بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

عنوان:

گراف کامل یک حلقه جابجایی

از:

فاطمه صفادیده

استاد راهنما:

دکتر فرهاد درستکار

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به روان پاک پدر مهربانم :

او که راه و رسم خوب زندگی کردن را در سایه تلاش و آزادگی به فرزندان خود آموخت و خود تا آخرین لحظه حیات، باعزت نفس زندگی کرد و دمی از تلاش دست بر نداشت، و اگر نیست، وجودش در تمام زندگیم جاری است.

پیشگاه مادر عزیزم :

او که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش همه مهر، آنکه در رسیدن من به مدارج علمی بالاتر از هیچ کوششی دریغ نکرد، در برابر وجود گرامیش زانوی ادب بر زمین می نهم و با دلی مملو از عشق و محبت و خضوع به دستانش بوسه می زنم.

تقدیر و تشکر

خداوند بزرگ را شاکرم که همواره مرا مورد لطف بی دریغ خود قرار داده و عظمت وجودش یاریگرم بوده است.

این پایان نامه حاصل راهنمایی استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر فرهاد درستکار است که در طی این مدت صبوری زیادی به خرج دادند و همیشه مدیون و قدردان زحمات بی شائبه ایشان بوده و هستم. همچنین از اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر شهاب الدین ابراهیمی و جناب آقای دکتر منصور هاشمی که داوری این پایان نامه را پذیرفتند کمال تشکر را دارم و از جناب آقای دکتر اسماعیل عزیزپور به خاطر حضور در جلسه دفاعیه سپاسگزارم و همچنین از اساتید محترم گروه ریاضی دانشگاه گیلان که در طول تحصیل مرا یاری کرده اند، تشکر و قدردانی می نمایم.

فهرست مطالب

چکیده

گراف کامل یک حلقه جابجایی

فاطمه صفادیده

دراین پایان نامه ابتدا گراف کامل یک حلقه جابجایی را معرفی می نماییم ودرادامه به مطالعه زیرگراف های خاصی از این گراف خواهیم پرداخت.

واژه های کلیدی : گراف کامل ، گراف مقسوم علیه صفر ، عناصر پوچ توان ، حلقه جابجایی ، عناصر منظم

Abstract

The total graph of a commutative ring

Fatemeh safadideh

In this dissertation we introduce the total graph of R and we also study the special subgraphs of graph .

Key words : total graph , zero-divisor graph , Nilpotent , commutative ring , Regular elements .

پیشگفتار :

نظریه گراف شاخه ای ازریاضیات است که درقرن هجدهم توسط اویلر، ریاضیدان بزرگ ابداع گردیده است. مهمترین کاربرد نظریه گراف مدل سازی پدیده های گوناگون وبررسی بر روی آنها می باشد. از این رو امروزه نظریه گراف درکلیه شاخه های مختلف علوم، کاربرد فراوان دارد.

گراف مقسوم علیه صفراول بارتوسط D.F. Anderson و P. S. Livingston درسال ۱۹۹۹معرفی شد.
(ر. ک. [۳]) و همچنین توسط Anderson و Frazier و Lauve و Livingston درمقاله دیگری که در سال ۲۰۰۱چاپ شد به ارتباط دقیقتری بین گراف مقسوم علیه صفرو ساختارحلقه پرداخت.(ر. ک. [۲]) پس ازچاپ اولین مقاله درمورد گراف مقسوم علیه صفردر سال ۱۹۹۹ تا کنون تحقیقات زیادی دراین ارتباط صورت گرفته است.

دراین پایان نامه به بررسی گراف کامل برای حلقه ومدول خواهیم پرداخت.

درفصل اول این پایان نامه به یادآوری تعاریف ومفاهیم اولیه گراف خواهیم پرداخت. (ر. ک. [۱])

درفصل دوم، برای حلقه R، گراف کامل آن یعنی $T(\Gamma(R))$ را بررسی می نماییم ودرادامه به مطالعه سه زیرگراف $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ و $Z(\Gamma(R))$ و $Nil(\Gamma(R))$ از $T(\Gamma(R))$ می پردازیم. (ر. ک. [۱])

درفصل سوم برای R- مدول M، گراف کامل آن یعنی $T(\Gamma(M))$ رابررسی می کنیم. (ر. ک. [۷])

فصل اول

تعاريف ومفاهيم اوليه

درسراسراین پایان نامه R همواره یک حلقه جا بجایی ویکدار(با یکه مخالف صفر) است. همچنین مجموعه مقسوم علیه های صفرحلقه R را با $Z(R)$ و مجموعه عضوهای منظم حلقه R را با $\mathrm{Reg}(R)$ نشان می دهیم.

برای گراف G، مجموعه رآس ها را با $V(G)$، و مجموعه یال ها را با $E(G)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱-۱ : گراف مجموعه ای ازرأس هاست که توسط خانواده ای ازخطوط که همان یال ها می باشند به هم مربوط (وصل) شده اند.
یال ها نیزدونوع ساده وجهت دار می باشند.

تعریف ۱-۲ : گراف ساده گرافی است که طوقه ویال چند گانه (تعداد یال هایی که فقط ازدو رأس مربوطه می گذرند) ندارد.

تعریف ۱-۳ : دو رأس v و w ازگراف G را مجاورگویند، هرگاه یک یال بین آن دو وجود داشته باشد(یعنی، یک یال به صورت $v-w$ وجود داشته باشد). دراین صورت می گویند که رئوس v و w برآن یال واقع هستند. به همین ترتیب دو یال متمایزاز G را مجاورگویند، هرگاه حداقل یک رأس مشترک داشته باشند.

تعریف ۱-۴ : یک گراف ساده را که هر دو رأس متمایزآن مجاور باشند، یک گراف کامل گویند. یک گراف کامل با n رأس را به صورت K_n نمایش می دهند.

تعریف ۱-۵ : فرض کنید مجموعه رئوس یک گراف را بتوان به دو مجموعه مجزای V و W افرازکرد بطوری که هر یال G یک رأس از V را به یک رأس از W وصل کند. دراین صورت G را یک گراف دوبخشی گویند وبه صورت $G(V,W)$ نمایش می دهند. دریک گراف دوبخشی لزوماً هررأس از V به هررأس از W وصل نیست. امّا اگرچنین باشد واگر G ساده باشد، آنگاه G یک گراف دوبخشی کامل گویند. هنگامی که G دوبخشی متناهی باشد آن را با $K_{r,s}$ نشان می دهند که درآن r و s به ترتیب تعداد رئوس در V و W هستند. توجّه کنید که $K_{r,s}$، تعداد $r+s$ رأس و rs یال دارد.

تعریف ۱-۶ : یک گراف r- بخشی، گرافی است که مجموعه رأس های آن را می توان به r زیرمجموعه افرازکرد بطوری که یالی که دو عضو یکی ازآن مجموعه ها را به هم وصل می نماید موجود نباشد. یک گراف r- بخشی را که هررأس آن با هررأس دیگرکه درزیرمجموعه یکسانی قرارندارد، متصل شده باشد را یک گراف r- بخشی کامل گویند.

تعریف ۱-۷ : یک گراف دوبخشی کامل به صورت $K_{1,s}$، یک گراف ستاره ای نامیده می شود.

تعریف ۱-۸ : یک زیر گراف ازگراف G، خود یک گراف است، که هررأس آن به $V(G)$ تعلّق دارد وهریال آن عضو $E(G)$ است.

تعریف ۱-۹ : دنباله ای ازیال ها به صورت $v_{m-1}\ v_m$ و ... و $v_1\ v_2$ و $v_0\ v_1$ را در نظرمی گیریم که آن را به صورت $v_0 — v_1 — v_2 — \cdots — v_{m-1} — v_m$ نیزنشان می دهیم. اگررئوس v_m و ... و v_1 و v_0 متمایزباشند، به این دنباله ازیال ها یک مسیرگویند.

تعریف ۱-۱۰ : فرض کنید v_{m-1} و ... و v_1 و v_0 که $m \geq 3$ رأس هایی متمایزازگراف G باشند که به ازای هر $0 \leq i \leq m-1$ ، رأس های v_i و v_{i-1} مجاور می باشند. چنانچه رأس های v_0 و v_{m-1} نیزمجاورباشند، دراین صورت $v_0 — v_1 — \cdots\cdots — v_{m-1} — v_0$ را یک دوربه طول m گوییم.

تعریف ۱-۱۱ : طول کوتاهترین دوردرگراف G را با $gr(G)$ نمایش می دهند وآن را کمرگراف G گویند. اگر G شامل هیچ دوری نباشد، کمرگراف G را برابربی نهایت تعریف می کنند.

تعریف ۱-۱۲ : اگر x_{m-1} و ... و x_1 و x_0 رأس هایی متمایزازگراف G باشند، آنگاه $x_0 — x_1 — \cdots\cdots — x_{m-1} — y$ یک راه به طول m است. طول کوتاهترین راه از x به y را با $d(x,y)$ نمایش می دهند. درصورتی که چنین راهی از x به y موجود نباشد $d(x,y)$ را برابر بی نهایت تعریف می کنند. همچنبن $d(x,x)=0$.

تعریف ۱-۱۳ : بعبارت دیگرسوپریمم فاصله بین رئوس متمایزگراف G را قطرگراف G گویند. و آن را با $diam(G)$ نشان می دهند.

$$diam(G) = \sup \{ d(x,y) \mid \text{x و y رأس های متمایزهستند} \}.$$

تعریف ۱-۱۴ : یک گراف که بین هردو رأس آن مسیری وجود داشته باشد را یک گراف همبند گوییم.

تعریف ۱-۱۵ : اگرهیچ دو رأس از G مجاورنباشد، گوییم گراف کلاً ناهمبند است.

تعریف ۱-۱۶ : فرض کنید R یک حلقه جابجایی و M یک R- مدول باشد. مجموعه $R \times M$ به همراه اعمال زیر یک حلقه جابجایی است.

$$(r,m)+(s,n)=(r+s,m+n)$$
$$(r,m)(s,n)=(rs\,,\,rn+sm)$$

این حلقه را با $R(+)M$ نشان می دهیم و آن را ایده ال ساز از M بر R گوییم.

قضیه ۱-۱۷ : (ر. ک. [2, 1.1])
فرض کنید R یک حلقه جابجایی و M یک R- مدول باشد. دراین صورت

$$Z(R(+)M)^* = \{ (0,m) \mid m \in M^* \} \cup \{ (a,n) \mid a \in R^*, n \in M \,; \exists m \in M^*, am=0 \} \cup$$
$$\{ (a,n) \mid a \in Z(R)^*, n \in M \}$$

قضیه ۱-۱۸ : (ر. ک. [3, Theorem. 1])
هرحلقه جابجایی که n مقسوم علیه صفرغیربدیهی $(n \geq 1)$ داشته باشد، لزوماً متناهی است وحداکثر $(n+1)^2$ عضو دارد.

اکنون به تعریف گراف مقسوم علیه صفرو قضیه مهم مرتبط با آن می پردازیم.

تعریف ۱-۱۹ : گراف مقسوم علیه صـفرعبارت اسـت ازگرافـی بـا رأسـهای $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$، کـه بـرای هـر x و y متمایزاز $Z(R)^*$، رأسهای x و y مجاورهستند اگروتنها اگر $x\,y = 0$. گراف مقسوم علیه صفر را با نماد $\Gamma(R)$ نشان می دهیم.

بدیهی است گراف مقسوم علیه صفرحلقه R یک گراف ساده است.

قضیه ۱-۲۰ : (ر. ک. [۳])
فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. دراین صورت $\Gamma(R)$ همبند اسـت و $diam\,(\Gamma(R)) \le 3$. بعـلاوه اگـر $\Gamma(R)$ شامل یک دور باشد آنگاه $gr\,(\Gamma(R)) \le 4$.

فصل دوم

گراف کامل درحلقه جابجایی

۲-۱ گراف کامل حلقه جابجایی R، وقتی که $Z(R)$ ایده الی از R می باشد

تعریف ۲-۱-۱ : گراف کامل حلقه R را با $T(\Gamma(R))$ نشان داده وآن گرافی است که رأس های آن عضوهای R می باشند. دراین گراف دو عضو x و y مجاورند اگرو تنها اگر $x+y\in Z(R)$.

ازاین پس $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ و $Z(\Gamma(R))$ به ترتیب زیرگراف (القا شده) از $T(\Gamma(R))$ با رأس هایی در $\mathrm{Reg}(R)$ و $Z(R)$ است و $Nil(\Gamma(R))$ زیرگراف (القا شده) از $T(\Gamma(R))$ (ودرنتیجه از $Z(\Gamma(R))$) با رأس هایی در $Nil(R)$ است. ($Nil(R)\subseteq Z(R)$).

می دانیم که $Z(R)$ لزوماً یک ایده ال نیست. برای اینکه $Z(R)$ یک ایده ال باشد، کافی است $Z(R)$ نسبت به عمل جمع بسته باشد. دراین بخش فرض می کنیم که $Z(R)$ یک ایده ال است.

تبصره ۲-۱-۲ : فرض کنید R یک حلقه جابجایی و $Z(R)$ مجموعه مقسوم علیه های صفرآن یک ایده ال باشد. دراین صورت:

(الف) $Z(R)$ یک ایده ال اول از R است.

(ب) اگر R متناهی باشد، آنگاه $Z(R)$ یک ایده ال ماکزیمال از R است و دراین صورت $Nil(R)=Z(R)$.

برهان: (الف) فرض کنید $xy\in Z(R)$. پس عضوغیرصفر $a\in R$ چنان موجود است که $xya=0$. اگر $ya=0$، آنگاه $y\in Z(R)$ و اگر $ya\neq 0$، آنگاه $x\in Z(R)$ واین نشان می دهد که $Z(R)$ یک ایده ال اول است.

پس اگر $Z(R)$ یک ایده ال باشد، $Z(R)$ یک ایده ال اول است ودرنتیجه $R/Z(R)$ دامنه صحیح می باشد.

(ب) فرض کنید R یک حلقه متناهی باشد. دراین صورت $R/Z(R)$ یک دامنه صحیح متناهی است. درنتیجه $R/Z(R)$ یک میدان است. ازاین رو $Z(R)$ یک ایده ال ماکزیمال از R خواهد بود. اگر R یک حلقه متناهی باشد و $0\neq a\in R$ یک عضوغیریکال R باشد، دراین صورت $\{a^n \mid n\in N\}$ دارای عضو تکراری است. این نشان می دهد که $a\in Nil(R)$. ازاین رو $Nil(R)$ یک ایده ال ماکزیمال از R است.

در قضایای زیر β,α می توانند اوردینال های نامتناهی نیز باشند.

قضیه ۲-۱-۳ : فرض کنید R یک حلقه جابجایی بطوریکه $Z(R)$ ایده الی از R باشد.

$$\left|R/Z(R)\right|=\beta \quad \text{و} \quad |Z(R)|=\alpha$$

(۱) اگر $2\in Z(R)$ باشد، آنگاه $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ اجتماعی از $(\beta-1)$، گراف کامل K^{α} متمایزاست.

(۲) اگر $2\notin Z(R)$ باشد، آنگاه $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ اجتماعی از $(\frac{\beta-1}{2})$، گراف دوبخشی کامل $K^{\alpha,\alpha}$ متمایزاست.

برهان: (۱) فرض کنید $2\in Z(R)$ و $x\in \mathrm{Reg}(R)$ باشد ، دراین صورت هرهمدسته $x+Z(R)$ زیرگراف کامل از $\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R))$ است. چون برای هر z_1 و z_2 از $Z(R)$، همچنین $2\in Z(R)$ داریم :

$$(x+z_1)+(x+z_2)=2x+z_1+z_2\in Z(R)\,.$$

ازطرف دیگربه ازای هر $y\in \mathrm{Reg}(R)$ و $z_1\,,\,z_2\in Z(R)$، عضوهای $x+z_1$ و $y+z_2$ برای دوهمدسته متمایز $x+Z(R)$ و $y+Z(R)$ مجزا هستند. چون اگرمجاورباشند داریم:

$$(x+y+z_1+z_2)=(x+z_1+y+z_2)\in Z(R)\,.$$

آنگاه

$$x+y=((x+z_1)+(y+z_2)-(z_1+z_2))\in Z(R)\,.$$

درنتیجه $x-y=(x+y)-2y\in Z(R)$. لذا $x+Z(R)=y+Z(R)$ که این متناقض با متمایز بودن همدسته های $x+Z(R)$ و $y+Z(R)$ است. بنابراین اجتماع زیرگراف های کامل $x+Z(R)$ برابر $\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R))$ است.

$$\bigcup\nolimits_{x\in\,\mathrm{Reg}(R)}(x+Z(R))=\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R)).$$

چون $\left|R/Z(R)\right|=\beta$ و $0\notin \mathrm{Reg}(R)$ پس تعداد همدسته های $x+Z(R)$ برابر $(\beta-1)$ است. ازطرفی

$\left|x+Z(R)\right|=\left|Z(R)\right|=\alpha$. لذا $\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R))$ ازاجتماع $(\beta-1)$ زیرگرافهای متمایز $x+Z(R)$ تشکیل شده است که هرکدام ازآنها گراف کامل K^{α} می باشد.

(۲) فرض کنید $2\notin Z(R)$ و $x\in \mathrm{Reg}(R)$. دراین صورت هیچ دوعضو $x+Z(R)$ مجاورنیستند. چون اگر مجاور باشند داریم:

$$(x+z_1)+(x+z_2)=(2x+z_1+z_2)\in Z(R)\,.$$

پس $2x\in Z(R)$ که متناقض با $2\notin Z(R)$.

ازطرف دیگرعضوهای $x+z_1$ و $-x+z_2$ برای دوهمدسته متمایز $x+Z(R)$ و $-x+Z(R)$ مجاورند. زیرا $(x+z_1)+(-x+z_2)=(z_1+z_2)\in Z(R)$.

پس $(x+Z(R))\bigcup(-x+Z(R))$ یک گراف دوبخشی کامل از $\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R))$ است. به علاوه اگر به ازای هر $y\in \mathrm{Reg}(R)$ و $z_1,z_2\in Z(R)$، عضوهای $x+z_1$ و $y+z_2$ ازدوهمدسته متمایز $x+Z(R)$ و $y+Z(R)$ مجاور باشند، آنگاه

$$x+y+(z_1+z_2)=((x+z_2)+(y+z_1))\in Z(R)\,.$$

پس

$$x+y=((x+z_2)+(y+z_1)-(z_1+z_2))\in Z(R).$$

درنتیجه $-x+Z(R)=y+Z(R)$ وهمچنین $|x+Z(R)|=|Z(R)|=\alpha$.

لذا $\operatorname{Reg}(\Gamma(R))$ ازاجتماع $(\frac{\beta-1}{2})$ زیرگراف متمایز $(x+Z(R))\bigcup(-x+Z(R))$ تشکیل شده که هرکدام ازآنها گراف دوبخشی کامل $K^{\alpha,\alpha}$ می باشد .

نکته ۲-۱-۴ : (الف) اگر $Z(R)=\{0\}$ (یعنی اگر R دامنه صحیح باشد)، آنگاه $2\in Z(R)$ اگروتنها اگر $Char(R)=2$.

(ب) اگر R دامنه صحیح با شرط $Char(R)=2$ باشد، آنگاه $\operatorname{Reg}(\Gamma(R))$ اجتماعی از $(\beta-1)$، گراف کامل K^1 متمایزاست.

(ج) اگر R دامنه صحیح با شرط $Char(R)\neq 2$ باشد، آنگاه $\operatorname{Reg}(\Gamma(R))$ اجتماعی از $(\frac{\beta-1}{2})$، گراف دوبخشی کامل $K^{1,1}$ متمایزاست.

برهان: (الف) $(\Rightarrow)$ اگر $Char(R)=2$، آنگاه به ازای هر $0\neq x\in R$ داریم، $2x=(1+1)x=x+x=0$ و این نشان می دهد که $2\in Z(R)$.

$(\Leftarrow)$ فرض کنید $2\in Z(R)$. پس عضو $0\neq x\in R$ چنان موجود است که $2x=(1+1)x=0$. چون R دامنه صحیح است پس $1+1=2=0$ یا $x=0$. بنابراین با توجه به فرض $1+1=2=0$. لذا $Char(R)=2$.

(ب) اگر $Char(R)=2$، انگاه با توجه به (الف) $2\in Z(R)$. چون R دامنه صحیح است (یعنی $Z(R)=\{0\}$)، پس $|Z(R)|=\alpha=1$. بنابراین $\operatorname{Reg}(\Gamma(R))$ اجتماعی از $(\beta-1)$، گراف کامل K^1 متمایزاست.

(ج) اگر $Char(R)\neq 2$، انگاه با توجه به (الف) $2\notin Z(R)$. چون R دامنه صحیح است (یعنی $Z(R)=\{0\}$)، پس $|Z(R)|=\alpha=1$. بنابراین $\operatorname{Reg}(\Gamma(R))$ اجتماعی از $(\frac{\beta-1}{2})$، گراف دوبخشی کامل $K^{1,1}$ متمایزاست.

قضیه ۲-۱-۵ : فرض کنید R یک حلقه جابجایی بطوریکه $Z(R)$ یک ایده الی از R باشد. دراین صورت:

(۱) $\operatorname{Reg}(\Gamma(R))$ کامل است اگروتنها اگر $\frac{R}{Z(R)}\cong Z_2$ یا $R\cong Z_3$.

(۲) $\operatorname{Reg}(\Gamma(R))$ همبند است اگروتنها اگر $\frac{R}{Z(R)}\cong Z_2$ یا $\frac{R}{Z(R)}\cong Z_3$.

(۳) $\operatorname{Reg}(\Gamma(R))$ (و $Z(\Gamma(R))$ و $T(\Gamma(R))$) کلاً ناهمبند است، اگروتنها اگر R یک دامنه صحیح با $Char(R)=2$ باشد.

فرض کنید $\left|{}^{R}\!\big/_{Z(R)}\right|=\beta$ و $\left|Z(R)\right|=\alpha$.

برهان: (۱) با توجه به قضیه **۲-۱-۳** ، $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ کامل است اگروتنها اگر $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ گراف کامل K^{α} یا گراف دوبخشی کامل $K^{1,1}$ باشد.

اگر $2\in Z(R)$ باشد، آنگاه $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ اجتماعی از $(\beta-1)$، گراف کامل K^{α} متمایزاست. چون طبق فرض قضیه $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ کامل است، پس باید یک گراف کامل K^{α} وجود داشته باشد، درغیراین صورت با توجه به اینکه K^{α}ها متمایزهستند، $\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R))$ کامل نمی شود. پس $\beta-1=1$، درنتیجه $\beta=2$، بنابراین $\dfrac{R}{Z(R)}\cong Z_2$.

اگر $2\notin Z(R)$ باشد، آنگاه $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ اجتماعی از $(\dfrac{\beta-1}{2})$، گراف دوبخشی کامل $K^{\alpha,\alpha}$ متمایزاست. چون طبق فرض قضیه $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ کامل است، پس باید $\alpha=1$ و یک گراف $K^{1,1}$ وجود داشته باشد، درغیراین صورت با توجه به اینکه $K^{\alpha,\alpha}$ها متمایزهستند، $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ کامل نمی شود. پس $\dfrac{\beta-1}{2}=1$. درنتیجه $\beta=3$ و $\left|Z(R)\right|=\alpha$ و $\alpha=1$ پس $Z(R)=\{0\}$. درنتیجه $R\cong\dfrac{R}{Z(R)}\cong Z_3$.

(۲) با توجه به قضیه **۲-۱-۳** ، $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ همبند است اگروتنها اگر $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ گراف کامل K^{α} یا گراف دوبخشی کامل $K^{\alpha,\alpha}$ باشد.

اگر $2\in Z(R)$ باشد، چون طبق فرض قضیه $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ همبند است، پس باید یک گراف کامل K^{α} وجود داشته باشد، لذا $\beta-1=1$. در نتیجه $\beta=2$. بنابراین $\dfrac{R}{Z(R)}\cong Z_2$.

اگر $2\notin Z(R)$ باشد، چون طبق فرض قضیه $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ همبند است، پس باید یک گراف دوبخشی کامل $K^{\alpha,\alpha}$ وجود داشته باشد، لذا $\dfrac{\beta-1}{2}=1$، در نتیجه $\beta=3$. بنابراین $\dfrac{R}{Z(R)}\cong Z_3$.

(۳) $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ کلاً ناهمبند است اگروتنها اگراجتماع متمایزاز گراف کامل K^1 باشد.

با توجه به قضیه ۲-۴(ب)، R باید یک دامنه صحیح باشد که $2\in Z(R)$. پس $Char(R)=2$.

قضیه ۲-۱-۶ : فرض کنید R یک حلقه جابجایی بطوریکه $Z(R)$ یک ایده ال از R باشد. دراین صورت:

(۱) $diam\,(\mathrm{Re}\,g(\Gamma(R))=0$ و ۱ و ۲ یا ∞. بخصوص اگر $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ همبند باشد، آنگاه $diam\,(\mathrm{Re}\,g(\Gamma(R))\le 2$.

(۲) $gr\,(\mathrm{Reg}(\Gamma(R))=$ ۳ و ۴ یا ∞. بخصوص اگر $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ شامل یک دورباشد، آنگاه $gr\,(\mathrm{Reg}(\Gamma(R))\le 4$.

برهان: (۱) فرض کنید $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ همبند است. با توجه به قضیه **۲-۱-۳** ، $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ یک تک نقطه ای یا یک گراف کامل یا یک گراف دوبخشی کامل است.

درگراف کامل چون بین هردو رأس یک یال وجود دارد، بنابراین $diam\,(\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R)))=1$. درگراف دوبخشی کامل چون بین هردو رأس مسیری وجود دارد، بنابراین $diam\,(\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R)))=2$. درنتیجه $diam\,(\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R)))\leq 2$. درغیراین صورت $diam\,(\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R)))=\infty$.

(۲) فرض کنید $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ شامل یک دورباشد. با توجه به قضیه **۲-۱-۳** ، $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ اجتماعی ازگرافهای کامل یا دوبخشی کامل است، که متمایزند.

اگر گراف کامل باشد، آنگاه $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ شامل یک دوربه طول ۳ است و اگر گراف دوبخشی کامل باشد، آنگاه $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ شامل یک دوربه طول ۴ است درنتیجه $gr\,(\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R)))\leq 4$. درغیراین صورت $gr\,(\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R)))=\infty$.

قضیه ۲-۱-۷ : فرض کنید R یک حلقه جابجایی بطوری که $Z(R)$ یک ایده ال از R باشد.

(۱) فرض کنید که G یک زیرگراف القا شده از $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ باشد و x و y دو رأس متمایزاز G باشند که توسط یک مسیرهمبندند. دراین صورت یک مسیربا طول حداکثر ۲ بین x و y وجود دارد. بخصوص اگر $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ همبند باشد، آنگاه $diam\,(\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R)))\leq 2$ است.

(۲) فرض کنید که x و y عناصرمتمایز $\mathrm{Reg}(R)$ باشند که توسط یک مسیرهمبند باشند. اگر $x+y\notin Z(R)$ (یعنی x و y مجاورنباشند)، آنگاه مسیرهای

$$x — (-y) — y \qquad \text{و} \qquad x — (-x) — y$$

به طول ۲ بین x و y در $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ وجود دارد .

برهان: (۱) اگر $x\,,\,y$ دو رأس متمایزاز G باشند، آنگاه مسیری به طول ۱ بین $x\,,\,y$ وجود دارد.

اگر $x\,,\,y\,,\,z$ سه رأس متمایزاز G باشند، آنگاه مسیری به طول ۲ بین $x\,,\,y\,,\,z$ وجود دارد.

اگر $x_1\,,\,x_2\,,\,x_3\,,\,x_4$ رأسهای متمایز G باشند، آنگاه یک مسیر به صورت $x_4 — x_3 — x_2 — x_1$

وجود دارد که $x_4\,,\,x_1$ مجاورند. زیرا

$$x_1+x_2\in Z(R)\ ,\ x_2+x_3\in Z(R)\ ,\ x_3+x_4\in Z(R).$$

درنتیجه $x_1+x_4=((x_1+x_2)-(x_2+x_3)+(x_3+x_4))\in Z(R)$. پس $x_4\,,\,x_1$ مجاورند، بنابراین بازمسیری به طول ۱ بین $x_4\,,\,x_1$ وجود دارد. پس یک مسیربا طول حداکثر ۲ بین $y\,,\,x$ وجود دارد.

(۲) با توجه به اثبات انجام شده در (۱) می بینیم مسیربین $x\,,\,y$ یا به طول ۱ یا به طول ۲ است. اگراز طول ۱ باشد آنگاه $x\,,\,y$ مجاورند و لذا $x+y\in Z(R)$ که این یک تناقض است، پس طول مسیر بین $x\,,\,y$ برابر ۲ است. این

نشان می دهد که عضو $z\in \mathrm{Reg}\,(R)$ چنان موجود است که y —— z —— x یک مسیربین x , y است، بنـابراین $z+y\in Z(R)$, $x+z\in Z(R)$. پس

$$x-y=((x+z)-(z+y))\in Z(R)\,.$$

چون $x\neq -x$ (درغیراین صورت $x-y\notin Z(R)$ که تناقض دارد) و

$y\neq -x$ (درغیراین صورت $x+y\in Z(R)$ که تناقض دارد) و $x+y\notin Z(R)$. پس

$$x —— (-x) —— y \quad \text{و} \quad x —— (-y) —— y$$

مسیرهایی به طول ۲ بین x , y در $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ هستند.

قضیه ۲-۱-۸ : فرض کنید R یک حلقه جابجایی بطوریکه $Z(R)$ یک ایده ال از R باشد.

۱- (a) $diam\,(\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R)))=0$ اگروتنها اگر $R\cong Z_2$.

(b) $diam\,(\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R)))=1$ اگروتنها اگر $\frac{R}{Z(R)}\cong Z_2$ و $R\ncong Z_2$.

(یعنی $\frac{R}{Z(R)}\cong Z_2$ و $|Z(R)|\geq 2$) یا $R\cong Z_3$.

(c) $diam\,(\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R)))=2$ اگروتنها اگر $\frac{R}{Z(R)}\cong Z_3$ و $R\ncong Z_3$.

(یعنی $\frac{R}{Z(R)}\cong Z_3$ و $|Z(R)|\geq ۲$).

(d) درغیراین صورت $diam\,(\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R)))=\infty$.

۲- (a) $gr\,(\mathrm{Reg}(\Gamma(R)))=3$ اگروتنها اگر $2\in Z(R)$ و $|Z(R)|\geq 3$.

(b) $gr\,(\mathrm{Reg}(\Gamma(R)))=4$ اگروتنها اگر $2\notin Z(R)$ و $|Z(R)|\geq 2$.

(c) درغیراین صورت $gr\,(\mathrm{Reg}(\Gamma(R)))=\infty$.

۳- (a) $gr\,(T(\Gamma(R)))=3$ اگروتنها اگر $|Z(R)|\geq 3$.

(b) $gr\,(T(\Gamma(R)))=4$ اگروتنها اگر $2\notin Z(R)$ و $|Z(R)|=2$.

(c) درغیراین صورت $gr\,(T(\Gamma(R)))=\infty$.

برهان: ۱- (a) $(\Leftarrow)$ چون $diam\,(\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R)))=0$، پس ازقضیه **۲-۱-۳** ، نتیجه مـی گیـریم کـه $2\in Z(R)$ و $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ تنهـا ازیـک گـراف کامـل K^{α} تـشکیل شـده اسـت کـه $\alpha=1$. چـون اگـر $\alpha>1$ باشـد آنگـاه $diam\,(\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R)))=1$، کـه تنـاقض دارد. پـس $|Z(R)|=1$ یعنـی $Z(R)=\{0\}$ و $\beta-1=1\Rightarrow\beta=2$.

درنتیجه $\left|R/Z(R)\right|=2$. لذا

$$R\cong\frac{R}{Z(R)}\cong Z_2\ .$$

$(\Rightarrow)$ بدیهی است.

(b) $(\Leftarrow)$ چون $diam\,(\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R)))=1$، پس ازقضیه **۲-۱-۳** ، نتیجه می گیریم که $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ از یک گراف کامل K^{α} یا یک گراف دوبخشی کامل $K^{\alpha,\alpha}$ تشکیل شده است. فـرض کنیـد کـه $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ از یـک گـراف کامـل K^{α} تشکیل شده است پس $\beta-1=1$ یعنی $\beta=2$. درنتیجه $\left|R/Z(R)\right|=2$. لذا

$$\frac{R}{Z(R)}\cong Z_2\ .$$

اگر $\alpha=1$، آنگاه $diam\,(\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R)))=0$. پس $\alpha\geq 2$. درنتیجه $|Z(R)|\geq 2$.

فرض کنید که $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ از یک گراف دوبخـشی کامـل $K^{\alpha,\alpha}$ تـشکیل شـده اسـت پـس $\frac{\beta-1}{2}=1\Rightarrow\beta=3$. درنتیجه $\left|R/Z(R)\right|=3$. لذا $\frac{R}{Z(R)}\cong Z_3$. چون $diam\,(\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R)))=1$ پس $\alpha=1$. لذا $|Z(R)|=1$. پـس $Z(R)=\{0\}$. درنتیجه $R\cong Z_3$.

$(\Rightarrow)$ بدیهی است.

(c) $(\Leftarrow)$ چون $diam\,(\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R)))=2$، پس ازقضیه **۲-۱-۳** ، نتیجه می گیریم که $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ از یک گراف دوبخشی کامل $K^{\alpha,\alpha}$ تشکیل شـده اسـت. بنـابراین $\frac{\beta-1}{2}=1\Rightarrow\beta=3$. پـس $\frac{R}{Z(R)}\cong Z_3$ و $\alpha\neq 1$. چـون اگـر $\alpha=1$، آنگاه $diam\,(\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R)))=1$، که تناقض دارد. پس $\alpha\geq 2$، درنتیجه $|Z(R)|\geq 2$.

می دانیم که $|Z_3|=\left|\frac{R}{Z(R)}\right|=\frac{|R|}{|Z(R)|}$. اگر $|R|=|Z_3|$، آنگاه $|Z(R)|=1$ پس $Z(R)=\{0\}$ که تناقض دارد.

$(\Rightarrow)$ بدیهی است.

(d) درغیراین صورت بنا به قضیه **۲-۱-۶** ، $diam\,(\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R)))=\infty$.

۲- (a) $(\Leftarrow)$ چـــون $gr\,(\mathrm{Reg}\,(\Gamma(R)))=3$ ، پـــس ازقـــضیه **۲-۱-۳** ، نتیجـــه مـــی گیـــریم کـــه $2\in Z(R)$ و $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ ازاجتماعی ازگرافهای کامل K^{α} با $\alpha\geq 3$ تشکیل شده است. پس $|Z(R)|\geq 3$.