بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **خانم مهدیه عبدالمطلبی** رشته **ریاضی‌محض** به شماره دانشجویی **۸۹۵۲۰۵۱۰۱۵** تحت عنوان: «**تشخیص پذیری زبان درخت فازی**» را در تاریخ **۱۳۹۲/۲/۱۵** از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر محمدمهدی زاهدی	استاد	
۲- استاد مشاور	دکتر علی ایرانمنش	استاد	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر خسرو تاجبخش	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر رجبعلی برزویی	استاد	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر خسرو تاجبخش	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه **کارشناسی ارشد** نگارنده در رشته **ریاضی محض** است که در سال**۱۳۹۲**در دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای دکتر **محمد مهدی زاهدی**، مشاوره جناب آقای دکتر **علی ایرانمنش** از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب **مهدیه عبدالمطلبی** دانشجوی رشته **ریاضی محض** مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: مهدیه عبدالمطلبی

تاریخ و امضا:۱۳۹۲/۵/۱۲

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب **مهدیه عبدالمطلبی** دانشجوی رشته **ریاضی محض** ورودی سال تحصیلی**۱۳۸۹**مقطع **کارشناسی ارشد** دانشکده **علوم ریاضی** متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

تاریخ: ۱۳۹۲/۵/۱۲

امضاء:

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

تشخیص پذیری زبان درخت فازی

دانشجو

مهدیه عبدالمطلبی

استاد راهنما

دکتر محمد مهدی زاهدی

استاد مشاور

دکتر علی ایرانمنش

اردیبهشت۱۳۹۲

چکیده

در این پایان نامه پس از آشنایی با مفاهیم اساسی پیرامون اتوماتای درختی و اتوماتای درختی فازی به بررسی زبان‌های درختی و زبان‌های درختی فازی قابل شناسایی می‌پردازیم. هم چنین راهکارهایی را برای شناسایی یک زبان فازی با استفاده از نمایش دهنده‌ها، ارائه می‌دهیم.

مراجع اصلی این پایان نامه [۳,۴,۵,۶,۱۱,۲۳] می‌باشند.

کلمات کلیدی: اتوماتای درختی، زبان‌های درختی قابل شناسایی، اتوماتای درختی فازی، زبان فازی ،نمایش دهنده، قابل شناسایی

فهرست مطالب

پیش گفتار

تقریباً تمام افرادی که با ریاضیات سروکار دارند راجع به درخت اطلاعاتی دارند، چون این مفهوم در حوزه‌های مختلف ریاضیات از نظریه گراف گرفته تا جبرهای جامع ظاهر می‌شود. در علوم کامپیوتر، درخت‌ها، اغلب، به عنوان تعمیمی از رشته‌ها در نظر گرفته می‌شوند. نظریه اتوماتای درختی و زبان های درختی، در اواسط ۱۹۶۰مطرح شد. اتوماتای درختی متناهی دربسیاری از زمینه‌های علوم کامپیوتری مانند طراحی کامپایلر و پردازش بر روی پایگاه‌های داده‌های مبتنی بر X M L و بازیابی اطلاعات دارای کاربردهای فراوان می‌باشد. در واقع اتوماتای درختی، تعمیم اتوماتای معمولی روی کلمات است که عبارت درختی را پردازش می‌کند. مسائل مربوط به اتوماتای متناهی در اتوماتای درختی نیز مطرح می‌گردد. اتوماتای درختی فازی تعمیم اتوماتای درختی است و برای پذیرش عبارات درجه عضویت را در نظر می‌گیرد. در اتوماتای غیر فازی، برای پذیرش یک عبارت، درجه یک و برای عدم پذیرش آن درجه صفر را در نظر می‌گیریم. درحالی که در اتوماتای فازی برای پذیرش یک عبارت، درجه‌ای در بازه‌ی [۰,۱) و برای عدم پذیرش، درجه صفر را در نظر می‌گیریم. در فصل اول این پایان نامه مفاهیم مورد نیاز فصل‌های بعد را بیان می‌کنیم. در این فصل مطالبی از جمله در رابطه با اتوماتای مرحله متناهی، درخت ها، مشبکه آورده می‌شود. مطالب این فصل از مراجع [۳,۶,۷,۹,۱۳,۱۴,۱۷,۱۸,۲۲,۲۴] استخراج شده‌اند. در فصل دوم این پایان نامه شیوه‌ی پذیرش یک زبان توسط اتوماتای درختی و اتوماتای درختی فازی با مثال‌هایی توضیح داده می‌شود. مطالب این فصل از مراجع [۶,۱۱,۱۴,۲۳] استخراج شده‌اند. در فصل سوم برای زبان فازی یک نمایش دهنده تعریف می‌شود. شرط قابل شناسایی بودن زبان فازی را داشتن این نمایش دهنده قرار می‌دهد. هم چنین نمایشی با استفاده از مدول‌ها و مشتقات برای یک زبان فازی ارائه می‌شود. در این فصل رابطه‌ی بین مشتقات و قابل شناسایی بودن با قضایایی توضیح داده می‌شود. هم چنین زبان درختی فازی روی یک مجموعه تعریف می‌شود. در ادامه یک نمایش دهنده برای قابل شناسایی بودن زبان درختی فازی

ارائه می‌شود. مطالب این فصل از مراجع [۳,۴,۵] استخراج شده‌اند.

فصل اول

پیش نیازها

دراین فصل مفاهیم مورد نیاز در فصل‌های بعدی را بیان کرده، و به بررسی برخی خاصیت‌های آنها می‌پردازیم.

۱.۱ اتوماتا

در منطق ریاضی، به زبان‌هایی که با فرمول‌های دقیق قابل پردازش برای ماشین تعریف شده‌اند، زبان های فرمال یا زبان‌های صوری گفته می‌شود. به طورکلی در این موارد، زبان‌ها به دو دسته صوری و طبیعی تقسیم بندی می‌شوند. زبان‌های صوری زبان‌هایی هستند که توسط گرامرها تولید می‌شوند یا ماشینی برای ارزیابی آنها وجود دارد.

در علوم رایانه، نظریه اتوماتا[۱]، یا نظریه ماشین‌ها، عبارت است از، مطالعه‌ی ماشین‌های محاسبه‌گر، و بررسی توانایی‌های آن‌ها برای حل مسائل.

نظریه‌ی اتوماتا بسیار نزدیک به نظریه‌ی زبان‌های صوری است، به طوری که اغلب اتوماتا توسط دسته زبان‌های رسمی قابل تشخیص می‌باشد. اتوماتا نقش اساسی در طراحی ترجمه‌گرها[۲] وتجزیه کردن ایفا می‌کند. زبان‌هایی که توسط این ماشین‌ها بررسی می‌شوند زبان‌های صوری هستند. یک اتوماتا یک مدل از یک مفهوم ریاضی است. یک اتوماتا شامل مجموعه‌ای از حالات[۳] است که بر اساس ورودی و تابع انتقال[۴] خود از یک حالت به حالت دیگر، تغییر وضعیت می‌دهد. این تابع انتقال به اتوماتا

---

۱ automaton
۲ compiler
۳ states
۴ Transition function

می گوید که به کدام حالت بعدی با توجه به حالت فعلی و نماد داده شده، برود.

حال به طور دقیق‌تر می‌توان تعریف زیر را بیان کرد.

تعریف ۱.۱. [۱۶,۱۷] یک اتوماتای حالت متناهی[۵] به صورت ۵− تایی (Q, A, δ, q_0, F) است، که در آن:

- Q مجموعه‌ای متناهی از حالت‌ها،
- A مجموعه‌ی متناهی از نمادها،
- δ تابع انتقال است که، $\delta : Q \times A \to Q$ ،
- q_0 حالت آغازین[۶] است، یعنی حالتی از اتوماتا که در آن، هیچ یک از ورودی‌ها هنوز پردازش نشده‌اند($q_0 \in Q$)،
- F زیر مجموعه‌ای از Q است که به آن حالات نهایی[۷] گفته می‌شود.

تعریف ۲.۱. به یک رشته‌ی متناهی $a_1a_2...a_n$ از نمادهای $a_1, \ldots, a_n$ که $a_i \in A$ و $0 < i < n$ یک کلمه[۸] گفته می‌شود. مجموعه‌ی تمام کلمات با A^+ مشخص می‌شود. یعنی:

$$A^+ = \{a_1a_2...a_n \mid a_i \in A, 1 \le i \le n, \forall n \in N\}$$

قرارداد می‌کنیم که، $A^* = A^+ \cup \{\varepsilon\}$. ε نقش عضو همانی[۹] را برای A^* ایفا می‌کند. که به آن کلمه تهی[۱۰] گفته می‌شود. درآنصورت A^* با عمل دوتایی زیر یک تکواره می‌شود.

$$a_1a_2...a_n . b_1b_2...b_m = a_1a_2...a_nb_1b_2...b_m$$

---

۵ finite state automata
۶ initial state
۷ final state
۸ word
۹ identity element
۱۰ empty word

اجرای[11] یک اتوماتا بر روی کلمه‌ی ورودی $w = a_1, \ldots, a_n \in A^*$ یک دنباله ازحالت‌های $q_0, q_1, \ldots, q_n$ است که در آن $q_i \in Q$. هم چنین q_0 حالت شروع اجراست. برای $0 < i < n$ داریم $q_i = \delta(q_{i-1}, a_i)$. به عبارتی ابتدا اتوماتا درحالت q_0 است. بعد اتوماتا بترتیب نمادهای کلمه‌ی ورودی را می‌خواند. وقتی اتوماتا نماد a_i را می‌خواند به حالت $q_i = \delta(q_{i-1}, a_i)$ می‌رود.

تعریف ۳.۱. یک کلمه‌ی $w \in A^*$ توسط ماشین شناسایی می‌شود، هرگاه $q_n \in F$.

تعریف ۴.۱. مجموعه‌ی همه‌ی کلماتی که به وسیله‌ی $\mathcal{A}$ قابل شناسایی[12] باشند را با، $L(\mathcal{A})$ نمایش می دهیم. بنابراین

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in A^*, \delta(q_0, w) \in F\}.$$

مثال ۵.۱. فرض کنیم $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, q_0, F)$ یک اتوماتای مرحله متناهی باشد، که:

$$Q = \{i, t, r\}, A = \{0,1\}, F = \{t\} \quad , q_0 = \{i\}$$

و روابط انتقال آن به صورت زیر است:

$$\delta(t,0) = t, \ \ \delta(t,1) = t$$

$$\delta(i,0) = r, \ \delta(i,1) = t$$

$$\delta(r,0) = r, \delta(r,1) = r$$

که تابع انتقال آن به صورت جدول زیرمی باشد:

---

۱۱ run
۱۲ recognizable

	0	1
i	r	t
t	t	t
r	r	r

حال محاسبات[۱۳] زیر را انجام می‌دهیم :

$$i \xrightarrow{0} r \xrightarrow{0} r \xrightarrow{1} r \xrightarrow{1} r$$

$$i \xrightarrow{1} t \xrightarrow{0} t \xrightarrow{0} t$$

پس نتیجه می‌گیریم که: $100 \in L$, $0011 \notin L$.

مثال ۶.۱. فرض می‌کنیم $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, q_0, F)$ یک اتوماتا باشد، که:

$$Q = \{s_1, s_2\}, \quad A = \{0,1\}, \; q_0 = \{s_1\} \quad , \; F = \{s_1\}$$

δ یک تابع انتقال است و به صورت زیر تعریف می شود:

	0	1
s_1	s_2	s_1
s_2	s_1	s_2

آنگاه:

۱۳ computation

$$S_1 \xrightarrow{1} S_1 \xrightarrow{0} S_2 \xrightarrow{1} S_2 \xrightarrow{0} S_1 \xrightarrow{1} S_1$$

پس $10101 \in L(\mathcal{A})$.

۲.۱ درجه عضویت و مجموعه‌ی فازی

تعریف ۷.۱. [۳۰] یک مجموعه‌ی فازی[۱۴] از دوتایی (A,μ) تشکیل شده است، که در آن A یک مجموعه و $\mu : A \to [0,1]$ است. برای هر $x \in A$، $\mu(x)$ درجه عضویت x در (A,μ) را مشخص می‌سازد

اگر درجه‌ی عضویت[۱۵] یک عنصر از مجموعه برابر صفر باشد، آن عضو کاملاً از مجموعه خارج است. اگر درجه عضویت یک عنصر برابر یک باشد، آن عضو کاملاً در مجموعه قرار دارد. در مجموعه‌های کلاسیک، عضویت اعضا در یک مجموعه بر اساس شرط دودویی تعیین می‌شود، که یک عضو یا به مجموعه تعلق دارد یا ندارد. در حالی که در تئوری فازی درجات نسبی عضویت اعضا در مجموعه مجاز است. می‌توان نتیجه گرفت مجموعه‌های کلاسیک زیر مجموعه‌ی مجموعه‌های فازی هستند. در هر حال اگر درجه عضویت ما بین صفر و یک باشد، این عدد بیانگر درجه‌ی عضویت تدریجی می‌باشد.

۳.۱ اتوماتای فازی

تعریف ۸.۱. [۲۳] یک اتوماتون فازی یک پنج تایی $A^* = (Q, X, \mu^*, F, \sigma)$ است، که در آن:

- Q مجموعه‌ی متناهی از حالت‌ها است،
- X مجموعه‌ی متناهی از ورودی‌ها است،
- $\mu^* : Q \times X^* \times Q \to [0,1]$ یک مجموعه‌ی فازی روی $Q \times X^* \times Q$ است، که تابع انتقال حالت فازی نامیده می‌شود،

---

[۱۴] Fuzzy set

[۱۵] membership grade

- $F \subseteq Q$ مجموعه‌ی حالت‌های نهایی است،

- $\sigma : Q \to [0,1]$ مجموعه‌ای فازی روی Q است که، نگاشت حالت ابتدایی نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۱. فرض کنید $A^* = (Q, X, \mu^*, F, \sigma)$ یک اتوماتون فازی[۱۶] باشد. تابع پاسخ[۱۷] این اتوماتون به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_\mu : X^* \times Q \to [0,1]$$

$$r_\mu(x,q) = \vee_{q' \in Q}(\sigma(q') \wedge \mu^*(q', x, q))$$

تعریف ۱۰.۱. فرض کنید $q \in Q$ و $c \in [0,1)$.گوییم q قابل دسترس[۱۸] با آستانه[۱۹] c است. هر گاه $x \in X^*$ وجود داشته باشد، به طوری که، $r_\mu(x,q) > c$.

تعریف ۱۱.۱. به هرتابع از X^* به $[0,1]$ یک زبان فازی[۲۰] گوییم. به هر زیرمجموعه از X^* یک زبان روی X می‌گوییم.

۴.۱ مشبکه

تعریف ۱۲.۱. یک کران پایین a از $H \subseteq A$ بزرگترین کران پایین یا اینفیمم H نامیده می شود، اگر به ازای تمام کران های پایین[۲۱] c ازمجموعه‌ی H داشته باشیم $c \leq a$

تعریف ۱۳.۱. یک کران بالا a از $H \subseteq A$ کوچکترین کران بالا یا سوپریموم H نامیده می شود، اگر به ازای تمام کران‌های بالای c ازمجموعه‌ی H داشته باشیم $c \geq a$

---

۱۶ Fuzzy automaton
۱۷ response function
۱۸ accessible
۱۹ threshold
۲۰ Fuzzy language
۲۱ lower bound

تعریف ۱.۱۴.کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین مجموعه‌ی H را با نماد $\vee H$و $\wedge H$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱۵.مجموعه‌ی جزئاً مرتب[۲۲] $(A,\leq)$ یک مشبکه است، اگر به ازای تمام $a,b\in A$، مقادیر $\vee\{a,b\}$و $\wedge\{a,b\}$ موجود باشند.

در مشبکه به جای $\vee\{a,b\}$ و $\wedge\{a,b\}$ به ترتیب می‌نویسیم $a\vee b$ و $a\wedge b$. عنصر $a\vee b$ اجتماع a و bو $a\wedge b$ اشتراک a و b نامیده می‌شوند.

تعریف ۱.۱۶. [۱۳] $(A,\leq)$یک مشبکه[۲۳] است، هر گاه $\vee$ و $\wedge$ شرایط زیر را برآورده نمایند:

- $x\wedge x=x$ و $x\vee x=x$(همانی).
- $x\wedge y=y\wedge x$ و $x\vee y=y\vee x$ (جابجایی).
- $(x\wedge y)\wedge z=x\wedge(y\wedge z)$ و $(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z)$ (شرکت پذیری).
- $x\wedge(x\vee y)=x$ و $x\vee(x\wedge y)=x$ (جذبی).

مشبکه L توزیع پذیر خوانده می شود، اگر برای هر $x,y,z\in L$ شرایط زیر برقرار باشند:

$$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$$
$$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$$

تعریف ۱.۱۷. [۹,۱۴] فرض کنید L یک مشبکه توزیعی باشد.کوچکترین و بزرگترین عنصر L را با 0 و 1 نشان می‌دهیم. یک مجموعه‌ی L-فازی روی یک مجموعه‌ی A تابعی مانند $\mu:A\to L$ می‌باشد، یعنی یک عنصر از مجموعه‌ی L^A.

برای سهولت از این پس به جای مجموعه‌ی L-فازی، از مجموعه‌ی فازی استفاده می‌کنیم.

---

۲۲ partial ordered set
۲۳ lattice

تعریف ۱۸.۱. گوییم $\mu \in L^A$ یک نقطه‌ی فازی است، هر گاه، برای عنصری مانند $a \in A$ ،

اگر $x = a$ ، آن‌گاه $\mu(x) = 1$ و اگر $x \neq a$ آن‌گاه $\mu(x) = 0$.

۶.۱ عبارات ودرخت‌ها

مجموعه‌ی رشته‌های متناهی روی ¥ را با $¥^*$ مشخص می‌کنیم. همچنین رشته‌ی تهی با ε نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱۹.۱. [۶] یک الفبای مرتبه‌دار[۲۴] زوج $(F, Arity(\quad))$ است که F مجموعه‌ی نمادها و $Arity$ یک نگاشت از F به ¥ است. برای هر $f \in F$ ، $Arity(f)$ مرتبه‌ی f ، نامیده می‌شود.

مجموعه‌ی نمادها با مرتبه‌ی p ، با نماد F_p مشخص می‌گردد. عناصردارای مرتبه‌ی به ترتیب $0,1,\dots,p$ نمادهای ثابت، یکانی،...و p تایی هستند.

در این جا فرض می‌کنیم که مجموعه‌ی F شامل حداقل یک ثابت می‌باشد.

X شامل مجموعه‌ای از ثابت‌ها است که، هر یک از ثابت‌ها را یک متغیر می‌خوانیم. فرض می‌کنیم که مجموعه‌های X و F_0 مجزا هستند.

تعریف ۲۰.۱. [۶] $T(F, X)$ ، مجموعه‌ای روی الفبای مرتبه‌دار F و مجموعه‌ی متغیرهای X ، کوچکترین مجموعه‌ای است که، چنین تعریف می شود:

- $F_0 \subseteq T(F, X)$ ،
- $X \subseteq T(F, X)$ ،
- اگر $p \geq 1$ ، $f \in F_p$ و $t_1,\dots,t_p \in T(F, X)$ آن‌گاه $f(t_1,\dots\dots,t_p) \in T(F, X)$.

---

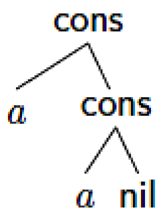
۲۴ ranked alphabet

در صورتی که X تهی باشد، $T(F,X)$ به صورت $T(F)$ نوشته می‌شود. عبارت‌ها[۲۵] در $T(F)$ عبارت های پایه[۲۶] نامیده می‌شوند.

تعریف ۲۱.۱. [۶] عبارت t در $T(F,X)$ را خطی[۲۷] گویند اگر هر متغیر در t حداکثر یکبار تکرار شود.

مثال ۲۲.۱. قرار می‌دهیم $F=\{cons(\ ,\ ),nil,a\}$ و $X=\{x,y\}$. در اینجا $cons$ یک نماد دودویی و nil و a ثابت می‌باشند. عبارت $cons(x,y)$ خطی، و عبارت $cons(x,cons(x,nil))$ غیرخطی است و عبارت $cons(a,cons(a,nil))$ عبارت پایه است.

عبارت‌ها می‌توانند به شکل گرافیکی نشان داده شوند بهِ عنوان نمونه نمایش گرافیکی $cons(a,cons(a,nil))$ چنین است:



یک درخت[۲۸] مرتب متناهی t روی مجموعه برچسب‌های E یک نگاشت[۲۹] از یک مجموعه پیشوندی – بسته[۳۰] $Pos(t)\subset N^*$ به E می‌باشد. $t\in T(F,X)$ ممکن است به عنوان یک درخت مرتبه‌دار مرتب متناهی دیده شود. برگ‌ها به وسیله‌ی متغیرها یا ثابت‌ها، وگره‌های داخلی با نمادهای دارای مرتبه مثبت به همراه درجه خروجی برابر با مرتبه‌ی آن‌ها برچسب‌گذاری شده‌اند. مثلاً یک عبارت

---

۲۵ term
۲۶ ground term
۲۷ linear
۲۸ tree
۲۹ mapping
۳۰ Prefix- closed

$t \in T(F,X)$ می‌تواند به صورت یک تابع جزئی، $t: N^* \to F \cup X$ با دامنه‌ی $Pos(t)$ تعریـف شـود، که شرایط زیر را برآورده می نماید:

- $Post$ غیر تهی و پیشوندی – بسته است.
- برای $p \in Pos(t)$ اگر $n \geq 1$ و $t(p) \in F_n$، آن گاه، $\{j | pj \in Pos(t)\} = \{1, 2, ..., n\}$.
- برای $p \in Pos(t)$ اگر $t(p) \in F_0 \cup X$، آن گاه، $\{j | pj \in pos(t)\} = 0$.

دراین جا مفهوم عبارت و درخت را با هم معادل می‌گیریم به گونه‌ای کـه منظورمـان از درخـت، یـک درخت مرتبه دار مرتب متناهی است که شرایط فوق را برآورده می سازد .

تعریف ۲۳.۱. [۶] هر عنصر در $Pos(t)$ یک موقعیت[۳۱] نامیده می شود .

تعریف ۲۴.۱.یک موقعیت مرزی[۳۲]، یک موقعیت p است که برای هر $j \in N$ داشته باشیم:

$$pj \notin Pos(t)$$

تعریف ۲۵.۱. هر موقعیت p در t که، $t(p) \in X$ موقعیت متغیری[۳۳] نام دارد.

تذ کر ۲۶.۱. موقعیت‌های مرزی را با نماد $FPos(t)$، موقعیت‌های متغیری را با $VPos(t)$ نمایش می‌دهند. ریشه با $Head(t)$ یا به طور دقیق‌تر به صورت $Head(t) = t(\varepsilon)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲۷.۱. [۶] یک زیر عبارت $t|_P$ از یک عبارت $t \in T(F,X)$ در موقعیت p چنین تعریف می‌شود:

$$Pos(t|_p) = \{j | pj \in Pos(t)\}.$$

$$q \in Pos(t|_p) \ , \ \ t|_p(q) = t(pq)$$

---

۳۱ position
۳۲ frontier position
۳۳ variable position