوره‌ی حاملگی زمانی تأثیرگذار در مقدار این نرخ محسوب می‌شود. با این اوصاف می‌توان گفت جمعیت دارای حافظه است. به عنوان مثالی دیگر در تکثیر سلولی، یک سلول مراحل مختلفی را طی می‌کند تا به مرحله‌ی تقسیم سلولی برسد که در طول آن مراحل ممکن است تغییر شرایط محیطی و مرگ سلولی عارض شود اما اگر زنده بماند در بوجود آمدن سلولهای جدید تأخیر یا دیرکردی رخ داده است.

در سیستمهای با ساختار مکانیکی نیز این حافظه موجود است، در این سیستمها مقدار $x'(t)$ به تابع x ، در مقادیر قبلی t بستگی دارد. در فصل یک این پایان‌نامه چند مثال از نحوه مدلسازی و حل این نوع معادلات ارائه خواهد شد. در فصل دو به نحوه‌ی حل عددی این نوع معادلات و بویژه روش رانگ کوتای تک‌ضمنی می‌پردازیم و در در فصل سه به بحث در مورد رفتارهای عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل تأخیری نوع ولترا که دارای کاربردهای وسیعی در علوم فیزیکی و زیستی است، می‌پردازیم. برای این منظور روش جدیدی را در پیش گرفته‌ایم بر این اساس که قسمت دیفرانسیلی این نوع معادلات را با روش رانگ - کوتای تک‌ضمنی مورد مطالعه قرار می‌دهیم و قسمت انتگرالی را با روش هم‌محلی (قاعده‌ی انتگرال گیری بول) تقریب می‌کنیم. پایداری و میزان دقت این نوع روشها مورد بررسی قرار گرفته و در نهایت نتایج عددی برای اثبات مدعا ارائه خواهد شد و در فصل آخر نیز پیشنهاداتی را برای بهتر شدن نتایج ارائه می‌کنیم. همچنین برنامه‌های کامپیوتری را با استفاده از نرم‌افزار MATLAB تهیه کرده‌ایم.

این پایان‌نامه بر اساس مقاله [۳۹] تدوین گردیده است.

[۱] Population dynamics تعریفی که از این واژه می‌شود به این صورت است که پویایی جمعیت شاخه‌ای از علوم زیستی است که تغییرات کوتاه مدت و بلند مدت در ترکیب جمعیتی، سنی و فرآیندهای محیطی و بیولوژیکی مؤثر بر این تغییرات را مورد مطالعه قرار می‌دهد. به عبارت دیگر پویایی جمعیت به مسئله چگونگی تأثیرپذیری جمعیت‌ها از نرخ زاد و ولد، مرگ و میر، میزان مهاجرت، مهاجرپذیری همچنین کاهش جمعیت و پیر شدن می‌پردازد.

فصل ۱

پیشینه پژوهش و تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل تأخیری

معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} &x'(t) = f(t,x), \quad a \le t \le b \\ &x(\tau) = \xi \end{aligned} \qquad (۱.۱)$$

چون مقدار آن در $t = \tau$ داده شده است آن را مسئله مقدار اولیه می‌نامیم. قبل از این که قضایای وجود ومنحصربفردی را برای این مسئله بیان کنیم ابتدا تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف ۱.۱.۱. تابع $f(t,x)$ نسبت به مؤلفه‌ی دوم بر مجموعه‌ی $D \subset \mathbb{R}^2$ در شرط لیپ شیتز [۱] صدق می‌کند، هرگاه عددی مانند $L > 0$ وجود داشته باشد، بطوریکه:

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le L\,|x_1 - x_2| \qquad (۲.۱)$$

و L را ثابت لیپ شیتز می‌گویند.

قضیه ۲.۱.۱. *فرض کنیم $f(t,x)$ بر مجموعه‌ی $D \subset \mathbb{R}^2$ تعریف شده باشد. اگر ثابتی چون $L > 0$ وجود داشته باشد که به ازای هر $(t,x) \in D$، $|\partial f/\partial x| \le L$، آنگاه f نسبت به مؤلفه‌ی دوم در شرط لیپ شیتز صدق می‌کند.*

برهان. [۳۲]. □

قضیه ۳.۱.۱. *فرض کنیم $D = \{(t,x)|a \le t \le b, -\infty < x < \infty\}$ و $f(t,x)$ بر D پیوسته باشد. هرگاه f نسبت به مؤلفه‌ی دوم بر D در شرط لیپ شیتز صدق کند، آنگاه مسئله مقدار اولیه (۱.۱) دارای جواب یکتای، $x(t)$ به ازای $a \le t \le b$ خواهد بود.*

برهان. [۳۲]. □

بسیاری از مفاهیم و نتایج مربوط به معادلات دیفرانسیل برای معادلات دیفرانسیل تأخیری نیز کاربرد دارد [۱۶]. مثلاً مفهوم مرتبه یک معادله‌ی دیفرانسیل تأخیری با مفهوم مرتبه برای معادله‌ی دیفرانسیل معمولی یکی است.

[۱] Lipschitz condition

تعریف ۴.۱.۱. معادلات دیفرانسیلی که آرگومان تأخیر داشته باشند، به معادلات دیفرانسیل تأخیری موسومند، یعنی معادلاتی که برحسب تابع در زمان t و بر حسب مشتقات پایین‌تر و بر حسب خود تابع در زمانهای پیشین بیان می‌شوند. معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$x'(t) = -2\, x(t - \frac{\pi}{2}) \tag{۳.۱}$$

$$x''(t) = -\, x'(t) - x'(t-1) - 3\sin\, x(t) + \cos t \tag{۴.۱}$$

$$x'(t) = x(t) - x(\frac{t}{2}) + x'(t-1) \tag{۵.۱}$$

$$x'(t) = x(t)\; x(t-1) + t^2\; x(t+2) \tag{۶.۱}$$

در اینجا معادلات (۳.۱) و (۴.۱) از نوع معادلات دیفرانسیل تأخیری ساده می‌باشند، ولی معادلات (۵.۱) و (۶.۱) از این نوع نمی‌باشد. معادله (۵.۱) جزو معادلات دیفرانسیل تأخیری خنثی[۲] است و معادله‌ی (۶.۱) به خاطر وجود جمله‌ی $x(t+2)$ در سمت راست، معادله دیفرانسیل تأخیری نمی‌باشد و ما این نوع معادلات را یک معادله‌ی دیفرانسیل تابعی[۳] می‌نامیم. البته هر معادله‌ی دیفرانسیل تأخیری خود نوعی معادله دیفرانسیل تابعی است. اکنون روش تئوریک ارائه می‌دهیم که برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری به روش حل تحلیلی، بکار گرفته می‌شود. این روش، به نام روش پله‌ها [۴] موسوم است.

مثال ۵.۱.۱. *معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید:*

$$\begin{cases} x'(t) = x(t-1) \\ x(t) = t^2, \qquad (-1 \le t \le 0) \end{cases} \tag{۷.۱}$$

دومین عبارت این مسأله، مقادیر اولیه‌ی مورد نیاز را برای $x(t)$ ارائه می‌دهد. اگر t به بازه‌ی [۰ و ۱] محدود باشد آنگاه $t-1$ در بازه [-۱ و ۰] خواهد بود و بنابراین:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t-1) = (t-1)^2, \qquad (0 \le t \le 1) \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{۸.۱}$$

[۲] Neutral Delay Differential Equations
[۳] Functional Differential Eguations
[۴] The methods of steps

جواب این معادله به راحتی با انتگرال‌گیری و فراهم نمودن یک مقدار ثابت مناسب انتگرال‌گیری به‌دست می‌آید:

$$x(t) = \frac{1}{3}(t-1)^3 + \frac{1}{3}, \quad (0 \le t \le 1).$$

اگر جواب در بازه‌ی بعدی [۲ و ۱] پیوسته باشد، گام دیگری مانند اولین گام می‌تواند اختیار شود. بنابراین به ازای t های واقع در [۲ و ۱] داریم:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t-1) = \frac{1}{3}(t-2)^3 + \frac{1}{3}, & (1 \le t \le 2) \\ x(1) = \frac{1}{3} \end{cases} \tag{۹.۱}$$

جواب این معادله عبارت است از:

$$x(t) = \frac{1}{12}(t-2)^4 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{12}$$

جواب می‌تواند با محاسبات مشابه به طور نامتناهی به راست ادامه یابد.

مثال ۶.۱.۱. *$x_1(t) = sin\left(\frac{\pi}{2}(t+\frac{1}{2})\right)$ و $x_2(t) = cos\left(\frac{\pi}{2}(t+\frac{1}{2})\right)$ دو جواب متمایز از معادله‌ی*

$$x'(t) = -\frac{\pi}{2}x(t-1)$$

که در $t = 0$ دارای مقدار برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ هستند. لذا مشاهده می‌شود که شرط اولیه در $t = 0$ برای داشتن جواب منحصر بفرد یک معادله‌ی دیفرانسیل تأخیری کافی نخواهد بود.

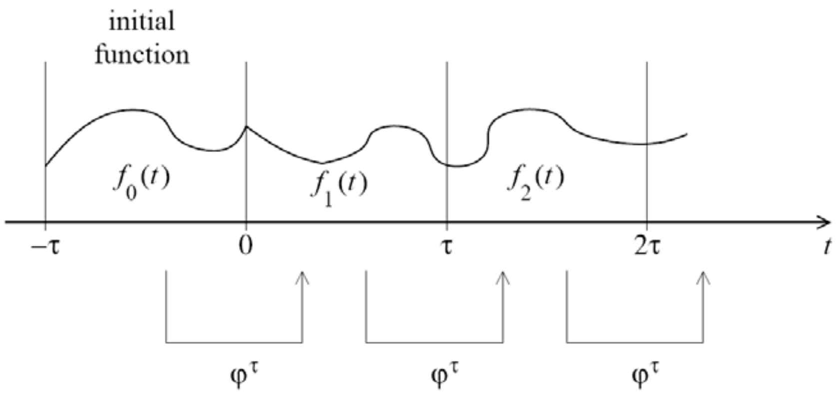
۲.۱ شکل کلی معادله دیفرانسیل تأخیری با یک جمله‌ی تأخیری

شکل کلی معادله‌ی دیفرانسیل تأخیری با یک جمله‌ی تأخیری به صورت

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) + bx(t-\tau), & t > 0 \\ x(t) &= \phi(t), & -\tau \le t \le 0 \end{aligned} \tag{۱۰.۱}$$

است که در آن تابع ϕ داده شده است و به آن تابع اولیه [5] گویند. در واقع تابع x در زمانهای بعد از τ مجهول است که هدف ما پیدا کردن تابع پیوسته‌ای مانند $x(t)$ است که در معادلات (۱۰.۱) صدق کند. با توجه به نمودار (۱.۱)، $x'(t)$ بایستی به صورت عبارت سمت چپ بیان شود.

[5] Initial function



شکل ۱.۱: در معادله‌ی $x'(t) = H(x(t-\tau))$ اگر مقدار $x(t) = f_0(t)$ را در $t-\tau$ بدانیم، با استفاده از صورت معادله‌ی دیفرانسیل ارائه شده قادر به محاسبه‌ی $x'(t)$ خواهیم بود. برای انتگرال‌گیری معادله‌ی دیفرانسیل با شروع از $t=0$ ، به مقدار $x(t)$ با شروع در $t=\tau$ ، نیاز خواهیم داشت. بنابراین مقادیر $x(t)$ بر روی بازه‌ی $[-\tau, 0]$ باید به عنوان مقادیر اولیه برای ما فراهم باشد و این روند به همین ترتیب ادامه می‌یابد.

۳.۱ کاربرد معادلات دیفرانسیل تأخیری

مثال ۱.۳.۱. یک بشکه شامل B گالن آب نمک را در نظر بگیرید. در قسمت بالای بشکه شیری متصل است که با نرخ q گالن بر دقیقه آب وارد بشکه می‌کند و آب نمک درون بشکه بطور مداوم بهم زده می‌شود در قسمت پایین بشکه شیری متصل است که با نرخ q گالن بر دقیقه از آن آب نمک خارج می‌شود. فرض کنید $x(t)$ مقدار نمک موجود بر حسب پوند از آب نمک درون بشکه در زمان t باشد. اگر فرض کنیم هم‌زنی بطور پیوسته آب نمک درون بشکه را بهم بزنند، آنگاه آب نمک باقیمانده در بشکه شامل $\frac{x(t)}{B}$ از نمک در گالن خواهد بود و بنابراین معادله‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$x'(t) = -q\,\frac{x(t)}{B}$$

اما عملاً امکان ندارد که عمل بهم‌زدن آب نمک درون بشکه بطور آنی صورت بگیرد بنابراین تمرکز آب نمک باقیمانده در بشکه در زمان t برابر خواهد بود با میانگین تمرکز در بعضی لحظه‌های نزدیک قبلی مانند $t-r$ که r ثابت مثبت است که در این صورت معادله‌ی دیفرانسیل برای x یک معادله‌ی دیفرانسیل تأخیری خواهد بود، یعنی

$$x'(t) = -q\,\frac{x(t-r)}{B} \qquad (۱۱.۱)$$

یا اگر قرار دهیم $c = \frac{q}{B}$، $x'(t) = -cx(t-r)$ که در آن r را تأخیر یا زمان درنگ یا کندی گویند [۱۶]. حال فرض کنید تاریخچه گذشته آب نمک در بشکه معلوم باشد و با ϕ نمایش می‌دهیم. بدون توجه به اینکه ϕ در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند یا نه، فرض کنیم $\phi(t) = \phi_0$ که ϕ_0 ثابت مثبت می‌باشد. به عبارت دیگر فرض می‌کنیم که بشکه شامل ϕ_0 پوند نمک مخلوط شده در B گالن آب نمک تا زمان t_0 باشد. آنگاه در زمان t_0 شیر بالایی را باز می‌کنیم تا آب تازه از بالا وارد آب نمک شود و شیر پایین را نیز باز می‌کنیم که هر کدام با نرخ q گالن در دقیقه آب وارد و آب نمک خارج می‌کند. با تابع اولیه ثابت معادله دیفرانسیل تأخیری در بازه‌ی $[t_0, t_0 + r]$ به معادله‌ی دیفرانسیل معمولی با مقدار اولیه داده شده تبدیل می‌شود که به راحتی قابل حل است

$$\begin{aligned} &x'(t) = -c\phi_0, \quad t_0 \le t \le t_0 + r \\ &x(t_0) = \phi_0, \end{aligned} \tag{۱۲.۱}$$

جواب این معادله به صورت

$$x(t) = \phi_0 - c\phi_0(t - t_0), \quad t_0 \le t \le t_0 + r \tag{۱۳.۱}$$

است. اکنون که x از t_0 تا $t_0 + r$ معلوم شد، بازه‌ی $[t_0 + r, t_0 + 2r]$ را در نظر می‌گیریم. معادله‌ی دیفرانسیل تأخیری به مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned} &x'(t) = -c\phi_0 - c^2\phi_0(t - r - t_0), \quad t_0 + r \le t \le t_0 + 2r, \\ &x(t_0) = \phi_0 - cr\phi_0. \end{aligned} \tag{۱۴.۱}$$

این معادله نیز به سادگی حل می‌شود و با به دست آوردن مقدار x در $t_0 + 2r$، بازه‌ی $[t_0 + 2r, t_0 + 3r]$ را اختیار می‌کنیم. این فرایند را تا جایی که مایل باشیم، می‌توانیم ادامه دهیم و این روش را روش پله‌ها نامند. اما ملاحظه می‌کنیم که حجم محاسبات به سرعت بالا می‌رود و محاسبه اکثر خواص اساسی جواب، مشکل می‌شود. مثلاً در این مثال، $x(t)$ نمایش دهنده‌ی مقدار نمک موجود در آب نمک می‌باشد و همیشه انتظار داریم که به ازای هر t، $x(t) \ge 0$ باشد.

مثال ۲.۳.۱. معادله‌ی دیفرانسیل تأخیری

$$\begin{aligned} &x'(t) = -c\,x(t-1)[1 + x(t)], \quad t > 0, \\ &x(t) = \phi(t), \quad -1 \le t \le 0. \end{aligned} \tag{۱۵.۱}$$

را در نظر بگیرید این معادله را نیز به روش پله ها حل می‌کنیم.

بازه‌ی $[0,1]$ را در نظر بگیرید. به همان روش مثال قبل معادله‌ی تأخیری مذکور به مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر بدل می‌شود:

$$\begin{aligned} &x'(t) = -c\,\phi(t-1) - c\,\phi(t-1)x(t), \quad 0 \le t \le 1, \\ &x(0) = \phi(0), \end{aligned} \tag{۱۶.۱}$$

بنابراین

$$\frac{d}{dt}\left[x(t)e^{\int_0^t c\phi(s-1)ds}\right] = -c\,\phi(t-1)e^{\int_0^t c\phi(s-1)ds}.$$

با انتگرال گیری از رابطه‌ی قبل روی بازه $[0,r]$ داریم:

$$x(r)e^{\int_0^r c\phi(s-1)ds} - x(0) = \left[-e^{\int_0^t c\phi(s-1)ds}\right]_0^r$$

$$x(r)e^{\int_0^r c\phi(s-1)ds} - \phi(0) = -e^{\int_0^r c\phi(s-1)ds} + 1, \quad \forall r \ge 0,$$

$$\Longrightarrow x(t) = (1+\phi(0))e^{\int_0^t c\phi(s-1)ds} - 1, \quad 0 \le t \le 1.$$

اکنون که x روی بازه $[0,1]$ معلوم شد. می‌توان به همان ترتیب بازه‌ی $[1,2]$ را در نظر گرفت و روند را تکرار کرد. البته در تمام محاسبات این مثال فرض بر این است که ϕ تابعی پیوسته است. در بخشهای بعدی تعریف و معادلات دیفرانسیل تأخیری را به صورت عملگر بیان می‌کنیم و عمده هدف ما معادلات دیفرانسیل تأخیری به صورت خطی است.

تعریف ۳.۳.۱. یک معادله‌ی خطی روی $J=(a,b)$، معادله به صورت

$$L(t,x) = h(t) \tag{۱۷.۱}$$

است که تابع h معلوم و $L(t,.)$ یک عملگر خطی است. مثلاً معادله‌ی

$$L(t,x) = x'(t) - ax(t) - bx(t-r) = 0$$

یک معادله‌ی دیفرانسیل تأخیری خطی است اما معادله‌ی

$$L(t,x) = x'(t) + cx(t-1)[1+x(t)]$$

یک معادله دیفرانسیل تأخیری غیرخطی است. هر معادله به صورت (۱۷.۱) که در آن $h(t)=0$ باشد را معادله‌ی خطی همگن گویند.

شکل کلی معادلات دیفرانسیل تأخیری با m جمله‌ی تأخیری به‌صورت

$$\begin{aligned} &x'(t) = f(t, x(g_1(t)), x(g_2(t)), \cdots, x(g_m(t))), && t_0 \le t < \beta, \\ &x(t) = \phi(t), && \gamma \le t \le t_0. \end{aligned} \tag{۱۸.۱}$$

است که در آن $\gamma \le g_j(t) \le t$ ، $j = 1, 2, \cdots, m$.

برای هر $t \in [t_0, \beta]$ تابع $x_t : [\gamma, t] \longrightarrow D$ و F را به‌صورت

$$F(t, x_t) = f(t, x(g_1(t)), x(g_2(t)), \cdots, x(g_m(t)))$$

تعریف می‌کنیم. بنابراین معادله‌ی (۱۷.۱) به‌صورت

$$\begin{aligned} &x'(t) = F(t, x_t), && t_0 \le t < \beta, \\ &x(t) = \phi(t), && \gamma \le t \le t_0. \end{aligned} \tag{۱۹.۱}$$

نوشته می‌شود که در آن x یک جواب معادله (۱۹.۱) است اگر و تنها اگر

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), & \gamma \le t < t_0, \\ \phi(t_0) + \int_0^t F(s, x_s) ds, & t_0 \le t \le \gamma. \end{cases} \tag{۲۰.۱}$$

تعریف ۴.۳.۱. تابع $f : J \times D^m \longrightarrow \mathbb{R}$ در شرط لیپ شیتز با ثابت لیپ‌شیتز k روی مجموعه‌ی $G \subset J \times D^m$ صدق می‌کند، هرگاه

$$\|f(t, x_1, x_2, \cdots, x_m) - f(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_m)\| \le k \max_{1 \le j \le m} |x_j - \tilde{x}_j|$$

که $(t, x_1, x_2, \cdots, x_m)$ و $(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_m)$ در G هستند.

تعریف ۵.۳.۱. تابع $f : J \times D^m \longrightarrow \mathbb{R}$ در شرط لیپ‌شیتز موضعی صدق می‌کند، هرگاه برای هر نقطه $(t, x_1, x_2, \cdots, x_m) \in J \times D^m$ اعداد حقیقی $a > 0$ و $b > 0$ یافت شوند بطوریکه:

$$A_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_j\| \le b\}, \quad j = 1, 2, \cdots, m \tag{۲۱.۱}$$

زیر مجموعه‌ای از D باشد و f روی $([t_1 - a, t_1 + a] \bigcap J) \times A_1 \times \cdots \times A_m$ در شرط لیپ شیتز صدق کند.

لم ۶.۳.۱. *(Reid's lemma) فرض کنید ثابت c و همچنین تابع پیوسته و نامنفی k روی بازه J داده شده باشند و فرض کنید $t_0 \in J$، اگر $V : J \longrightarrow [0, \infty[$ پیوسته باشد و داشته باشیم*

$$V(t) \leq c + \left| \int_{t_o}^{t} k(s)V(s)ds \right|, \quad \forall t \in J. \tag{۲۲.۱}$$

آنگاه

$$V(t) \leq ce^{\left|\int_{t_o}^{t} k(s)ds\right|}, \quad \forall t \in J. \tag{۲۳.۱}$$

برهان. بنا به فرض داریم $\forall t \in J, \quad V(t) \leq c + \mid \int_{t_0}^{t} k(s)V(s)ds \mid$ در نتیجه

- اگر $t \geq t_0$،

$$V(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} k(s)V(s)ds$$

آنگاه اگر طرفین نامساوی را در $k(t)$ ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$k(t)V(t) - k(t)\left[c + \int_{t_0}^{t} k(s)V(s)ds\right] \leq 0$$

قرار می‌دهیم $\phi(t) = c + \int_{t_0}^{t} k(s)V(s)ds$ بنابراین

$$\phi'(t) - k(t)\phi(t) \leq 0.$$

با ضرب طرفین در عامل انتگرال ساز $e^{-\int_{t_0}^{t} k(s)ds}$ داریم

$$\frac{d}{dt}\left[\phi(t)e^{-\int_{t_0}^{t} k(s)ds}\right] \leq 0.$$

از طرفین نامساوی اخیر از t_0 تا t انتگرال می‌گیریم

$$\phi(t)e^{-\int_{t_0}^{t} k(s)ds} - \phi(t_0) \leq 0 \Rightarrow \phi(t)e^{-\int_{t_0}^{t} k(s)ds} - c \leq 0$$

$$\Longrightarrow \phi(t) \leq ce^{\int_{t_0}^{t} k(s)ds}$$

اما از طرفی داریم $V(t) \leq \phi(t)$، پس

$$V(t) \leq ce^{\int_{t_0}^{t} k(s)ds}.$$