دانشکده: فیزیک

گروه: فیزیک هسته‌ای

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته فیزیک هسته ای

عنوان

ارتباط میان مدل‌های جبری و مدل‌های جمعی

استادان راهنما:

دکتر ناصر فولادی، دکتر محمدعلی جعفری زاده

استاد مشاور:

دکتر رحیمه صوفیانی

پژوهشگر:

میثم قدمی

تابستان ۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

نام خانوادگی دانشجو: قدمی نام: میثم
عنوان پایان نامه: ارتباط میان مدل‌های جبری و مدل‌های جمعی
استادان راهنما: دکتر ناصر فولادی، دکتر محمدعلی جعفری زاده **استاد مشاور: دکتر رحیمه صوفیانی**
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: فیزیک گرایش: هسته‌ای دانشگاه: تبریز **دانشکده: فیزیک تاریخ فارغ التحصیلی: تابستان ۹۰ تعداد صفحات:۱۲۲**
کلید واژه: بردار کیلینگ، اصل وردش وابسته به زمان، حالت‌های همدوس، گذار فاز کوانتومی، نظریه‌ی بحران، مجموعه دوشاخه‌شدگی
چکیده: **با استفاده از مفهوم بردار کیلینگ، شکل دیفرانسیلی عملگرهای IBM محاسبه شده و معادله‌ی دیفرانسیلی متناظر با هامیلتونی IBM به دست آمده است. این معادله در شرایط خاصی با حالت‌های هامیلتونی بوهر-ماتلسون BMM مشابه است. بنابراین بردار کیلینگ از طریق ساختن شکل دیفرانسیلی عملگرها موجب برقراری ارتباط میان مدل جبری IBM و مدل جمعی BMM می‌شود. سپس با استفاده از نظریه‌ی بحران، نقطه‌ی بحرانی گذار فاز هامیلتونی U(5)-O(6) محاسبه شده است. با استفاده از برازش پارامترهای تجربی میزان صحت نتایج نظریه‌ی بحران برای دو هسته Ru و Pd سنجیده شده و بهترین ایزوتوپ هر عنصر که بهترین رفتار گذار فازی را از خود بروز می‌دهد معرفی شده‌اند.**

فهرست مطالب

مقدمه.....أ

فصل اول

بررسی منابع..... ۱

۱-۱ مدل جمعی هسته‌ای بوهر-ماتلسون..... ۲

۱- ۱ مدل هسته‌ای IBM ٤

۱-۲ آشنایی کلی با مدل هسته‌ای لیپکین، مشکوف وگلیک..... ۵

۱-۲-۱ مدل هسته‌ای LMG ٦

۱-۳ ارتباط میان مدل‌های جمعی هسته‌ای $IBM-1$ و BMM ۷

۱-۳-۱ حد کلاسیکی سیستم کوانتومی..... ۸

۱-۳-۲ ساختن معادله‌ی دیفرانسیلی..... ۹

۱-٤ دو مدل هسته‌ای $IBM-1$ و BMM معادلند یا مشابه؟..... ۱۱

۱-۵ گذار فاز کوانتومی در فیزیک هسته‌ای..... ۱۳

۱-۵-۱ گذار فاز کوانتومی در مدل هسته‌ای $IBM-1$ ۱۳

فصل دوم

مبانی وروش ها ۱۶

۲-۱ بردار کیلینگ ۱۷

۲-۱-۱ مختصه‌های روی G/H ۱۸

۲-۱-۲ تبدیل‌های بینهایت کوچک ۲۰

۲-۱-۲-۱ محاسبه‌ی بردار کیلینگ در مدل LMG ۲۰

۲-۲ حالت‌های همدوس ۲۲

۲-۲-۱ الگوی کلی ساخت حالت‌های همدوس ۲۲

۲-۲-۱-۱ ساخت حالت‌های همدوس $SU(2)$ ۲۵

۲-۳ اصل وردش وابسته به زمان ۲۸

۲-۳-۱ $TDVP$ برای حالت‌های بهنجار نشده ۲۹

۲-۳-۲ پارامتربندی معادله موج ۳۱

۲-۳-۳ معادلات حرکت ۳۲

۲-۳-٤ ساختار سیمپلکتیک ۳٤

۲-۳-٤-۱ اعمال $TDVP$ به حالت خاصی از مدل LMG ۳٦

۲-٤ نظریه بحران ٤۲

۲-٤-۱ نظریه‌ی بحران مقدماتی ٤۳

۲-٤-۲ نظریه‌ی طبقه بندی تام ٤٦

۲-٤-۳ یافتن شکل کانونی برای توابع نامورسی ٤۸

۲-٤-۳-۱ کاربردی از الگوی کاهشی ٤۹

۲-٤-٤ قراردادها ۵۱

۲-٤-۵ توصیف کلی گذار فاز در سیستم‌های هسته‌ای ۵٤

۲-٤-٦ کاربرد نظریه‌ی بحران در یک مدل جمعی هسته‌ای ساده ۵۵

۲-٤-۷ نظریه‌ی بحران در کلی‌ترین هامیلتونی $IBM-1$ ۵۸

فصل سوم

بحث و نتیجه‌گیری..... ٦٤

۳-۱ ساختن حالت همدوس گروه $SU(6)$ ٦٥

۳- ۲ محاسبه بردار کیلینگ در مدل هسته‌ای IBM ٦٦

۳-۲-۱ بازآفرینی هامیلتونی BMM ٦٩

۳-۳ محاسبه شکل دیفرانسیلی با استفاده از حالات همدوس ۷۱

۳-٤ مقایسه رفتار دینامیکی و ایستایی مدل LMG ۷۳

۳-۵ محاسبه نقطه بحرانی گذار فاز با استفاده از نظریه بحران ۷۷

۳-۵-۱ جبر $SU(1,1)$ ۸۰

۳- ٦ نتایج محاسبات برای ایزوتوپ‌های **Ru** ۸۵

۳-۷ نتایج محاسبات برای ایزوتوپ‌های **Pd** ۹۰

نتیجه‌گیری و پیشنهادها..... ۹۵

ضمیمه..... ۹٦

محاسبه‌ی جملات کازمیری برحسب عملگرهای مدل ***IBM*** ۹٦

فهرست منابع..... ۱۰٤

فهرست شکل ها

شکل ۱-۱: مثلث تقارن $IBM-1$ یا مثلث کاستن ۱٤

شکل ۲-۱: کره‌ی بلوخ. ۲۷

شکل۲-۲: مسیرهای $TDVP$ مدل LMG به ازای $N=14$ و $\chi=0.5$ ٤۲

شکل۲-۳: لیستی از بحران‌ها بر حسب نظریه طبقه‌بندی تام ٤۸

شکل۲-٤: خلاصه‌ی الگوی کاهش در مورد $A_{\pm 3}$ ۵۱

شکل۲-۵: در قرارداد تأخیری حالت سیستم تنها با نابودی کمینه‌ی قبلی تغییر می‌کند ۵۲

شکل۲-٦: در قرارداد ماکسول سیستم همواره در کمینه‌ی کلی پتانسیل باقی می‌ماند. ۵۲

شکل۲-۷: جداسازی مدل جمعی. ۵۷

شکل ۲-۸: جداسازی مدل IBM. ٦۲

شکل ۳-۱: سطح انرژی بر حسب β در حالت تقارنی $U(5)$ که تنها یک کمینه در $\beta=0$ دارد. ۷۸

شکل ۳-۲: سطح انرژی بر حسب β که در حالت تقارنی $O(6)$ دارای دو کمینه در $\beta\neq 0$ است. ۷۸

شکل ۳-۳: سطح انرژی بر حسب β در حالت گذار $U(5)-O(6)$ که یک کمینه پهن در $\beta=0$ دارد. ۷۹

شکل ۳-٤: مثلث کاستن. ۷۹

شکل ۳-۵: نمودار سطح انرژی $^{100}_{44}Ru$ که در $\beta=0$ کمینه دارد. ۸٦

شکل ۳-٦: نمودار سطح انرژی $^{102}_{44}Ru$ که در $\beta=0$ کمینه دارد. ۸۷

شکل ۳-۷: نمودار سطح انرژی $^{104}_{44}Ru$ که یک کمینه پهن در $\beta=0$ دارد. ۸۷

شکل ۳-۸: نمودار سطح انرژی $^{106}_{44}Ru$ که در $\beta\neq 0$ دو کمینه دارد. ۸۸

شکل ۳-۹: نمودار سطح انرژی $^{108}_{44}Ru$ که در $\beta\neq 0$ دو کمینه دارد. ۸۸

شکل ۳-۱۰: نمودار سطح انرژی $^{110}_{44}Ru$ که در $\beta \neq 0$ دو کمینه دارد. ۸۹
شکل ۳-۱۱: نمودار سطوح انرژی تمام ایزوتوپهای Ru با هم. ۸۹
شکل ۳-۱۲: نمودار سطح انرژی $^{102}_{46}Pd$ که یک کمینه پهن در $\beta = 0$ دارد. ۹۱
شکل ۳-۱۳: نمودار سطح انرژی $^{104}_{46}Pd$ که در $\beta \neq 0$ دو کمینه دارد. ۹۱
شکل ۳-۱٤: نمودار سطح انرژی $^{106}_{46}Pd$ که در $\beta \neq 0$ دو کمینه دارد..... ۹۲
شکل ۳-۱۵: نمودار سطح انرژی $^{108}_{46}Pd$ که در $\beta \neq 0$ دو کمینه دارد..... ۹۲
شکل ۳-۱٦: نمودار سطح انرژی $^{110}_{46}Pd$ که در $\beta \neq 0$ دو کمینه دارد..... ۹۳
شکل ۳-۱۷: نمودار سطح انرژی $^{112}_{46}Pd$ که در $\beta \neq 0$ دو کمینه دارد..... ۹۳
شکل ۳-۱۸: نمودار سطوح انرژی تمام ایزوتوپهای Pd با هم. ۹٤

فهرست جدول ها

جدول ۳-۱: c_s های به دست آمده برای ایزوتوپ‌های Ru. ۸۵
جدول ۳-۲: پارمترهای برازش شده برای ایزوتوپ‌های Ru ۸٦
جدول ۳-۳: c_s های به دست آمده برای ایزوتوپ‌های Pd ۹۰
جدول ۳-٤: پارمترهای برازش شده برای ایزوتوپ‌های Pd ۹۰

مقدمه

مطالعه‌ی رفتار هسته‌ها و درک ماهیت کلی رفتارهای آنها همواره مورد توجه دانشمندان بوده است. ناشناختگی و وجود نیروها و برهمکنش‌های جالب و پیچیده در هسته موجب آن شده است که ارائه‌ی یک مدل کلی که دربرگیرنده‌ی همه‌ی هسته‌ها باشد امکان پذیر نباشد. بلکه همواره هر مدل در یک محدوده‌ی خاص توجیه کننده‌ی رفتار هسته‌هاست. مدل بوهر-ماتلسون (BMM) یک مدل جمعی است که در توصیف برخی هسته‌ها موفق بوده است. منظور از مدل جمعی آن است که رفتار هسته‌ها را با در نظر گرفتن رفتار گروهی همه‌ی نوکلئون‌ها توصیف می‌کند. این مدل بر اساس مدل قطره مایع معرفی شده است. این مدل، هسته را به شکل یک قطره مایع تراکم ناپذیری که سطح آن می‌تواند دوران و نوسان داشته باشد، فرض نموده و تمام ویژگی‌های هسته را بر مبنای همین فرض‌های اساسی توجیه می‌کند. از طرف دیگر، مدل دیگری که در توصیف هسته‌های زوج-زوج موفق بوده است مدل اندرکنش بوزونی[1] (IBM) است. این مدل بر اساس مدل لایه‌ای طرح‌بندی شده است. در این مدل، با توزیع نوکلئون‌ها بر روی لایه‌هایی که ظرفیت آنها با اعداد جادویی مشخص می‌شود، تمام توجه به نوکلئون‌های جفت شده‌ی آخرین لایه که به عنوان بوزون‌های برهمکنش کننده در نظر گرفته می‌شوند، متمرکز می‌شود. نکته‌ی تمایز دو مدل در دید آنها به هسته نهفته است. ارتباط میان این دو مدل آنجا جالب می‌شود که می‌بینیم هامیلتونی مدل بوهر-ماتلسون در سه حالت کروی[2](نوسانی) ، گاما ناپایدار[3] و چرخنده‌ی محوری[4] حل تحلیلی دارد و در همان حال مدل IBM نیز به ازای سه حد جبری، حل‌های دقیق دارد. با مقایسه‌ی جواب‌های به دست آمده از هر دو مدل می‌بینیم که حد $U(5)$ مدل IBM بسیار مشابه همان حالت کروی مدل بوهر-ماتلسون بوده و حدهای $SO(6)$ و $SU(3)$ نیز به ترتیب نظیر حالت‌های گاما ناپایدار و چرخنده‌ی تقارن محوری‌اند. وجود این شباهت بسیاری از دانشمندان را بر آن داشت تا در پی اثبات معادل بودن دو

[1] Interacting Boson Model
[2] Spherical (vibrational)
[3] Unstable gamma
[4] Axial rotor

مدل برآیند. در همان حال برخی دیگر نیز، با توجه به تفاوت‌های ساختاری دو مدل، براین امر تکیه داشتند که دو مدل مشابه اما نامعادلند. برای بررسی ارتباط میان این دو مدل معمولا از دو روش کلی استفاده شده است: ۱) ساختن حد کلاسیکی مدل IBM و مقایسه‌ی آن در هر حالت تقارنی با مدل BMM. ۲) ساختن شکل دیفرانسیلی از عملگرهای هامیلتونی مدل IBM ، که این امر موجب می‌شود تا از هامیلتونی مدل IBM یک معادله‌ی دیفرانسیلی به دست آمده و با مقایسه با معادلات دیفرانسیلی مدل BMM ، شرایط مشابه شدن آنها به دست آید. پس از آنکه حدهای تقارنی مدل IBM به خوبی شناخته شدند مسئله‌ی جالب دیگر، مطالعه‌ی شرایطی بود که یک شکل هسته‌ای به شکل دیگر هسته‌ای تبدیل می‌گردد. به عنوان مثال با افزایش تعداد نوترون‌ها در یک ایزوتوپ خاص، شکل هسته از یک حد تقارنی به حد تقارنی دیگر می‌رود. این رفتار هسته‌ها در حوزه‌ی گذار فاز کوانتومی طرح و بررسی می‌شود. یکی از روش‌های مطالعه‌ی گذار فاز کوانتومی در مدل‌های هسته‌ای، نظریه‌ی بحران است. در این نظریه، با استفاده از تعریف دو مجموعه‌ی دوشاخه‌شدگی و ماکسول فضای پارامترهای کنترلی سیستم به نواحی مجزایی تقسیم می‌شود که در هر ناحیه، هسته شکل خاصی را به خود می‌گیرد. ناحیه‌هایی که با مجموعه‌ی دوشاخه‌شدگی مشخص می‌شوند هر کدام مربوط به یک شکل خاص هسته هستند اما مجموعه‌ی ماکسول ناحیه‌هایی را مشخص می‌کند که در آن دو شکل هسته‌ای بطور همزمان می‌توانند وجود داشته باشند (به عنوان مثال هسته‌هایی که حالت پایه‌ی آنها شکل یک تقارن خاص دارد اما در حالت‌های برانگیخته دچار تغییر شکل می‌شوند). با استفاده از مجموعه‌ی دوشاخه‌شدگی در این نظریه می‌توان رابطه‌ای را برای محاسبه‌ی c_s به دست آورده و نهایتا نقطه‌ی گذار فاز میان دو حد تقارنی را مشخص نمود. در این پایان نامه این رهیافت را در هامیلتونی گذار $U(5) \leftrightarrow SO(6)$ اعمال نموده‌ایم و برای نقطه‌ی گذار فاز مقدار $c_s = 0.5$ را به دست آورده‌ایم. آنگاه برای هر ایزوتوپ عناصر Ru و Pd مقدار c_s را محاسبه نموده‌ایم و نشان داده‌ایم که در میان ایزوتوپ‌های مختلف این دو عنصر ایزوتوپ‌های $^{104}_{44}Ru$ و $^{102}_{46}Pd$ بهترین رفتار گذار فازی را از خود نشان می‌دهند.

فصل اول

۱ بررسی منابع

۱-۱ مدل جمعی هسته‌ای بوهر-ماتلسون[1]

مدل بوهر-ماتلسون (BMM) را می‌توان به شیوه‌های مختلفی معرفی نمود[۱,۲,۳]. یکی از بهترین شیوه‌ها، روش هندسی است. در این روش، مختصه‌های چهارقطبی جمعی را با استفاده از تعریف سطح هسته معرفی می‌کنند:

$$R(\theta,\phi,t)=R_0(1+\sum_m \alpha^*_{\lambda m}(t)Y_{\lambda m}(\theta,\phi)) \qquad (۱-۱)$$

مختصه‌های چهارقطبی جمعی $\alpha_{2m}(t)$ که از لحاظ کلاسیکی به زمان وابسته‌اند این امکان را فراهم می‌آورند تا یک هامیلتونی کلاسیکی را به شکل زیر بنویسیم:

$$H_{BMM}=\frac{1}{2}\sum_{m\nu} B_{m\nu}(\alpha_2)\dot{\alpha}^*_{2m}\dot{\alpha}_{2\nu}+V(\alpha_2) \qquad (۲-۱)$$
$$=\frac{1}{2}B\sum_m \dot{\alpha}^*_{2m}\dot{\alpha}_{2m}+\frac{1}{2}C\sum_m \alpha^*_{2m}\alpha_{2m}+\ldots$$

در خط دوم هامیلتونی در رابطه‌ی (۱-۲) تانسور جرمی $B_{m\nu}(\alpha_2)$ بسط داده شده و انرژی پتانسیل سطح $V(\alpha_2)$ را نیز به شکل یک سری توانی از عبارت‌های ناوردای دورانی $\alpha_{2m}(t)$ بسط یافته است. دو جمله‌ی خط پایین هامیلتونی یک نوسانگر هماهنگ پنج بعدی را توصیف می‌کنند که پارامتر جرمی آن B و ثابت نیروی کشسانی آن C می‌باشد.

این هامیلتونی را می‌توان در سیستم آزمایشگاهی و یا سیستم ذاتی کوانتیزه نمود. در سیستم آزمایشگاهی می‌توان هامیلتونی را بر حسب عملگرهای خلق b^+_m و فنای $\tilde{b}_m=(-1)^m b_{-m}$ نوسانگر پنج بعدی نوشت:

$$\alpha_{2m}=\left[\frac{\hbar}{2\sqrt{BC}}\right]^{1/2}(b^+_m+\tilde{b}_m) \qquad (۳-۱)$$
$$\dot{\alpha}_{2m}=-i\omega\left[\frac{\hbar}{2\sqrt{BC}}\right]^{1/2}(b^+_m-\tilde{b}_m)$$

[1] Bohr- Mottelson model

هامیلتونی BMM بر حسب عملگرهای چهارقطبی بوزونی یک سری توانی است که می‌بایست کران بالایی داشته باشد.

$$\hat{H}_{BMM} = c_{11}\sum_m b_m^+ b_m + \sum_{\lambda=0,2,4} c_{22}^{\lambda}\left[\left[b^+b^+\right]_\lambda\left[\tilde{b}\tilde{b}\right]_\lambda\right]_0 + c_{21}\left\{\left[\left[b^+b^+\right]_2\tilde{b}\right]_0 + h.c.\right\} + \ldots \qquad (۱-٤)$$

این هامیلتونی را می‌توان در پایه‌های نوسانگر هماهنگ پنج بعدی قطری نمود. اگر بخاطر ساخته شدن تکانه‌های زاویه‌ای صحیح، از تکانه‌های جفت‌شدگی چشم‌پوشی شود می‌توان پایه‌ها را به شکل زیر نوشت:

$$|n_b\rangle = \prod_{m=-2}^{+2}\frac{1}{\sqrt{n_m!}}\left(b_m^+\right)^{n_m}|0\rangle \qquad (۱-۵)$$

برای کوانتیزه نمودن هامیلتونی (۱-۲) در سیستم ذاتی می‌بایست پنج متغیر چهارقطبی $\alpha_{2m}(t)$ را تغییر داد. در سیستم مختصات ذاتی این پنج متغیر با سه زاویه‌ی اویلری ψ ، θ و φ و دو پارامتر تغییر شکلی β و γ جایگزین می‌شوند:

$$\alpha_{2m} = D^2_{m0}(\varphi,\theta,\psi)\,a_0 + (D^2_{m,2} + D^2_{m,-2})a_2 \qquad (۱-٦)$$

$$a_0 = \beta\cos\gamma \quad \& \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta\sin\gamma$$

پس از این تغییرات هامیلتونی بوهر-ماتلسون را می‌توان به شکل زیر کوانتیزه نمود:

$$\hat{H}_{BMM} = -\frac{\hbar^2}{2B}\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\hbar^2}{2B\beta^2}C(SO(5)) + V(\beta,\gamma) \qquad (۱-۷)$$

$$C(SO(5)) = \sum_{k=1,2,3}\frac{I_k^2}{2\sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}k\right)} - \frac{1}{\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}$$

جمله‌ی اول هامیلتونی بالا انرژی جنبشی نوسان‌های β است. جمله‌ی دوم نیز دربردارنده‌ی نوسان‌های γ است. جمله‌ی آخر، انرژی پتانسیل برحسب پارامترهای تغییر شکل β و γ است. حل‌های هامیلتونی BMM در حالت‌های نوسانی، دورانی و گاما ناپایدار به سادگی داده می‌شوند[٤].

۱-۲ مدل هسته‌ای IBM

مدل اندرکنش بوزونی (IBM) در مقایسه با مدل BMM برای توصیف هسته‌های زوج-زوج، از مدل قطره مایع الهام نگرفته است. ساختار اساسی فیزیکی در این مدل، مدل لایه‌ای است و تمامی توجه بر روی نوکلئون‌های بیرون از لایه‌ی بسته متمرکز می‌شود (به ازای لایه‌هایی که بیشتر از نصف پر شده باشند از نوکلئون‌های حفره‌ای استفاده می‌شود) . این نوکلئون‌های ظرفیتی به گونه‌ای در نظر گرفته می‌شوند که جفت‌هایی با تکانه‌ی زاویه‌ای $L=0$ (s بوزون) و $L=2$ (d بوزون) را تشکیل می‌دهند. این بوزون‌ها که شامل پنج d بوزون و یک s بوزون‌اند به گونه‌ای فرض می‌شوند که کاملا همانند بوزون‌ها با یکدیگر برهمکنش می‌کنند و از این امر که در حقیقت فرمیون‌اند چشم پوشی می‌شود[۵،٦،۷].

هامیلتونی این مدل در تحت دوران ناوردا و حاوی تمام جملات ممکن بوزون‌ها و برهمکنش‌های دو جسمی میان آنها در نظر گرفته می‌شود. به این ترتیب نه جمله امکان وجود خواهند داشت:

$$\hat{H}_{IBM}=\varepsilon_s\hat{n}_s+\varepsilon_d\hat{n}_d+\sum_{L+0,2,4}\tfrac{1}{2}\sqrt{2L+1}\Big[\big[d^+\times d^+\big]^L\times\big[\tilde{d}\times\tilde{d}\big]^L\Big]^{(0)} \qquad (۸-۱)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}V_2\Big[\big[d^+\times d^+\big]^2\times\big[\tilde{d}\times\tilde{s}\big]^2+\big[\tilde{d}^+\times s^+\big]^2\times\big[\tilde{d}\times\tilde{d}\big]^2\Big]^{(0)}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}V_0\Big[\big[d^+\times d^+\big]^0\times\big[\tilde{s}\times\tilde{s}\big]^2+\big[s^+\times s^+\big]^0\times\big[\tilde{d}\times\tilde{d}\big]^0\Big]^{(0)}$$
$$+U_2\Big[\big[d^+\times s^+\big]\times\big[\tilde{d}\times\tilde{s}\big]\Big]^{(0)}+\frac{1}{2}U_0\big(s^+s^+\tilde{s}\tilde{s}\big)$$

به لحاظ نظریه‌ی گروهی، مدل اندرکنش بوزونی شامل زیرجبرهای گوناگون تقارن $SU(6)$ است. برای مشخص کردن حالت‌ها و ساختن عناصر ماتریسی، می‌بایست یکی از زنجیره‌های زیرگروهی آنرا در نظر گرفت. تقارن $SU(6)$ به لحاظ نظریه‌ی گروهی غنی بوده و شامل سه زنجیره‌ی مهم (به لحاظ فیزیکی) می‌باشد[۸]:

الف) نوسانگر هماهنگ: $SU(6) \supset SU(5) \supset SO(5) \supset SO(3) \supset SO(2)$

ب) چرخنده‌ی تقارن محوری: $SU(6) \supset SU(3) \supset SO(3) \supset SO(2)$

ج) چرخنده‌ی گاما ناپایدار: $SU(6) \supset SO(6) \supset SO(5) \supset SO(3) \supset SO(2)$

۱-۳ آشنایی کلی با مدل هسته‌ای لیپکین، مشکوف و گلیک

تکنیک‌ها و فرمولبندی‌های بسیاری برای بررسی رفتار سیستم های بس ذره ای گسترش یافته اند. برخی از این روش‌ها اگر نگوییم معادل، حداقل با یکدیگر مرتبطند. هر چند که مقایسه‌ی مستقیم رفتارها بخاطر وجود نمادگذاری‌های متفاوت و پیچیده کاری بسیار دشوار است. حتی کنترل کردن میزان اعتبار تقریب‌های گوناگون به عنوان یک تابع از پارامترهای مشخصه که در سیستم های فیزیکی رخ می‌دهند نیز امری دشوار است[۹,۱۰,۱۱].

این فرمولبندی‌های متفاوت را در مدل‌هایی می‌توان امتحان نمود که به اندازه‌ی کافی ساده باشند تا به طور دقیق حل شوند. با استفاده از مقایسه‌ی حل‌های تقریبی با حل دقیق می‌توان ناحیه‌ی اعتبار و درستی هر روش را تعیین نمود. حتی ممکن است اصلاحاتی را یافت که حوزه‌ی صحت و اعتبار روش‌های تقریبی را افزایش دهند.

ساده‌ترین جبر لی، جبر تکانه‌های زاویه‌ای است. روش‌هایی وجود دارند که می‌توان از حاصلضرب‌های دوگانه‌ی عملگرها، عملگرهای خلق و فنایی ساخت که در روابطی شبیه به روابط تکانه‌ی زاویه‌ای صدق کنند. اینگونه عملگرها را شبه اسپینی می‌نامند زیرا شبیه به شکل آشنای تکانه‌های زاویه‌ای هستند.

در اینجا ما مدلی را معرفی خواهیم کرد که می‌توان آن را بر حسب شبه اسپین‌ها توصیف نموده و حل‌های دقیق آن نیز در بسیاری از حالت‌ها قابل دست‌یابی است. این مدل در سال ۱۹۶۵

توسط لیپکین، مشکوف و گلیک[1] معرفی شد و بهمین دلیل بنام مدل لیپکین-مشکوف-گلیک (مدل LMG) معروف است [۹].

۱-۱-۱ مدل هسته‌ای LMG

یک سیستم با N فرمیون توزیع شده در دو تراز را در نظر بگیرید که هر تراز تبهگنی $N-$ گانه داشته و به وسیله‌ی انرژی ε از یکدیگر جدا شده‌اند. هر حالت به وسیله‌ی یک عدد کوانتومی σ و یک عدد کوانتومی p توصیف می‌شود. عدد کوانتومی σ در تراز بالاتر مقدار $+1$ و در تراز پایین تر مقدار -1 را دارد. عدد کوانتومی p حالت تبهگن خاص در هر تراز را توصیف می‌کند.

فرض کنید که $a^{+}_{p\sigma}$ عملگر خلق یک ذره در حالت p تراز σ باشد، آنگاه هامیلتونی سیستم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H=\frac{1}{2}\sum_{p\sigma}\sigma\, a^{+}_{p\sigma}a_{p\sigma}+\frac{V}{2}\sum_{pp'\sigma}a^{+}_{p\sigma}a^{+}_{p'\sigma}a_{p'\sigma}a_{p,-\sigma}+\frac{W}{2}\sum_{pp'\sigma}a^{+}_{p\sigma}a^{+}_{p',-\sigma}a_{p'\sigma}a_{p,-\sigma} \qquad (۹\text{-}۱)$$

که V و W پارامترهایی هستند که قدرت برهمکنش را مشخص می‌کنند. جمله‌ی دربردارنده‌ی V یک جفت از ذرات را از یک تراز به ترازی دیگر می‌برد. جمله‌ی حاوی W نیز هنگامی که یک ذره به تراز پایین می‌آید ذره‌ی دیگر را به تراز بالاتر جابجا می‌کند[۹].

اینکه هر ذره تنها دو حالت ممکن دارد فورا استفاده از یک فرمول بندی شبه اسپینی را به ذهن می‌آورد. عملگرهای شبه اسپینی کلی سیستم به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$J_{+}=\sum_{p}a^{+}_{p,+1}a_{p,-1}\quad,\quad J_{-}=\sum_{p}a^{+}_{p,-1}a_{p,+1}\quad,\quad J_{0}=\sum_{p\sigma}a^{+}_{p\sigma}a_{p\sigma} \qquad (۱۰\text{-}۱)$$

عملگرهای بالا در روابط جابجایی تکانه ی زاویه ای صدق می‌کنند. بنابراین هامیلتونی را بر حسب این عملگرها می‌توان به شکل زیر نوشت:

[1] Lipkin, Meshkov and Glick

$$H = \varepsilon J_0 + \frac{V}{2}(J_+^2 + J_-^2) + \frac{W}{2}(J_+J_- + J_-J_+) \qquad (۱۱-۱)$$

عملگر $J^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_0^2$ با هامیلتونی (۱-۱۱) جابجا می‌شود. عملگر J_0 نصف اختلاف تعداد ذرات میان ترازهای بالا و پایین است. بنابراین بیشینه تعداد ممکن J_0 و در نتیجه j، $N/2$ است. برای مشاهده‌ی تقارن شبه اسپینی با معنی، رفتار هسته‌ای لایه‌ی دوگانه بسته[1] نظیر ^{16}o را در مدل لایه‌ای می‌توان در نظر گرفت[۹].

۱-۲ ارتباط میان مدل‌های جمعی هسته‌ای $IBM-1$ و BMM

از همان آغاز پیدایش مدل $IBM-1$ به ارتباط تنگاتنگ میان آن و مدل BMM پی برده شد. مدل $IBM-1$ به طور شگفت‌انگیزی در ارائه‌ی یک توصیف پدیده شناختی از اطلاعات طیفی(به عنوان مثال می‌توان به طیف انرژی مشابه به ازای هسته های یکسان اشاره کرد) برروی گستره‌ی وسیعی از هسته‌هایی که خواص جمعی(شامل آنهایی که معمولا بر حسب نوسانگرهای ناهماهنگ یا چرخنده‌های تغییرشکل یافته تفسیر می‌شدند) را نشان می‌دهند موفق بوده است.

بسیاری از دانشمندان به بررسی ارتباط میان این دو مدل پرداختند. رهیافت‌های فراوان دنبال شده برای برقراری ارتباط میان این دو مدل را می‌توان در دو گروه کلی دسته‌بندی نمود[۱۲]:

الف) ساختن حد کلاسیکی: در این‌گونه روش‌ها، حد کلاسیکی مدل $IBM-1$ ساخته شده و یک توصیف هندسی ساده و مشخص از مدل $IBM-1$ حاصل می‌گردد که می‌توان آن را با مدل BMM مقایسه نمود[۱۳,۱٤,۱٥,۱٦,۱۷].

ب) ساختن معادله‌ی دیفرانسیلی: در این‌گونه روش‌ها سعی می‌شود که یک تبدیل دقیق از هامیلتونی $IBM-1$ به یک معادله‌ی شرودینگر دیفرانسیلی بر حسب متغیرهای تغییر شکل تجمعی β و γ، ساخته شده و زان پس با کمک این معادله‌ی دیفرانسیلی، معادلات دو مدل از نظر شهودی با

[1] double-closed-shell-nuclei

یکدیگر مقایسه شوند[۱۸,۱۹,۲۰]. در زیر به طور خلاصه هر دو روش گفته شده در بالا را توضیح می‌دهیم.

۱-۲-۱ حد کلاسیکی سیستم کوانتومی

حد کلاسیکی سیستم کوانتومی یکی از قدیمی ترین مسائل در مکانیک کوانتوم است. این مسئله هنگامی حائز اهمیت است که یک نظریه بر اساس متغیرهای کوانتومی فرمولبندی شده باشد و بخواهیم آن را بر حسب متغیرهای هندسی کلاسیکی تفسیر کنیم. با استفاده از این روش می‌توان نشان داد که مدل BMM در حد یک همریختی[1] حد کلاسیکی مدل $IBM-1$ است[۱۳]. گیلمور و همکارانش نشان داده‌اند که برای یک سیستم کوانتومی بوزونی که به وسیله ی گروه $U(r)$ توصیف می‌شود به $r-1$ متغیر مختلط کلاسیکی نیازمندیم[۲۱]. بنابراین برای توصیف $U(6)$ به ۵ متغیر مختلط کلاسیکی نیازمندیم. می‌توان این هندسه را به وسیله‌ی ارتباط دادن هر نقطه‌ی α به یک نقطه روی سطح یک جسم تغییر شکل یافته به شعاع $R/R_0 = 1+\sum_{m=-2}^{2}\alpha_m Y_{2,m}(\theta,\varphi)$ در نظر گرفت. آنگاه به جای پنج متغیر α_m می‌توان از دو متغیر تغییرشکل ذاتی β و γ و سه زاویه‌ی اویلری θ_1، θ_2 و θ_3 که جهت جسم تغییرشکل یافته را در فضا مشخص می‌کنند، استفاده نمود. همه‌ی این متغیرها تا حد یک همریختی با یکدیگر معادلند[۱۳]. این امر اثبات می‌کند که یک تناظری میان مدل $IBM-1$ و BMM وجود دارد. قدم بعدی آن است که با استفاده از متغیرهای کلاسیکی تعریف شده در بالا یک کران بالا را برای انرژی حالت پایه‌ی سیستم تولید کنیم که در حد $N\to\infty$ به انرژی دقیق همگرا شود. این امر به سادگی با ساختن تابع انرژی به صورت زیر

$$E(N,\alpha)=\frac{\langle N,\alpha|H|N,\alpha\rangle}{\langle N,\alpha|N,\alpha\rangle} \qquad (۱۲-۱)$$

و کمینه کردن آن نسبت به α امکان‌پذیر می‌شود. اکنون ما در موقعیتی هستیم که می‌توانیم

[1] Homomorphism

شکل‌های تعادلی مربوط به سه حد مدل $IBM-1$ یعنی: $U(5)$ ، $SU(3)$ و $O(6)$ را محاسبه کنیم. برای محاسبه‌ی شکل تعادلی سه حد مدل $IBM-1$ کافی است تا تابع انرژی $E(N,\alpha)$ مربوط به ناوردای کازمیری زنجیره‌ی گروهی را محاسبه کنیم. برای حد $U(5)$ به دست خواهد آمد:

$$E(\beta,\gamma)=\varepsilon N\left(\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\right) \qquad (۱۳-۱)$$

و برای حد $SU(3)$ خواهیم داشت:

$$E(\beta,\gamma)=KN(N-1)\left(\frac{1+\frac{3}{4}\beta^2-\sqrt{2}\beta^3\cos 3\gamma}{\left(1+\beta^2\right)^2}\right) \qquad (۱۴-۱)$$

و نیز برا ی حد $O(6)$ نیز به شکل زیر خواهد بود:

$$E(\beta,\gamma)=K'N(N-1)\left(\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\right)^2 \qquad (۱۵-۱)$$

که در این روابط K ، K' و ε حقیقی اند. با کمینه سازی $E(\beta,\gamma)$ نسبت به β و γ مشاهده خواهیم کرد که حدهای $U(5)$ و $O(6)$ از γ مستقل بوده و دارای یک کمینه هستند. در حد $U(5)$ کمینه در $\beta=0$ بوده و در حد $O(6)$ کمینه در $\beta=1$ واقع شده است. حد $SU(3)$ نیز بسته به علامت مثبت یا منفی χ در عملگر کازمیریش دارای یک کمینه در $\beta=\sqrt{2}$ و یک کمینه دیگر به ترتیب در $\gamma=0$ یا $\gamma=60^0$ خواهد بود. شکل‌های به دست آمده برای حدهای گوناگون مدل $IBM-1$ و کمینه‌های آنها در تناظر یک به یک دقیق با مدل BMM هستند[۱۳]. رهیافت گفته شده در مطالعه‌ی گذارهای فاز کوانتومی بسیار موثر بوده و در ادامه به آن باز هم خواهیم پرداخت.

۱-۲-۲ ساختن معادله‌ی دیفرانسیلی

این روش به وسیله‌ی چندین تن از دانشمندان دنبال شده است که در اینجا ما به یکی از آنها اشاره می‌کنیم[۱۲]. ایده‌ی اصلی این روش تبدیل مسئله‌ی ویژه مقداری $IBM-1$ اصلی به یک