



دانشگاه تبریز  
دانشکده علوم ریاضی  
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته  
ریاضی کاربردی، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

# بررسی نظم و آشوب در سیستم‌های همیلتونی با استفاده از روش شاخص هم‌ترازی زیرین

اساتید راهنما

دکتر حسین خیری و دکتر علی اصغر جدیری اکبر فام

استاد مشاور

دکتر قربانعلی حقیقت‌دوست

پژوهشگر

وحید صادقی اسلام

تیر ۱۳۹۱

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

تقدیم بہ:

یگانہ منجی عالم بشریت

و آن ہابی کہ بر من حقی دارند

## خدایا...

گواهی می‌دهم که خدایکتا، انبازی نذار و بی‌بمست. گواهی از روی اعتقاد و ایمان، بی‌آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می‌دهم که محمد (ص) بنده او و پیامبر اوست. او را بفرستاد بادی آسکار، و باشنازه بی‌پیدار، و قرآنی بنشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا کرد و دودی از دلها بزداید، و با حجت و دلیل بلمزم فرماید.

به من زیستنی عطا کن که در بخت مرگ، بر بی‌شمی بخت ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مردنی عطا کن که بر بهبود کیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

به من توفیق تلاش در سنگست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌بمراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، خداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

خدایا! اگر در پرسش خود مانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رسکاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهمایهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

## پاس کزاری... .

پاس خداوندگار حکیم را که بالطف بی کران خود، آدمی رازیور عقل آراست.  
در آغاز وظیفه خودمی دانم از زحمات بی دریغ اساتید راهنمایی عزیزم، آقای دکتر حسین خیری و دکتر علی اصغر جدیری اکبرفام، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.  
از جناب آقای دکتر قربانعلی حقیقت دوست که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجناب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.  
از جناب آقای دکتر کاظم قنبری که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل فرمودند و این رساله را در کمال صبر و حوصله مورد بررسی و ارزیابی قرار دادند، کمال تشکر را دارم.  
از راهنمایی های دوستان عزیزم، بخصوص آقای حسین فضلی کمال تشکر و قدردانی را دارم.  
در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجود مقدس شان را و تشکر می کنم از برادر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودش، که در این سردترین روزگار ان، بهترین پشتیبان من بود.

وحید صادقی اسلام  
تیر ۱۳۹۱

نام خانوادگی: صادقی اسلام	نام: وحید
عنوان پایان نامه: بررسی نظم و آشوب در سیستم‌های همیلتونی با استفاده از روش شاخص هم‌ترازی زیرین	
استاد راهنما: دکتر حسین خیری و دکتر علی اصغر جدیری اکبر فام استاد مشاور: دکتر قربانعلی حقیقت دوست	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی معدلات دیفرانسیل گرایش: گرایش:	
دانشگاه: تبریز	دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ فارغ التحصیلی: تابستان ۱۳۹۱	تعداد صفحه: ۱۰۷
کلیدواژه‌ها: سیستم دینامیکی، سیستم پایستار، آشوب، سیستم همیلتونی، روش شاخص هم‌ترازی زیرین، معادلات تغییرات، نماهای لیاپانوف	
<p><b>چکیده:</b> در این پایان نامه، ابتدا مفاهیم اولیه در مورد سیستم‌های دینامیکی بیان می‌شود. سپس به بررسی سیستم‌های همیلتونی، خواص، معادلات تغییرات و نماهای لیاپانوف این نوع سیستم‌ها پرداخته می‌شود. رفتار سالی برای مدارهای آشوبناک توصیف و نشان داده می‌شود در این حالت، سالی بطور نمایی به صفر میل می‌کند، با آهنگی که وابسته به تفاضل بزرگترین دو نمای لیاپانوف، <math>\sigma_1</math> و <math>\sigma_2</math> به صورت، <math>SALI \propto e^{-(\sigma_1 - \sigma_2)t}</math> است. سپس روش سالی را برای تشخیص بین حرکت منظم و آشوبناک در سیستم‌های همیلتونی با دو و سه درجه آزادی به کار برده و این روش، با روش نماهای لیاپانوف مقایسه می‌شود.</p>	

# فهرست مطالب

چ	فهرست مطالب
د	لیست تصاویر
س	مقدمه
۱	سیستم‌های دینامیکی و مفاهیم اولیه
۲	۱.۱ نقاط بحرانی
۳	۲.۱ شار و سیستم دینامیکی
۵	۳.۱ نقاط حدی و دوره‌های حدی
۷	۴.۱ انشعاب
۸	۵.۱ خطی‌سازی
۸	۶.۱ سیستم‌های گسسته
۹	۷.۱ منیفلدهای پایدار و ناپایدار
۱۱	۸.۱ نگاشت‌های $T$ -زمانی
۱۱	۹.۱ مقاطع پوانکاره
۱۲	۱۰.۱ دسته‌های منحنی و مسیرهای متعامد
۱۵	۱۱.۱ آشوب
۱۶	۱۲.۱ تاریخچه آشوب
۱۹	۱۳.۱ آشوب و ویژگی‌های نظریه آشوب
۲۱	۱.۱۳.۱ اثر پروانه‌ای

۲۱	۲.۱۳.۱	خودسازمان‌دهی یا سازگاری پویا
۲۲	۳.۱۳.۱	خودمانایی یا خودشباهتی
۲۲	۴.۱۳.۱	جاذب عجیب
۲۵	۱۴.۱	روش‌های تشخیص رفتار آشوبناک
۲۵	۱.۱۴.۱	انشعاب
۲۵	۲.۱۴.۱	حساسیت به شرایط اولیه
۲۶	۳.۱۴.۱	نمای لیاپانوف
۳۶	۱۵.۱	کاربرد آشوب
۳۸		<b>سیستم‌های همیلتونی و خواص آن‌ها</b>
۳۸	۱.۲	سیستم‌های پایستار
۴۱	۲.۲	سیستم‌های همیلتونی
۴۲	۱.۲.۲	انتگرال‌پذیری
۵۹	۲.۲.۲	ساختار سیمپلیکی
۶۲	۳.۲.۲	نگاشت‌های پوانکاره‌ی شارهای همیلتونی
۶۶	۴.۲.۲	نماهای لیاپانوف
۶۸	۳.۲	سیستم‌های گرادیان
۷۲	۴.۲	معادلات تغییرات
۷۴		<b>بررسی نظم و آشوب در سیستم‌های همیلتونی</b>
۷۶	۱.۳	کاربرد روش سالی در سیستم‌های همیلتونی
۸۱	۲.۳	روش سالی برای تشخیص بین حرکت منظم و آشوبناک
۸۴	۳.۳	رفتار روش سالی برای حرکت منظم و آشوبناک
۸۴	۱.۳.۳	رفتار روش سالی برای حرکت منظم
۸۷	۲.۳.۳	رفتار روش سالی برای حرکت آشوبناک
۹۲	۴.۳	مقایسه‌ی روش سالی با روش‌های دیگر
۹۳	۱.۴.۳	مقایسه‌ی روش سالی با روش نمای لیاپانوف
۹۳	۲.۴.۳	مقایسه‌ی روش سالی با آزمون ۰-۱



۳.۴.۳ مقایسه‌ی روش سالی با سطح مقطع پوانکاره . . . . . ۹۴

۱۰۰ نتایج

۱۰۱ مراجع

۱۰۳ واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

# لیست تصاویر

۳	۱.۱	همسایگی های $N$ و $N'$ در تعریف ۳.۱.۱ برای نقطه بحرانی مبدأ در $\mathbb{R}^2$ .
۴	۳.۱	همسایگی های $N$ و $N'$ در تعریف ۶.۱.۱ برای نقطه بحرانی مبدأ در $\mathbb{R}^2$ .
۴	۲.۱	همسایگی های $N$ و $N'$ در تعریف ۴.۱.۱ برای نقطه بحرانی مبدأ در $\mathbb{R}^2$ .
	۴.۱	تقاطع هموکلنیک ابتدایی منیفلدهای پایدار و ناپایدار نقطه‌ی ثابت $p$ ، خطوط هموار منیفلدها را نشان می‌دهند.
۱۰	۵.۱	مقطع پوانکاره در $n = 3$ ، نقاط نمونه برداری شده‌ای که برای آن‌ها $x_3 = c$ و $x_3 < 0$ برای مسیر نشان داده شده نقاط $P1, P1$ و $P3$ نمونه برداری شده‌اند.
۱۲	۶.۱	دسته‌ی تمام دوایری که مرکز آن‌ها مبدا مختصات می‌باشد، خطوط نقطه چین عمود بر این دوایر هستند.
۱۳	۷.۱	دسته منحنی‌های عمود بر هم و شیب آن‌ها.
۱۴	۸.۱	یک لایه از جسم سیال که از قسمت پایین گرم شده است.
۱۷	۹.۱	چهار نوع مختلف جاذب. (الف) جاذب نقطه‌ای؛ (ب) دور حدی؛ (ج) جاذب سطحی مارپیچی و (د) جاذب عجیب.
۲۴	۱۰.۱	نمودار اشعاب سیستم لورنز برای $0 \leq r \leq 30$ : (الف) متغیر $x_1$ ؛ (ب) متغیر $x_2$ و (ج) متغیر $x_3$ .
۲۶	۱۱.۱	سری‌های زمانی $x_1(t)$ برای سیستم لورنز، حساسیت به شرایط اولیه را نشان می‌دهد. شرایط اولیه، $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$ و $x_1(0) =$ $x_2(0) = x_3(0) = 1.0001$ هستند.
۲۷		

- ۱۲.۱ بعد از یک تغییر مختصاتی مناسب، نگاشت کت را می‌توان به صورت  
 ۳۵ عملگری، روی توری از سطح یک چنبره در نظر گرفت. . . . .
- ۱.۲ جرم آویزان به فنر که  $m$  جرم،  $k$  ثابت فنر و  $x$  جابجایی جرم از حالت  
 ۴۱ تعادل است. . . . .
- ۲.۲ مدارهای نوسانگر همساز برای  $k = 200 \frac{N}{m}$ ،  $m = .1kg$  و مقادیر متفاوت  
 از انرژی کل  $E$ . مدارهای بسته دورهای حدی نیستند، زیرا شرایط اولیه  
 ۴۸ متفاوت مدارهای متفاوتی را تولید می‌کنند. . . . .
- ۳.۲ تصویر فاز برای مثال ۱۵.۲.۲. . . . .
- ۴.۲ تصویر فاز برای مثال ۱۶.۲.۲. . . . .
- ۵.۲ تصاویری از سطح مقطع پوانکاره برای سیستم (۱۶.۲) وقتی (آ)-(ب)  
 $\omega_2 = \omega_1 = 2$ ، (ج)-(د)  $\omega_1 = 8$ ،  $\omega_2 = 3$  و (ه)-(و)  $\omega_1 = \sqrt{2}$ ،  $\omega_2 = 1$ .  
 ۵۱ این‌ها تصاویری از یک سیستم چهار بعدی هستند. . . . .
- ۶.۲ تکانه‌ی زاویه‌ای ذره‌ی در حال دوران حول یک محور. . . . .
- ۸.۲ استوانه‌ی پایا از مساله اوربیتال متناظر به شرایط اولیه‌ی:  $m_1 = 10^5 kg$   
 ۵۴ . . . . .  $E = 5.3 \times 10^{-7} J$ ،  $m_2 = 10^3 kg$  و  $\ell = 120 kgm^2/s$ . . . . .
- ۷.۲ چنبره‌ی پایا از مساله اوربیتال متناظر به شرایط اولیه‌ی:  $m_1 = 10^5 kg$   
 ۵۴ . . . . .  $E = -1.67 \times 10^{-6} J$ ،  $m_2 = 10^3 kg$  و  $\ell = 100 kgm^2/s$ . . . . .
- ۹.۲ سطح پایا از مساله اوربیتال متناظر به شرایط اولیه‌ی:  $m_1 = 10^5 kg$   
 ۵۴ . . . . .  $E = 0$ ،  $10^3 kg$  و  $\ell = 115 kgm^2/s$ . . . . .
- ۱۰.۲ مساحت بی‌نهایت کوچک که توسط دو بردار بی‌نهایت کوچک  $(\delta p, \delta q)$  و  
 ۶۱  $(\delta \dot{p}, \delta \dot{q})$ ، برای سیستم‌های همیلتونی با درجه‌ی آزادی یک تعریف می‌شود. . . . .
- ۱۱.۲ نقاط بحرانی و مسیرهای سیستم گرادیان مثال ۴.۳.۲. . . . .
- ۱۲.۲ محاسبه‌ی عددی بزرگترین نمای مشخصه‌ی لیاپانوف، که  $y(t) = x(t) +$   
 ۷۲ . . . . .  $\omega(t)$ . . . . .
- ۱.۳ محاسبه‌ی عددی بزرگترین نمای لیاپانوف، بطوری که  $y(t) = x(t) + \omega(t)$ . . . . .
- ۳.۳ برای مدار منظم، حرکت روی یک چنبره اتفاق می‌افتد و دو بردار انحرافی  
 ۷۷ اولیه در جهت‌های مختلف به چنبره مماس می‌شوند. . . . .

- ۲.۳ برای مدارهای آشوبناک دو بردار انحرافی اولیه‌ی متفاوت، میل به هم‌راستا شدن در جهتی دارند که توسط بزرگترین نمای لیاپانوف تعریف می‌شود. ۷۷
- ۵.۳ عملگر وضعیت سالی برای مدار آشوبناک:  $x = 0, y = -0.25, p_x = 0.42081, p_y = 0$  از سیستم هنون-هیلز. ۸۱
- ۴.۳ عملگر وضعیت سالی برای مدار منظم:  $x = 0, y = 0.1, p_x = 0.49058, p_y = 0$  از سیستم هنون-هیلز. ۸۱
- ۷.۳ عملگر وضعیت سالی برای مدار آشوبناک:  $x = -0.07310, y = 0, z = 0$  از سیستم هنون-هیلز. ۸۱
- ۶.۳ عملگر وضعیت سالی برای مدار منظم:  $x = 0.01054, y = 0.05060, p_x = 0.07695, p_y = 0, p_z = 0.06760$  از سیستم (۴.۳). ۸۲
- ۸.۳ عملگر وضعیت سالی برای مدار آشوبناک:  $x = 0, y = -0.25, p_x = 0.11906, p_y = 0, p_z = 0$  از سیستم (۴.۳). ۸۲
- ۸۳ بردارهای انحرافی شکل ۵.۳ است. با بردارهای انحرافی که متفاوت از (آ) نمودار نماهای لیاپانوف و (ب) عملگر وضعیت سالی، برای مدار آشوبناک:  $x = 0, y = -0.01597, p_x = 0.49974, p_y = 0$  از سیستم (۳.۳). ۸۳
- ۱۰.۳ (آ) نمودار نماهای لیاپانوف و (ب) عملگر وضعیت سالی، برای مدار آشوبناک:  $x = -0.07310, y = 0, p_x = 0.07695, p_y = 0, z = 0$  از سیستم (۴.۳). ۸۴
- ۱۱.۳ عملگر وضعیت ضرایب:  $a_1, a_2, a_3, a_4$  از بردار انحرافی اولیه با شرایط اولیه‌ی:  $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 1$  از معادله‌ی (۹.۳). (آ) خط آبی و  $a_2$  خط قرمز؛ (ب) خط قرمز و  $a_4$  خط آبی با مقیاس لگاریتمی. مداری که از تابع همیلتونی (۱۰.۳) استفاده شده، دارای شرایط اولیه‌ی زیر است:  $x = -0.6, y = 0, p_x = 0, p_y = 1.99416$ . ۸۷
- ۱۲.۳ (آ) عملگر وضعیت سالی؛ (ب) نمودار نماهای لیاپانوف و (ج) نمودار تابع  $e^{-\sigma_1 t}$  به ازای  $\sigma_1 = 0.047$ ، برای مدار آشوبناک:  $x = 0, y = -0.25, p_x = 0.42081, p_y = 0$  از سیستم (۳.۳). ۹۰

- ۱۳.۳ (آ) عملگر وضعیت سالی؛ (ب) نمودار نماهای لیاپانوف و (ج) نمودار تابع  $e^{-(\sigma_1 - \sigma_2)t}$  به ازای  $\sigma_1 = 0.0107$  و  $\sigma_2 = 0.0005$ ، برای مدار آشوبناک:  $p_z = 0.06760$ ,  $p_y = 0$ ,  $p_x = 0.07695$ ,  $z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = -0.07310$
- ۹۱ . . . . . از سیستم (۴.۳) . . . . .
- ۱۴.۳ تصاویر سه-بعدی و دو-بعدی از سطح مقطع پوانکاره برای سیستم هنون-هیلز که سطح انرژی در این حالت با  $0.041466$  برابر است. . . . .
- ۹۵ . . . . .
- ۱۵.۳ صفحه‌ی قاطع پوانکاره برای سیستم همیلتونی (۳.۳) با شرایط اولیه‌ی متفاوت. . . . .
- ۹۶ . . . . .
- ۱۶.۳ تصاویر سه-بعدی و دو-بعدی از سطح مقطع پوانکاره برای سیستم (۴.۳) که سطح انرژی در این حالت با  $0.010165$  برابر است. . . . .
- ۹۷ . . . . .
- ۱۷.۳ صفحه‌ی مقطع پوانکاره برای سیستم همیلتونی (۴.۳) با شرایط اولیه‌ی متفاوت. . . . .
- ۹۸ . . . . .

## مقدمه و پیشینه پژوهش

سیستم دینامیکی، قانون معینی است که موقعیت هر نقطه را در فضای فاز با گذشت زمان شرح می‌دهد. بنابراین، در صورتی که مدل یک مساله کاربردی، به صورت یک سیستم دینامیکی باشد، با حل آن و دانستن وضعیت متحرک در یک لحظه خاص، می‌توان وضعیت آن را در لحظه‌های قبل و بعد پیش‌بینی کرد و کل اطلاعات را در مورد آن به دست آورد. از این رو، درک رفتار کیفی سیستم‌های دینامیکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

یک سیستم دینامیکی خودگردان به شکل

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) \quad (1)$$

بیان می‌شود. در صورتی که سیستم (۱) دو بعدی و یا خطی باشد، رفتار آشوبناک نخواهد داشت. بنابراین پدیده آشوب فقط در سیستم‌هایی حاصل می‌شود که سه بعدی یا بیشتر بوده و غیر خطی باشند. دانستن این که آیا مدارهای یک سیستم دینامیکی منظم یا آشوبناک هستند برای درک رفتار سیستم اساسی است. در سال‌های اخیر، روش‌های زیادی برای تشخیص منظم یا آشوبناک بودن سیستم‌های دینامیکی ارائه شده است.

روش معروف و معمولی که برای این منظور استفاده شده، محاسبه‌ی نمای لیاپانوف مشخصه‌ی ماکزیمال  $\sigma_1$  است. اگر  $\sigma_1 > 0$  باشد مدار آشوبناک است. بنتین و همکارانش<sup>۱</sup> بطور نظری مساله‌ی محاسبه‌ی همه‌ی نماهای مشخصه‌ی لیاپانوف را بررسی و یک الگوریتم برای محاسبه‌ی آن‌ها ارائه کردند [۵].

روش دیگر که برای این منظور استفاده شده، روش شاخص هم‌ترازی زیرین (سالی)<sup>۲</sup> است. روش سالی نخستین بار در سال ۲۰۰۱ میلادی توسط چی. اسککس<sup>۳</sup> معرفی شده و برای

<sup>۱</sup>Benettin

<sup>۲</sup>Smaller Alignment Index

<sup>۳</sup>Ch.Scoks

تشخیص حرکت منظم و آشوبناک مدارها، در نگاشت‌های سیمپلیتیک دو بعدی، چهاربعدی و شش بعدی به کار برده شده است [۲۲، ۲۴].

سیستم‌های همیلتونی کلاس خاصی از سیستم‌های دینامیکی هستند که برای اولین بار در فیزیک کلاسیک مطرح شدند و از یک اصلی بنام اصل همیلتون ناشی شدند، که این اصل به صورت زیر است: از بین همه‌ی مسیرهای ممکن که یک سیستم دینامیکی در یک فاصله زمانی معین می‌تواند طی کند، مسیری انتخاب می‌شود که کوتاهترین فاصله‌ی زمانی را داشته باشد [۷، ۱].

این پایان‌نامه که بر اساس مرجع [۲۳] تنظیم شده است، شامل سه فصل است و در آن به بررسی خواص سیستم‌های همیلتونی و تشخیص حرکت منظم و آشوبناک در این سیستم‌ها (از درجه‌ی آزادی دو و سه) با استفاده از روش شاخص هم‌ترازی زیرین و نماهای لیاپانوف پرداخته می‌شود.

در فصل اول، ابتدا مفاهیم اولیه در مورد سیستم‌های دینامیکی پیوسته از قبیل نقطه بحرانی، پایداری نقطه بحرانی، شار، نقطه حدی، دور حدی، آشوب، برخی روش‌های تشخیص آشوب و غیره بیان شده است. سپس، مطالب ذکر شده به سیستم‌های دینامیکی گسسته تعمیم داده شده است.

در فصل دوم، پس از تعریف سیستم‌های پایستار، سیستم‌های همیلتونی و خواص آن‌ها از قبیل انتگرال‌پذیری، ساختار سیمپلیتیک، نگاشت‌های پوانکاره‌ی شارهای همیلتونی و نحوه‌ی تعیین نماهای لیاپانوف این سیستم‌ها بیان شده است. سپس، ارتباط سیستم‌های همیلتونی و سیستم‌های گرادیان بیان و معادلات تغییرات سیستم‌های همیلتونی بررسی شده است.

در فصل سوم، پس از شرح روش سالی، این روش برای دو سیستم همیلتونی به ترتیب از درجه‌ی آزادی دو و سه به کار برده شده و رفتار آن برای حرکت منظم و آشوبناک توضیح داده شده است. سپس، رابطه‌ی این روش با روش نمای لیاپانوف بررسی و مقایسه‌ی بین آن‌ها صورت گرفته است.

لازم به ذکر است که همه برنامه‌های لازم با نرم‌افزار *Maple12* نوشته شده است. به دلیل حجم زیاد این برنامه‌ها، به جای اینکه در آخر پایان‌نامه پیوست شود، در یک *CD* ضمیمه شده است. همچنین، در شبیه‌سازی‌های عددی از روش رانگ-کوتا<sup>۴</sup> استفاده شده است.

<sup>۴</sup>Runge-Kutta

کتاب طبیعت به زبان ریاضی نگاشته شده است.

گالیه (۱۷۸۱-۱۸۴۰)

## فصل ۱

# سیستم‌های دینامیکی و مفاهیم اولیه

فضای فاز برای یک سیستم  $n$ -بعدی مجموعه‌ی کاملی است از وضعیت‌هایی که برای سیستم می‌تواند اتفاق بیفتد. یک سیستم دینامیکی مجموعه‌ای از همه‌ی مسیرهای ممکن فضای فازی است و در آن با دانستن وضعیت فعلی می‌توان وضعیت آینده‌ی سیستم را تعیین کرد. چنین سیستم‌هایی می‌توانند نسبت به زمان گسسته یا پیوسته باشند. سیستم‌های گسسته بطور معمول با نگاشت تکراری به صورت

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

توصیف می‌شوند، در حالی که سیستم‌های پیوسته بطور معمول توسط معادله‌ی دیفرانسیل به صورت

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = F(x),$$

توصیف می‌شوند. بیشتر آنچه برای سیستم‌های پیوسته برقرار است با روندی مشابه برای سیستم‌های گسسته به کار برده می‌شود. در واقع اغلب مطلوب است که سیستم پیوسته را با استفاده از نگاشت‌های پوانکاره یا نگاشت‌های  $\tau$ -زمانی به صورت سیستم گسسته تبدیل کنند، به ویژه وقتی که با سیستم‌های با بعد بالاتر مواجه می‌شوند، زیرا در این حالت نمایش بهتری از مسیرها بدست می‌آید.



## ۱.۱ نقاط بحرانی

تعریف ۱.۱.۱. سیستم‌هایی به صورت

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

که متغیر مستقل  $t$  فقط در دیفرانسیل  $dt$  در سمت چپ بوده و به طور صریح در تابع  $X(x)$  در سمت راست ظاهر نمی‌گردد، یک سیستم خودگردان نامیده می‌شود.

یکی از بهترین روش‌ها برای درک رفتار کیفی یک سیستم دینامیکی خودگردان، پیدا کردن برخی نقاط خاص سیستم و بررسی رفتار سیستم در همسایگی این نقاط است.

تعریف ۲.۱.۱. سیستم خودگردان (۱.۱) را در نظر بگیرید. یک نقطه بحرانی (نقطه تعادل، نقطه ثابت)، نقطه‌ای است که در معادله  $\dot{x} = X(x) = 0$  صدق می‌کند. اگر یک جواب از این نقطه شروع شود، برای همیشه در آنجا باقی می‌ماند.

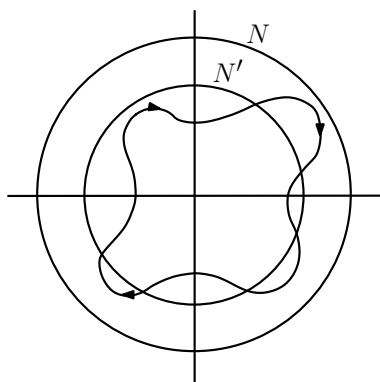
نقاط بحرانی در بررسی رفتار سیستم‌های دینامیکی از اهمیت خاصی برخوردار است و براساس آن می‌توان نحوه تحول سیستم را درک کرد. رفتار جواب سیستم (۱.۱) در همسایگی هر نقطه بحرانی، فقط و فقط به صورت یکی از سه حالت به طور مجانبی پایدار، پایدار خنثی و ناپایدار است.

تعریف ۳.۱.۱. نقطه بحرانی  $x_0$  از (۱.۱) را پایدار گویند هرگاه برای هر همسایگی  $N$  از  $x_0$  یک همسایگی کوچک‌تر  $N' \subseteq N$  از  $x_0$  وجود داشته باشد به طوری که هر مسیری که وارد  $N'$  می‌شود، با افزایش  $t$ ، در  $N$  باقی بماند. شکل ۱.۱ را ببینید.

تعریف ۴.۱.۱. نقطه بحرانی  $x_0$  از (۱.۱) را به طور مجانبی پایدار گویند هرگاه

۱. پایدار باشد؛

۲. یک همسایگی  $N$  از  $x_0$  وجود داشته باشد به طوری که هر مسیری که وارد  $N$  می‌شود با افزایش  $t$ ، به  $x_0$  میل کند.



شکل ۱.۱: همسایگی‌های  $N$  و  $N'$  در تعریف ۳.۱.۱ برای نقطه بحرانی مبدأ در  $\mathbb{R}^2$ .

توجه کنید که در تعریف پایداری، هر مسیری اگر به اندازه کافی در نزدیکی  $x_0$  باشد، به اندازه دلخواه در نزدیکی آن باقی می‌ماند. اما پایداری مجانبی، قوی‌تر از پایداری است؛ زیرا علاوه بر پایداری ایجاب می‌کند که با افزایش  $t$ ، هر مسیری به اندازه کافی به  $x_0$  نزدیک شود. این خاصیت، در شکل ۲.۱ نشان داده شده است.

**تعریف ۵.۱.۱.** نقطه بحرانی  $x_0$  از (۱.۱) را **پایدار خنثی** گویند هرگاه پایدار باشد اما به طور مجانبی پایدار نباشد.

**تعریف ۶.۱.۱.** نقطه بحرانی  $x_0$  از (۱.۱) را **ناپایدار** گویند هرگاه پایدار نباشد.

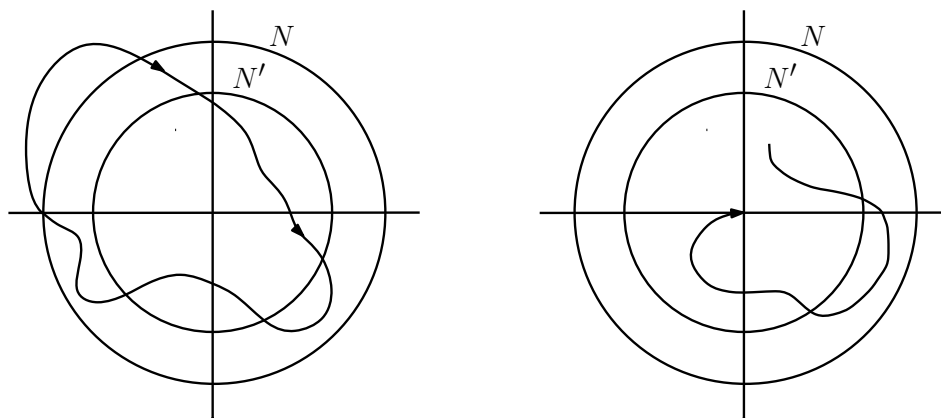
به عبارت دیگر، یک همسایگی  $N$  از نقطه بحرانی  $x_0$  وجود دارد به طوری که برای هر همسایگی  $N' \subseteq N$ ، حداقل یک مسیر وجود دارد که وارد  $N'$  می‌شود ولی در  $N$  باقی نمی‌ماند. شکل ۳.۱ را ببینید.

## ۲.۱ شار و سیستم دینامیکی

مساله مقدار اولیه

$$\dot{x} = X(x), \quad x(0) = x_0 \quad (2.1)$$

را در نظر بگیرید.



شکل ۲.۱: همسایگی‌های  $N$  و  $N'$  در  $\mathbb{R}^2$  برای نقطه بحرانی مبدأ در  $\mathbb{R}^2$ .  
 شکل ۳.۱: همسایگی‌های  $N$  و  $N'$  در  $\mathbb{R}^2$  برای نقطه بحرانی مبدأ در  $\mathbb{R}^2$ .

**تعریف ۱.۲.۱.** فرض کنید  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  و  $X \in C^1(D)$  باشد. اگر به ازای  $x_0 \in D$ ،  $\phi(t, x_0)$  جواب مساله مقدار اولیه (۲.۱) روی بازه‌ی  $I$  باشد، در این صورت، به ازای هر  $t \in R$  مجموعه‌ای از نگاشت‌های  $\phi_t : D \rightarrow D$  که به صورت  $\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$  تعریف می‌شوند، شار<sup>۱</sup> سیستم  $\dot{x} = X(x)$  نامیده می‌شوند.

### ویژگی‌های شار $\phi_t$

تابع  $\phi_t$  که هر  $x_0 \in D$  را به نقطه  $\phi_t(x_0)$  می‌نگارد، دارای ویژگی‌های زیر است.

$$۱. \phi_0(x) = x$$

$$۲. \text{ به ازای هر } t, s \in \mathbb{R} \text{؛ } \phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x))$$

$$۳. \text{ به ازای هر } t \in \mathbb{R} \text{، } \phi_t^{-1} = \phi_{-t}$$

سیستم دینامیکی، تابع  $\phi_t(x)$  است که به ازای  $t \in \mathbb{R}$  و  $x \in D$  تعریف شده است به طوری که موقعیت نقاط  $x \in D$  را نسبت به زمان توصیف می‌کند. حال می‌توان سیستم دینامیکی را به زبان ریاضی به صورت دقیق تعریف کرد.

**تعریف ۲.۲.۱.** یک سیستم دینامیکی روی  $D$ ، نگاشت مشتق‌پذیر پیوسته  $\phi_t : D \rightarrow D$  است به طوری که در ویژگی‌های شار صدق می‌کند.

<sup>۱</sup>Flow

### ۳.۱ نقاط حدی و دوره‌های حدی

در بسیاری از مسایل، خواص کلی مسیرها خیلی بیشتر از خواص موضعی مورد توجه هستند. خواص کلی مسیرها، خواصی هستند که رفتار مسیرها را در محدوده وسیعی از صفحه فاز بیان می‌کنند و عموماً خیلی مشکل می‌توان به این خواص دست یافت. یکی از راه‌هایی که می‌تواند ما را به این هدف برساند، این است که بررسی کنیم آیا سیستم غیرخطی  $\dot{x} = X(x)$  دارای مسیر بسته است یا خیر؟ جستجوی جواب‌های متناوب سیستم  $\dot{x} = X(x)$ ، به یافتن مسیرهای بسته منجر می‌شود. می‌دانیم که یک سیستم خطی دارای مسیرهای بسته است اگر و فقط اگر مقادیر ویژه ماتریس ضرایب آن، موهومی محض باشند. یک سیستم غیرخطی می‌تواند دارای یک مسیر بسته منفرد باشد. بدین مفهوم که در نزدیکی این مسیر بسته، مسیرهای بسته دیگری واقع نباشند.

**تعریف ۱.۳.۱.** فرض کنید  $x$  نقطه‌ای در تصویر فاز از شار  $\phi_t$  باشد. در این صورت،

• نقطه  $y$  را  $(-w) - \alpha$  حد  $x$  گویند هرگاه دنباله  $\{t_n\}$  وجود داشته باشد به طوری که وقتی  $t_n \rightarrow -\infty$  ( $t_n \rightarrow +\infty$ )، رابطه  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(x) = y$  برقرار باشد.

• مجموعه نقاطی که  $(-w) - \alpha$  حد  $x$  هستند را مجموعه  $(-w) - \alpha$  حد  $x$  گویند و با  $L_\alpha(x)$  نشان می‌دهند.

**تعریف ۲.۳.۱.** مدار بسته  $l$  را دور حدی گویند هرگاه شامل نقطه بحرانی نباشد و برای برخی  $x$ ‌هایی که در  $l$  نیستند،  $l \subset L_w(x)$  یا  $l \subset L_\alpha(x)$  باشد. به عبارتی، هر مسیر متناوب منفرد را دور حدی می‌نامند.

**تعریف ۳.۳.۱.** فرض کنید  $l$  یک دور حدی باشد. در این صورت،

•  $l$  یک دور حدی پایدار است هرگاه در یک همسایگی از آن،  $L_w(x) = l$  باشد. به عبارت دیگر، در یک همسایگی از  $l$ ، مسیرها به طرف آن جذب شوند.

•  $l$  یک دور حدی ناپایدار است هرگاه در یک همسایگی از آن،  $L_\alpha(x) = l$  باشد. به عبارت دیگر، در یک همسایگی از  $l$ ، مسیرها از آن دور شوند.