دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته

ریاضی محض، گرایش آنالیز تابعی

عنوان

اغتشاش عملگرهاي منظم فردهلم بروي C^*- مدول هاي هيلبرت و قضيه تجزيه برد داگلاس

استاد راهنما

دکتر اسدالله نیکنام

استادان مشاور

دکتر کامران شریفي و دکتر شیرین حجازیان

پژوهشگر

مرضیه فروغ

۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: فروغ نام: مرضیه

عنوان: اغتشاش عملگرهاي منظم فردهلم بروي C^* - مدول هاي هيلبرت و قضيه تجزيه برد داگلاس

استاد راهنما: دکتر اسدالله نیکنام

استادان مشاور: دكتر كامران شريفي و دكتر شيرين حجازيان

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز تابعی

دانشگاه: فردوسی مشهد دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۶۸

واژگان کلیدی: اغتشاش، C^* - مدول های هیلبرت، عملگرهای منظم فردهلم، قضیه تجزیه برد داگلاس، متر رخنه

چکیده

در این رساله ابتدا این مساله را بررسی می کنیم که تحت چه شرایطی جمع و ترکیب دو عملگر منظم بروی یک C^* - مدول هیلبرت منظم می باشند. سپس به مطالعه اغتشاش عملگرهای (خودالحاق) منظم فردهلم بروی C^* - مدول های هیلبرت می پردازیم. فرض کنیم t یک عملگر خودالحاق منظم فردهلم و A یک عملگر خودالحاق کراندار باشد. اگر یکی از شرایط روبرو برقرار باشد: (i) $\|A\|$ به قدر کافی کوچک باشد، (ii) A - عملگری فشرده باشد (iii) A - عملگری t - فشرده باشد، آن گاه عملگر خودالحاق منظم $t+A$ فردهلم می باشد. سپس حالتی را بررسی می کنیم که اغتشاش عملگرهای خودالحاق منظم فردهلم توسط عملگرهای خودالحاق منظم صورت گیرد. همچنین برخی از نتایج را بدون شرط خودالحاق بودن به دست می آوریم. در ادامه خواص توپولوژیک مجموعه عملگرهای (خودالحاق) منظم فردهلم در فضای عملگرهای (خودالحاق) منظم نسبت به متر رخنه بررسي مي كنيم. سپس قضیه تجزیه برد داگلاس برای عملگرهای بسته و به طور چگال تعریف شده بروی فضاهای هیلبرت را به حالت عملگرهای منظم بروی یک C^* - مدول هیلبرت و همچنین به حالت

عملگرهای بسته و به طور چگال تعریف شده بروی یک فضای باناخ تعمیم می دهد. در انتها برخی از روابط شمول و تساوی های عملگری شامل معکوس مور-پنرز یک عملگر منظم را بررسی می کنیم.

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر اسدالله نیکنام، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکترکامران شریفی و سرکار خانم شیرین حجازیان که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

مرضیه فروغ
۱۳۹۱

فهرست مطالب

پيش گفتار

C^*- مدول هاي هيلبرت بروي C^*- جبرهاي جابجايي در سال ۱۹۵۳ توسط کاپلانسکي [۱] [۱۸] معرفي شدند. سپس پاشکه [۲] [۳۴] نظريه C^*- مدول هاي هيلبرت را بروي C^*- جبرهاي دلخواه بررسي کرد. تقريباً به طور همزمان ريفل [۳] [۳۶] به طور مستقل اين نظريه را در مطالعه نمايش هاي القا شده از C^*- جبرها گسترش داد. سپس کاسپاروف [۱۹، ۲۰] با استفاده از مفهوم C^*- مدول هاي هيلبرت نتايج بسيار عميقي در $KK-$ نظريه به دست آورد. اکنون C^*- مدول هاي هيلبرت يك ابزار استاندارد در نظريه عملگرها محسوب مي شود.

در بسياري از مسائلي که C^*- مدول هاي هيلبرت ظاهر مي شوند شخص احتياج به مطالعه عملگرهاي بي کران الحاق پذير دارد که اکنون به عنوان عملگرهاي منظم شناخته مي شوند. اين عملگرها ابتدا توسط باج-جالگ [۴] [۴] در مطالعه دو-مدول هاي کاسپاروف معرفي شدند. سپس ورونويچ [۵] [۴۳] مفهوم عملگرهاي منظم را در بررسي گروه هاي کوانتوم غير فشرده به کار برد. همچنين کاسترمن [۶] [۲۱] حسابان تابعي را براي اين عملگرها مطالعه کرد. لنس در کتابش [۷] [۲۷] عملگرهاي منظم بروي C^*- مدول هاي هيلبرت را بررسي کرده است.

رده ي مهمي از عملگرها بروي C^*- مدول هاي هيلبرت، عملگرهاي فردهلم مي باشند که در

---

[۱] Kaplansky
[۲] Paschke
[۳] Rieffel
[۴] Baaj-Julg
[۵] Woronowicz
[۶] Kusterman
[۷] Lance

تعميم بسياري از نتايج مهم $k-$ نظريه فضاهاي توپولوژيك به حالت ناجابجايي ظاهر مي شوند.
مينگو [۸] [۲۹] عملگرهاي الحاق پذير فردهلم بروي C^*- مدول هاي هيلبرت استاندارد را براي تعميم ناجابجايي قضيه آتيا يانيش [۹] [۱] بررسي كرد. همچنين فمنكو و مچنكو [۱۰] [۲۸] اين عملگرها را براي گسترش فرمول آتيا-سينگر [۱۱] [۳] براي عملگرهاي هذلولوي بروي C^*- جبرها مطالعه كرده اند. اكسل [۱۲] [۹] در مطالعه هم ارزي مورتيا C^*- جبرها نظريه عملگرهاي فردهلم الحاق پذير كراندار را به كار برده است. يوخيم در [۱۳] [۱۰] عملگرهاي منظم فردهلم را براي تعميم ناجابجايي قضيه آتيا-سينگر [۲] و قضيه آتيا-يانيش معرفي و مطالعه كرده است. وال در [۱۴][۳۹] مفهوم شار طيفي را براي مسيرهايي از عملگرهاي خودالحاق منظم فردهلم بررسي كرده است. او همچنين در [۴۰، ۴۱] اين مفهوم را براي بررسي انديس عملگرهاي هذلولوي بروي C^*- جبرها به كار برده است. و ما در اين رساله اغتشاش عملگرهاي منظم فردهلم بروي فضاهاي هيلبرت را براي عملگرهاي (خودالحاق) منظم بروي C^*- مدول هاي هيلبرت بررسي مي كنيم.

اين رساله از پنج فصل تشكيل شده است. در فصل صفر مفاهيم و قضاياي مورد نياز در C^*- مدول هاي هيلبرت، عملگرهاي الحاق پذير كراندار و عملگرهاي منظم را بيان مي كنيم.

در فصل اول بررسي مي كنيم كه تحت چه شرايطي جمع و تركيب دو عملگر منظم بروي يك C^*- مدول هيلبرت منظم است. بدين منظور ابتدا احكام زير را نشان مي دهيم.

(i) فرض كنيم t و s عملگرهاي منظم بروي C^*- مدول هيلبرت E باشند به قسمي كه $D(t) \subseteq D(s)$. آن گاه نمودار عملگر $t+s$ در $E \oplus E$ متمم پذير متعامد است اگر عملگر $t+s$ بسته باشد.

(ii) فرض كنيم s و t عملگرهاي منظم بروي C^*- مدول هيلبرت E باشند به قسمي كه $D(t) \subseteq$

[۸] Mingo
[۹] Atiyah-Janich
[۱۰] Mishchenko.Fomenko
[۱۱] Atiyah-Singer
[۱۲] Exel
[۱۳] Joachim
[۱۴] Wahl

$D(s)$. آن گاه نمودار عملگر ts در $E \oplus E$ متمم پذیر متعامد است اگر عملگر ts بسته باشد.

توجه کنید که براي بررسي بسته بودن جمع دو عملگر منظم نتايج و قضاياي مربوط به بسته بودن جمع دو عملگر بسته به طور چگال تعريف شده بروي يك فضاي باناخ را مي توان به كار برد. با توجه به (i) و (ii) و به كاربردن محك ورونويچ براي منظم بودن يك عملگر بسته به طور چگال تعريف شده با الحاق به طور چگال تعريف شده بروي يك C^*- مدول هيلبرت ([۲۷، ۴۳]) شرايطي براي منظم بودن جمع و تركيب دو عملگر منظم ارائه مي دهيم.

در فصل دوم اغتشاش عملگرهاي (خودالحاق) منظم فردهلم بروي C^*- مدول هاي هيلبرت را بررسي مي كنيم. نظريه اغتشاش عملگرهاي بي كران فردهلم بروي فضاهاي هيلبرت و فضاهاي باناخ به طور مفصل در كتاب هاي [۱۷، ۲۲، ۲۳] مطالعه شده است. اما توجه كنيد كه ايده ها و تكنيك هاي به كار گرفته شده در اين حالت بر مبناي بعد متناهي فضاي هسته و فضاي هم هسته عملگرهاي فردهلم بروي فضاهاي هيلبرت مي باشد و چون اين واقعيت براي عملگرهاي (خودالحاق) منظم فردهلم برقرار نيست بايستي با روشي كاملاً متفاوت اغتشاش عملگرهاي (خودالحاق) منظم فردهلم را بررسي كرد. ايده اساسي ما در اين مسأله به كاربردن مفهوم مبدل كيلي يك عملگر خودالحاق منظم بروي يك C^*- مدول هيلبرت است. اگر مبدل كيلي عملگرمنظم t را با نماد C_t نشان دهيم ابتدا ثابت مي كنيم كه عملگر خودالحاق منظم t فردهلم است اگر و تنها اگر عملگر خودالحاق كراندار $C_t + ۱$ فردهلم باشد. پس رابطه اي ميان C_t و C_{t+A} به دست مي آوريم كه A يك عملگر خودالحاق كراندار است. اين دو نتيجه ما را قادر مي سازد كه بسياري از قضاياي مهم و اساسي در پايداري خاصيت فردهلم بودن عملگرهاي بسته و به طور چگال تعريف شده بروي فضاهاي هيلبرت (باناخ) را براي عملگرهاي خودالحاق منظم بروي C^*- مدول هاي هيلبرت به دست آوريم. فرض كنيم t يك عملگر خودالحاق منظم فردهلم و A يك عملگر خودالحاق كراندار بروي يك C^*- مدول هيلبرت باشند. اگر $\|A\|$ به اندازه كافي كوچك باشد، يا A فشرده باشد يا A عملگري $t-$ فشرده باشد آن گاه عملگر خودالحاق منظم $t + A$ فردهلم است. سپس برخي از

این نتایج را بدون شرط خودالحاق بودن عملگرها به دست مي آوریم. سپس شرايطي را مطالعه مي کنیم که عملگر $s+t$ خودالحاق منظم فردهلم باشد اگر s يك عملگر منظم خودالحاق باشد.

هدف اصلي ما در فصل سوم مطالعه خواص توپولوژيك مجموعه تمام عملگرهاي (خودالحاق) منظم فردهلم نسبت به متر رخنه می باشد. نشان می دهیم که مجموعه تمام عملگرهای منظم فردهلم در فضای عملگرهای منظم نسبت به متر رخنه باز است. بنابراین اگر عملگر منظم t به قدر کافی نسبت به متر رخنه به یک عملگر منظم فردهلم نزدیک باشد آن گاه عملگر t نیز فردهلم است. در واقع می توان واقعیت فوق را یک نتیجه در بررسی اغتشاش عملگرهای منظم فردهلم در نظر گرفت. همچنین در این فصل با استفاده از حساب تابعی یک شرط لازم و کافی برای همگرا بودن یک دنباله از عملگرهای خودالحاق منظم نسبت به متر رخنه به دست می آوریم. سپس با استدلالی مشابه، یک ارتباط میان همگرایی یک دنباله از عملگرهای خودالحاق منظم در دو متر ریس و متر رخنه ارائه می دهیم.

در فصل چهارم ابتدا با به کاربردن برخی از نتایج فصل اول قضیه تجزیه برد داگلاس برای عملگرهای بسته به طور چگال تعریف شده بروی یک فضای هیلبرت را به حالت عملگرهای منظم بروی C^*- مدول های هیلبرت گسترش می دهیم. یادآوری می کنیم که اگر t و s عملگرهای بسته و به طور چگال تعریف شده بروی فضای هیلبرت H باشد آن گاه قضیه تجزیه برد داگلاس [۱۵] [۷] بیان می کند که عبارت های زیر برقرارند:

(i) اگر $ss^* < tt^*$، آن گاه عملگر انقباضی V بروی H وجود دارد به قسمی که $s \subseteq tV$.

(ii) اگر $ran(s) \subseteq ran(t)$ آن گاه عملگر به طور چگال تعریف شده C بروی H وجود دارد به قسمی که $t = sC$ و عدد $M > ۰$ وجود دارد که $\|Cx\|^۲ \leq M\{\|x\|^۲ + \|tx\|^۲\}$ به ازای هر $x \in D(C)$. همچنین اگر عملگر t کراندار باشد آن گاه عملگر C کراندار است و اگر عملگر s کراندار باشد آن گاه عملگر C بسته است.

[۱۵] Douglas

ایده اساسی در به دست آوردن تعمیم قضیه فوق برای عملگرهای منظم بروی C^*- مدول های هیلبرت به کاربردن مفهوم معکوس مور-پنرز عملگرهای منظم می باشد. بالاخره نشان می دهیم که با استفاده از تکنیک ها و ایده های اساسی در تعمیم قضیه فوق می توان قضیه تجزیه برد داگلاس را برای عملگرهای بسته و به طور چگال تعریف شده بروی فضاهای باناخ به دست آورد.

در فصل پنجم برخی از روابط شمول و تساوی های عملگری شامل معکوس مور-پنرز یک عملگر منظم بروی یک C^*- مدول هیلبرت را مطالعه می کنیم. برای عملگر منظم t بروی یک C^*- مدول هیلبرت شرایطی را ارائه می دهیم که تساوی های $t^\dagger = (t^*t)^\dagger t^* = t^*(tt^*)^\dagger$ برقرار باشند. سپس یک شرط لازم و کافی برای فشرده بودن معکوس مور-پنرز یک عملگر منظم ارائه می دهیم.

در نگاه كلي، فصل هاي اول تا چهارم دربرگیرنده مفاهیم و نتایج كاملاً جدیدي هستند که از آنها چهار مقاله با عناوین

- The perturbations of self-adjoint regular Fredholm operators acting on Hilbert C^*- modules,
- Douglas range factorization theorem for regular operators on Hilbert C^*- modules,
- Majorization, range inclusion and factorization for closed densely defined operators,
- Meore-Penrose inverse of Gram operators in Hilbert C^*- modules.

استخراج شده است. پایان نامه در انتها با فهرستي از منابع و واژه نامه به اتمام خواهد رسید.

C^*- مدول هاي هيلبرت

در اين بخش به بيان مفاهيم و قضاياى مهم و پايه اي مى پردازيم كه در اين پايان نامه از آنها استفاده خواهيم كرد. مقالات و كتاب هاى [۱۱، ۱۲، ۲۷، ۴۲] به عنوان مراجع استاندارد مورد استفاده قرار مى گيرند.

۱.۰ مدول هاى هيلبرت

يک پيش C^*- مدول هيلبرت (راست) روى يک C^*- جبر A يک $A-$ مدول E است كه به يک نگاشت $A-$ مقدار $\langle\cdot,\cdot\rangle : E\times E \longrightarrow A$ با خواص زير مجهز است:

(i) براى هر $x,y,z\in E$ و $\alpha\in \mathbb{C}$، $\langle x,\alpha y+z\rangle=\alpha\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$

(ii) براى هر $x,y\in E$ و $a\in A$، $\langle x,ya\rangle=\langle x,y\rangle a$

(iii) براى هر $x,y\in E$، $\langle x,y\rangle^*=\langle y,x\rangle$

(iv) براى هر $x\in E$، $\langle x,x\rangle\geq 0$ و اگر $\langle x,x\rangle=0$ آن گاه $x=0$.

نگاشت $\langle .,.\rangle$ ضرب داخلى $A-$ مقدار ناميده مى شود. يک پيش- $A-$ مدول هيلبرت، هيلبرت ناميده مى شود اگر نسبت به نرم $\|.\|=\|\langle .,.\rangle\|^{\frac{1}{2}}$ كامل باشد.

مثال ۱.۱.۰. اگر E و F دو C^*- مدول هيلبرت [۱] بروى C^*- جبر A باشند آن گاه مجموعه تمام زوج هاى مرتب از E و F با ضرب داخلى

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle := \langle x_1,x_2\rangle+\langle y_1,y_2\rangle$$

[۱] Hilbert C^*- module

یک $A-$ مدول هیلبرت است که آن را با $E \oplus F$ نشان می دهیم.

مثال ۲.۱.۰. اگر A یک C^*- جبر باشد آن گاه A با ضرب داخلی

$$\langle a, b\rangle := a^*b \quad (a, b \in A)$$

یک C^*- مدول هیلبرت بروی A است.

مثال ۳.۱.۰. فرض کنیم A یک C^*- جبر باشد و H_A مجموعه همه عناصری مانند $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ در $\prod_{k=1}^{\infty} A$ باشد که $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^* x_k$ در توپولوژی نرم C^*- جبر A همگرا باشد. تعریف می کنیم

$$(x_k) + (y_k) := (x_k + y_k)$$

$$(x_k) \cdot a := (x_k a)$$

$$\langle (x_k), (y_k)\rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k^* y_k$$

به ازای هر $(x_k), (y_k) \in H_A$ و $a \in A$. در این صورت H_A تحت این اعمال با نرم

$$\|(x_k)\| = \sqrt{\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k^* x_k\|}$$

یک $A-$ مدول هیلبرت است که آن را C^*- مدول استاندارد روی C^*- جبر A می نامیم. [۴۲]

تعریف ۴.۱.۰. فرض کنیم E یک C^*- مدول هیلبرت و F یک زیر مدول بسته از E باشد. دراین صورت

$$F^{\perp} = \{y \in E : \langle x, y\rangle = 0,\ x \in F\}$$

متمم متعامد F نامیده می شود.

زیر مدول F از E متمم پذیر متعامد [۲] نامیده می شود هرگاه $E = F^{\perp} \oplus F$. توجه کنید که یک زیر مدول بسته در یک C^*- مدول هیلبرت لزوماً متمم پذیر متعامد نیست.

مثال ۵.۱.۰. قرار دهید $A = C([0, 1])$ و $E = A$ و $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$. در این صورت $E \neq F \oplus F^{\perp}$ یعنی زیر مدول بسته F متمم پذیر متعامد نیست.

[۲] orthogonally complemented

۲.۰ عملگرهای الحاق پذیر کراندار

تعریف ۱.۲.۰. فرض کنیم E و F دو C^*- مدول هیلبرت بروی C^*- جبر A باشند. یک عملگر $A-$ خطی $T : E \longrightarrow F$ الحاق پذیر [۳] نامیده می شود اگر عملگر $A-$ خطی $T^* : F \longrightarrow E$ موجود باشد که تساوی

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

به ازای هر $x \in E$ و $y \in F$ برقرار باشد. دراین صورت عملگر T^* را الحاق [۴] T می نامیم. بنا به لم ۱۵.۲.۳ [۴۲] عملگر T کراندار می باشد. مجموعه تمام عملگرهای الحاق پذیر کراندار از E به توی F را با نماد $L(E,F)$ نشان می دهیم و اگر $E = F$ آن گاه فضاي $L(E,E)$ را با $L(E)$ نمایش مي دهیم.

قضیه ۲.۲.۰. [۲۷] فرض کنیم E یک C^*- مدول هیلبرت بروی C^*- جبر A باشد. آن گاه $L(E)$ با نرم عملگری $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq ۱\}$ یک C^*- جبر است.

توجه کنید در حالت کلی هر عملگر $A-$ خطی کراندار بروی یک C^*- مدول هیلبرت الحاق پذیر نیست.

مثال ۳.۲.۰. فرض کنیم $F = A = C([۰,۱])$ و $E = \{a \in A; f(۰) = ۰\}$ و عملگر $i : E \longrightarrow F$ نگاشت مشمول باشد. اگر i^* نگاشت الحاق و ۱ عضو همانی A باشد آن گاه برای هر $x \in E$،

$$\langle x, i^*(۱)\rangle = \langle i(x), ۱\rangle = \langle x, ۱\rangle$$

بنابراین $i^*(۱) = ۱$. اما $E \notin ۱$. پس i نمی تواند الحاق پذیر باشد.

---

[۳] adjointable
[۴] adjoint

فرض کنیم E و F C^*- مدول های هیلبرت بروی C^*- جبر A باشند. برای $x \in F$ و $y \in E$، تعریف می کنیم

$$\theta_{x,y}(z) = x\langle y, z\rangle \qquad (z \in E)$$

به سادگی دیده می شود که $\theta_{x,y} \in L(E,F)$ و $(\theta_{x,y})^* = \theta_{x,y}$.

فضای خطی تولید شده توسط مجموعه $\{\theta_{x,y} : x \in F, y \in E\}$ در $L(E,F)$ را فضای عملگرهای مرتبه متناهی می نامیم. بستار فضای مجموعه فوق را در $L(E,F)$ با نماد $K(E,F)$ نشان می دهیم و عناصر آن را عملگرهای فشرده [۵] می نامیم. فضای $K(E,E)$ را با نماد $K(E)$ نشان می دهیم. لذا $K(E)$ یک C^*- جبر است. توجه کنید که روابط زیر برقرارند:

(i) برای هر $T \in L(E,F)$، $\theta_{x,y}T = \theta_{x,Ty}$ ؛

(ii) برای هر $T \in L(E,F)$، $T\theta_{x,y} = \theta_{Tx,y}$؛

پس $K(E)$ یک ایده آل در $L(E)$ می باشد.

به عنوان یک قرارداد در این پایان نامه فرض می کنیم که نمادهای $D(.)$، $ker(.)$ و $ran(.)$ را به ترتیب برای دامنه، هسته و برد عملگرها به کار خواهیم برد.

قضیه ۴.۲.۰ (قضیه ۳.۲ [۲۷]) فرض کنیم E و F دو C^*- مدول هیلبرت بروی C^*- جبر A باشند و $T \in L(E,F)$ دارای برد بسته باشد. دراین صورت؛

(i) $ker(T)$ در E متمم پذیر متعامد است با متمم $ran(T^*)$،

(ii) $ran(t)$ در E متمم پذیر متعامد است با متمم $ker(T^*)$،

(iii) همچنین عملگر $T^* \in L(E,F)$ دارای برد بسته است.

عملگر الحاق پذیر کراندار T بروی C^*- مدول هیلبرت E را خودالحاق [۶] می نامیم هرگاه $T = T^*$. همچنین T را یک عملگر تصویری می نامیم هرگاه $T = T^* = T^2$.

[۵] compact operators
[۶] self-adjoint

نتیجه ۰.۲.۵. [۲۷] یک زیرمدول از C^*- مدول هیلبرت E متمم پذیر متعامد است اگر و تنها اگر برد یک عملگر تصویري باشد.

یک عملگر الحاق پذیر کراندار بروی C^*- مدول هیلبرت E را یکه می نامیم هرگاه $U^*U = UU^* = ۱$. اگر U یک عملگر یکه بروی E باشد به سادگی دیده می شود که U یک عملگر پوشا است که یکمتری [۷] نیز می باشد، یعنی

$$\|U(x)\| = \|x\|, (x \in E).$$

همچنین بنا به قضیه ۳.۵ [۲۷] ، اگر U یک عملگر بروی E باشد آن گاه شرایط زیر معادل اند:

(i) U نگاشت $A-$ خطی U یکمتری و پوشا است.

(ii) U یک عملگر یکه [۸] بروی E است.

۰.۳ عملگرهای منظم

فرض کنیم E و F دو C^*- مدول هیلبرت بروی C^*- جبر A باشد، عملگر به طور چگال تعریف شده $t : D(t) \subseteq E \longrightarrow F$ را بسته گوییم هرگاه نمودار آن

$$G(t) = \{(x, t(x)) : x \in D(t)\}$$

یک زیرمدول بسته از $F \oplus E$ باشد.

عملگر به طور چگال تعریف شده $t : D(t) \subseteq E \longrightarrow F$ را بستارپذیر [۹] گوییم هرگاه زیرمدول $\overline{G(t)}$ نمودار یک عملگر باشد، یعنی $(۰, y) \in \overline{G(T)}$ ایجاب می کند که $y = ۰$. به طور معادل اگر $\{x_n\} \subseteq D(t)$ به قسمی که $x_n \longrightarrow ۰$ و $t(x_n) \longrightarrow y$ آن گاه $y = ۰$. عملگر $s : D(t) \subseteq E \longrightarrow F$ با این خاصیت که $G(s) = \overline{G(t)}$ را بستار [۱۰] عملگر t می نامیم و با $s = \bar{t}$

[۷] isometry
[۸] unitary
[۹] closurable
[۱۰] closure

نشان می دهیم.

می گوییم زیرمدول D در دامنه عملگر به طور چگال تعریف شده t بروی E یک هسته [۱۱] برای t است اگر t بستار تحدیدش به D باشد یعنی $t = \overline{(t\mid_D)}$.

فرض کنیم $t : D(t) \subseteq E \longrightarrow F$ یک عملگر به طور چگال تعریف شده باشد. زیرمدول $D(t^*)$ از F را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$D(t^*) = \{y \in F : \exists z \in E \, s.t \, \langle t(x), y\rangle = \langle x, z\rangle, \forall x \in D(t)\} \qquad (۱)$$

برای $y \in D(t^*)$ عنصر z در رابطه (۱.۱.۵) یکتاست و با $z = t^*(y)$ نشان می دهیم. بنابراین می توان عملگر $t^* : D(t^*) \subseteq F \longrightarrow E$ را تعریف کرد که در رابطه

$$\langle x, t^*(y)\rangle = \langle t(x), y\rangle \quad (x \in D(t), y \in D(t^*))$$

صدق می کند. عملگر t^* را الحاق عملگر t می نامیم.

عملگر یکه $U \in L(E \oplus F, F \oplus F)$ را با ضابطه $U(x,y) = (y, -x)$ تعریف می کنیم. مشابه حالت عملگرهای خطی بروی فضاهای هیلبرت، می توان نشان داد که $G(t^*) = UG(t)^{\perp}$. بنابراین t^* عملگری بسته است.

تعریف ۱.۳.۰. فرض کنیم E و F دو C^*- مدول هیلبرت بروی C^*- جبر A باشد. عملگر $A-$ خطی $t : D(t) \subseteq E \longrightarrow F$ را منظم [۱۲] نامیم هرگاه

(i) عملگر t بسته و به طور چگال تعریف شده باشد،

(ii) زیرمدول $D(t^*)$ در F چگال باشد،

(iii) برد عملگر $۱ + t^*t$ در E چگال است.

مجموعه تمام عملگرهای منظم از E به F را با نماد $R(E,F)$ نشان می دهیم. همچنین اگر $E = F$ مجموعه $R(E,F)$ را با $R(E)$ نشان می دهیم.

[۱۱] core
[۱۲] regular

اکنون قضایا و نتایج معروف زیر را از کتاب لنس بیان می کنیم.

قضیه ۲.۳.۰. (قضیه ۳.۹ [۲۷]) فرض کنیم t یک عملگر بسته به طور چگال تعریف شده بروی C^*- مدول هیلبرت E باشد. همچنین فرض کنیم t^* به طور چگال تعریف شده باشد. اگر نمودار t، $G(t)$ در $E \oplus E$ متمم پذیر متعامد باشد آن گاه عملگر t منظم است.

نتیجه ۳.۳.۰. اگر t عملگر منظم بروی C^*- مدول هیلبرت E باشد آن گاه $t = t^{**}$.

لم ۴.۳.۰. (لم ۲.۹ [۲۷]) اگر t عملگر منظم بروی C^*- مدول هیلبرت E باشد آن گاه $D(t^*t)$ یک هسته برای عملگر t است.

اگر t یک عملگر منظم بروی C^*- مدول هیلبرت E باشد. تعریف می کنیم $Q_t = (۱+t^*t)^{\frac{-۱}{۲}}$ و $F_t = tQ_t$ در این صورت بنا به فصل های ۹ و ۱۰ کتاب [۲۷] روابط زیر برقرار است.

$$F_t \in L(E),\ Q_t \in L(E)$$

$$۰ \leq Q_t \leq ۱,\ ran(Q_t) = D(t),$$

$$t = F_t(۱ - F_t^*F_t)^{\frac{-۱}{۲}},\ Q_t = (۱ - F_t^*F_t)^{\frac{۱}{۲}}$$

عملگر F_t را مبدل کراندار [۱۳] ($z-$ مبدل) عملگر منظم t نامیده می شود.

قضیه ۵.۳.۰. فرض کنیم E یک C^*- مدول هیلبرت باشد آن گاه نگاشت

$$R(E) \longrightarrow \{T \in L(E); \|T\| \leq ۱, ran(۱ - T^*T) \text{is dense in E}\}$$

$$t \longmapsto F_t$$

یک دوسویی می‌باشد که حافظ الحاق است. یعنی $F_t^* = F_{t^*}$

[۱۳] bounded transform

براي عملگر منظم t بروي C^*- مدول هيلبرت E بعضي از خاصيت ها به مبدل كراندار آن F_t انتقال مي يابد و برعكس. گزاره زير را از [۱۱] يادآوري مي كنيم.

گزاره ۶.۳.۰. (گزاره ۲.۲ [۱۱]) فرض كنيم t عملگر منظم بروي C^*- مدول هيلبرت E باشد. دراين صورت

(i) $ker(t)$ و $ker(t^*)$ زير مدول هاي بسته از E هستند،

(ii) $ran(t) = ran(F_t)$ و $ran(t^*) = ran(F_{t^*})$،

(iii) $ker(t^*) = ran(t)^\perp$ و $ker(t) = ran(t^*)^\perp$،

(iv) $ker(t) = ker(F_t)$ و $ker(t^*) = ker(F_{t^*})$.

(v) عملگر منظم t داراي برد بسته است اگر و تنها اگر الحاق آن يعني t^* داراي برد بسته باشد. دراين صورت براي $|t| := t^*t^{\frac{1}{2}}$ تجزيه هاي $E = ran(t^*) \oplus ker(t) = ker(|t|) \oplus ran(|t|)$ و $ker(t^*) \oplus ran(t)$ برقرارند.

اكنون از قضيه ۳.۲ [۲۷] و گزاره فوق، گزاره زير نتيجه مي شود.

گزاره ۷.۳.۰. فرض كنيم t عملگر منظم بروي C^*- مدول هيلبرت E باشد به قسمي كه برد عملگر t بسته باشد. دراين صورت

(i) زيرمدول بسته $ker(t)$ در E متمم پذير متعامد است با متمم $ran(t^*)$.

(ii) زيرمدول بسته$ran(t^*)$ در E متمم پذير متعامد است با متمم $ker(t)$.

(iii) همچنين عملگر t^* داراي برد بسته است.

عملگر منظم t بروی C^*- مدول هيلبرت E را خودالحاق می گوييم هرگاه $t = t^*$. مجموعه عملگرهای خودالحاق بروی E را با نماد $SR(E)$ نشان می دهيم. بنا به نتيجه ۱.۱۴ [۲۱] عملگر منظم t بروی Eخودالحاق است اگر وفقط اگر عملگر F_t خودالحاق باشد.

فرض كنيم عملگر منظم t بروی C^*- مدول هيلبرت E خودالحاق باشد آن گاه بنا به لم ۷.۹ و