بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

رساله دکتری

عنوان

روش هایی برای حل معادلات با مشتقات جزیی کسری

از

محمد رسول معصومی

استاد راهنما

دکتر آرمان عقیلی

دی ماه ۱۳۹۲

فهرست مطالب

فصل سوم: معادلات مرتبه کسری و دستگاه های مرتبه کسری

فصل چهارم: حل تحلیلی معادلات با مشتقات جزیی–کسری

منابع

چکیده

در فصل اول از این رساله، کاربرد جالبی از تبدیل لاپلاس را در محاسبه انتگرال ها بیان می کنیم. قضایای مقدماتی در بخش دوم از این فصل اثبات گردیده اند. همچنین در این فصل، وارون تبدیل لاپلاس برخی از توابع با استفاده از قضایایی همچون پُست – ویدر، تیچ مارچ و . . . و با استفاده از نمایش انتگرالی محاسبه می شوند. در ادامه، جواب برخی از معادلات انتگرال منفرد از مرتبه کسری را پیدا می کنیم و آنگاه، تبدیل اشتیلیس و وارون های مختلف آن و حل معادلات انتگرال منفرد با استفاده از وارون تبدیل اشتیلیس را بررسی می کنیم. در فصل دوم، قضیه پست – ویدر در دو بعد و تبدیل لاپلاس دو بعدی و کاربردهای آنها در محاسبه انتگرال ها مورد بررسی قرار گرفته است. قضایای این فصل، تعمیمی از قضایای فصل اول می باشد. در فصل سوم، جواب تحلیلی برخی از معادلات دیفرانسیل معمولی از مرتبه کسری و معادلات تاخیری کسری را جستجو کرده ایم. دستگاه های معادلات دیفرانسیل کسری هم در این فصل مورد مطالعه قرار گرفته اند. چندین روش برای حل معادلات خطی کسری در مقالات مختلف پیشنهاد شده است که از بین آنها تبدیل لاپلاس از اهمیت بیشتری برخوردار است. هدف این فصل، استفاده از تبدیل لاپلاس برای نمایش جواب دستگاه های دینامیکی کسری است. همان طور که می دانیم، دستگاه های دینامیکی معمولی، کاربردهای فراوانی در علوم مهندسی و فیزیک دارند. همچنین توجیه برخی از این دستگاه ها و معادلات، با توجه به قوانین فیزیکی موجود امکان پذیر است. در این فصل، هدف، توضیح معادلات و دستگاه های معمولی در حالت کسری و مقایسه جواب دقیق در حالت کسری با جواب دقیق در حالت معمولی با استفاده از نمودار جواب می باشد. معادلات خطی کسری به دلایل زیادی مورد توجه هستند، زیرا بسیاری از پدیده ها در طبیعت به صورت معادلات خطی فرمول بندی می شوند. از جمله معادلات خطی کسری که در این فصل در نظر گرفته شده، معادله ارتعاش نخ و معادله فنر می باشد. یکی از نکات برجسته در این فصل، حل معادلات کسری تاخیری می باشد. در فصل چهارم، جواب دقیق معادلات با مشتقات جزیی کسری از قبیل معادله موج و گرما و شارش را بر حسب تابع میتگ – لفلر

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \quad (z,\beta,\alpha\in\mathbb{C}),$$

و تابع رایت

$$W(\alpha,\beta;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\,\Gamma(\alpha k+\beta)} \quad (\alpha,\beta,z\in\mathbb{C})$$

به دست آورده ایم. همچنین در یکی از قسمت های فصل چهارم، معادلاتی را با استفاده از قضایای فصل اول از جمله قضیه تیچ مارچ حل کرده ایم. از نکات برجسته در این فصل، به کار بستن هم زمان تبدیلات فوریه و لاپلاس برای به دست آوردن جواب تحلیلی معادلات جزیی کسری می باشد. هر جا لازم بوده، با ارائه نمودارها، جواب ها را نمایش داده ایم.

کلید واژه ها و عبارات: حساب کسری، معادله با مشتقات جزیی کسری، مشتق کسری کاپوتو، تبدیل لاپلاس، تبدیل فوریه، معادلات انتگرال.

Abstract

In the first chapter of this thesis, we describe some interesting applications of the Laplace transform in computational of integrals. Basic theorems are proved in the second part of this chapter. Also in this chapter, the Laplace transform inverse of some functions are calculated using the theorems such as Post-Widder, Titchmarsh, ... and integral representation. In going on, we find the solution of some singular integral equations of fractional order, then we study the Stieltjes transform and its various inversions and solving singular integral equations using the Stieltjes transform inversion. In the second chapter, the Post-Widder theorem in two dimensions and two-dimensional Laplace transform and their applications in computational of integrals have been shown. Theorems of this chapter are a generalization of theorems of first chapter. In the third chapter, we survey the analytical solution of some ordinary differential equations of fractional order and fractional delay equation. Fractional differential equation systems have been studied in this chapter. Several methods for solving fractional linear equations have been proposed in various papers, that among them, the Laplace transform is more important. The purpose of this chapter is to use of the Laplace transform for representation of solving fractional dynamical systems. As we know, the typical dynamical systems have many applications in engineering and physics. Also, justification for some of these systems and equations according to physical laws is possible. In this chapter, the goal is to explain ordinary equations and systems in fractional case and comparison exact solution in fractional case with exact solution in normal case using charts. Fractional linear equations are considered for many reasons, because many phenomena in nature are formulated as linear equations. Among fractional linear equations considered in this chapter, are vibrating string equation and spring equation. Solving fractional delay equations is one of the highlight points of this chapter. In the fourth chapter, we obtain exact equation of fractional partial differential equations such as wave/heat/diffusion equations in terms of Mittag-Leffler function

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \quad (z,\beta,\alpha\in\mathbb{C}),$$

and Wright function

$$W(\alpha,\beta;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\,\Gamma(\alpha k+\beta)} \quad (\alpha,\beta,z\in\mathbb{C}).$$

In some parts of chapter four, we have solved the equations using first chapter's theorems such as Titchmarsh theorem. Highlight of this chapter is simultaneous applying of joint Fourier-Laplace transform to obtain analytical solution of fractional partial equations. Wherever is necessary, we represent the solutions with plotting.

Key Words and Phrases: Fractional calculus, Fractional partial differential equations, Caputo fractional derivative, Laplace transform, Fourier transform, Integral equations.

لیست تصاویر

تقدیر و تشکر

خداوند قادر و متعال را سپاس گزارم که به یاری او توانسته ام این دوره تحصیلی را سپری نمایم. همچنین از استاد عزیز و بزرگوارم آقای دکتر آرمان عقیلی به خاطر زحمت های فراوانی که هم به لحاظ علمی و هم معنوی برای من متحمل شده اند، کمال تشکر را دارم. در این جا لازم می دانم از اساتید داور پایان نامه به خاطر حضورشان در جلسه، قدردانی نمایم.

فصل اول

تبدیل لاپلاس تک بعدی و کاربردهای آن

مقدمه

معادلات دیفرانسیل (معمولی یا جزیی) ابزار تحلیلی پدیده های طبیعی در علومی که نیازمند مدل سازی و تحلیل اند، می باشند. بسیاری از پدیده ها برای سادگی تحلیل آنها، به صورت خطی مدل بندی می شوند. در این صورت با استفاده از روش های تحلیلی همانند تبدیل لاپلاس، فوریه و مِلین . . . می توانیم جواب این گونه معادلات خطی را بیابیم. یکی از این معادلات، معادله دیفرانسیل تاخیری می باشد. در این دستگاه ها، شخص کنترل کننده، وضعیت دستگاه را می بیند و تنظیمات لازم برای دستگاه را براساس مشاهدات خود انجام می دهد. چون این تنظیمات هرگز نمی توانند بلافاصله انجام شوند، لذا یک تاخیر بین مشاهده و اقدام کنترلی پیدا می شود. چنین دستگاه هایی در علوم بیولوژی و اقتصاد، فراوان دیده می شوند. معادلات دیفرانسیل تاخیری که در قرن هجدهم برای اولین بار توسط لاپلاس معرفی شد، برای توصیف دستگاه های دینامیکی با تاخیر زمانی استفاده می شوند. این قبیل معادلات بیشتر در طبیعت و مسائل کنترل تکنولوژیکی ظاهر می شوند. شکل کلی این معادلات به صورت زیر می باشد:

$$x'(t)=f(t,x(t),x(t-\tau)).$$

اخیرا چِن و مور [۴۶] پایداری دستگاه های کسری تک بعدی با عقب افتادگی زمانی را مورد مطالعه قرار دادند. همین کار را دِنگ و سایرین [۴۷] برای دستگاه های معادلات کسری با تاخیر زمانی چندگانه انجام دادند. گِجی و دیگران [۴۴] دستگاه چِن مرتبه کسری با تاخیر زمانی زیر را مطالعه کرده اند:

$$\begin{cases} {}_0D_t^{\alpha}x(t)=a(y(t)-x(t-\tau)) \\ {}_0D_t^{\alpha}y(t)=(c-a)x(t-\tau)-x(t)z(t)+c\,y(t) \\ {}_0D_t^{\alpha}z(t)=x(t)y(t)-b\,z(t-\tau) \end{cases}$$

بالِکار و گِجی [۴۵] معادلات تاخیری کسری غیر خطی به صورت زیر را با استفاده از روش عددی بررسی کرده اند؛

$${}_0D_t^{\alpha}y(t)=f(t,y(t),y(t-\tau)).$$

آنها همچنین جواب دستگاه معادلات تاخیری کسری را با همین روش عددی تخمین زده اند. جواب دقیق دستگاه معادلات تاخیری کسری با استفاده از تبدیل لاپلاس و جبر خطی نیز به دست می آید که در این رساله به آن پرداخته ایم.

اما همیشه وقایع فیزیکی به صورت خطی واقع نمی شوند. در طبیعت، پدیده هایی موجودند که با استفاده از مدل بندی غیر خطی بیان می شوند. یکی از پدیده ها، پدیده آشوب می باشد. پدیده های آشوبی، به کوچک ترین تغییر حساسیت نشان می دهند. یکی از این پدیده ها، وضعیت آب و هوایی است. یکی از دستگاه های آشوبی، دستگاه چن [۳۵] می باشد. شکل کلی این دستگاه به صورت معادله ماتریسی زیر است؛

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c-a & c & \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ -x(t)z(t) \\ x(t)y(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c-a & c & -x(t) \\ 0 & x(t) & -b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

لی و پِنگ [۳۷] این دستگاه را برای اولین بار با مرتبه کسری با یک الگوی عددی تحلیل کردند؛

$$\begin{cases} {}_0D_t^{\alpha_1}x(t)=a(y(t)-x(t)) \\ {}_0D_t^{\alpha_2}y(t)=(c-a)x(t)-x(t)z(t)+cy(t) \\ {}_0D_t^{\alpha_3}z(t)=x(t)y(t)-bz(t) \end{cases}$$

وقتی که $0<\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\le 1$ و $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. فلاحی و دیگران [۳۶] یک کاربرد از دستگاه چن را یافتند. وانگ و سایرین [۶۲] با استفاده از یک الگوی گسترش یافته عددی و تبدیل لاپلاس این دستگاه را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. لی و چِن [۳۹] آشفتگی را در دستگاه چن مرتبه کسری بررسی کردند. اما این دستگاه با روشی که تلفیقی از اغتشاش هموتوپی و تبدیل لاپلاس می باشد، نیز قابل بررسی است که این روش را در این رساله توضیح داده ایم.

معادلات موج، گرما و شارش در زمان های طولانی در زمینه های گوناگون، مطالعه شده و توسط روش های مختلفی از جمله روش جداسازی متغیرها، تابع گرین، تبدیل انتگرالی، روش های تقریبی، روش تفاضل متناهی حل شده اند. فوجیتا [۶۳] یک مساله نوع کشی برای معادله دیفرانسیل جزیی کسری

$$({}_0D_t^{\alpha}u)(x,t)=({}_0D_x^{\beta}u)(x,t)\quad (1\le\alpha\le 2\ ,\ 1\le\beta\le 2),$$

که در آن ${}_0D_x^{\beta}u$ مشتق جزیی کسری ریمان – لیوویل متناظر با x می باشد، در نظر گرفت. او وجود و یکتایی یک جواب $u(x,t)$ و نمایش برای چنین جوابی را ثابت کرد. اِشنایدر و ویس [۶۵] جواب ضمنی برای یک معادله شارش کسری را با $0<\alpha\le 1$ در نیم صفحه $D=\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^+$ با مرز $\partial D=\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$ و با شرایط مرزی خاص به دست آوردند. دی آریِتا و کالا [۶۶] چند معادله شارش کسری از نوع ویس - اشنایدر را توسط تبدیل لاپلاس و تبدیل مِلین مورد بحث قرار دادند. کوچوبِی [۶۷] مساله کشی زیر را بررسی کرد؛

$$({}^CD_t^{(\alpha)}u)(x,t)=Lu(x,t)\quad (0<\alpha<1\ ,\ x\in\mathbb{R}^n\ ,\ 0<t\le T),$$

$$u(x,t)=f(x),$$

هنگامی که ${}^CD_t^{(\alpha)}u$ مشتق کسری جزیی منظم کاپوتو متناظر با t تعریف شده به صورت

$$({}^CD_t^{(\alpha)}u)(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{u(x,s)ds}{(t-s)^{\alpha}}-\frac{u(x,0)}{t^{\alpha}}\right\},$$

در ضمن L، عملگر دیفرانسیل بیضوی مرتبه دوم با n متغیر به صورت زیر می باشد؛

$$L=\sum_{k,j}a_{kj}\frac{\partial^{k+j}}{\partial x_k\,\partial x_j}+\sum_k a_k\frac{\partial^k}{\partial x_k}+a.$$

مایناردی [۶۸ , ۶۹ , ۷۰] جواب یک معادله به شکل زیر را یافت:

$$({}_0^CD_t^{\alpha}u)(x,t)=\lambda^2\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}\quad (\alpha>0\ ,\ \lambda>0),\qquad (1-0)$$

که در آن $x\in\mathbb{R}$، $t>0$ و $0<\alpha\le 2$ و ${}_0^CD_t^{\alpha}u$ مشتق کسری کاپوتو بر حسب t می باشد. او همچنین مساله با شرط اولیه زیر را تحقیق کرد؛

$$({}_0^C D_t^{\alpha} u)(x,t)=\lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (x\in\mathbb{R}\ ,\ 0<\alpha<1\ ,\ t>0),$$

$$u(x,0)=f(x) \quad , \quad \lim_{x\to\pm\infty} u(x,t)=0.$$

مایناردی با استفاده از روش پیشنهاد شده توسط اشنایدر و استفاده از تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه، جواب مساله بالا را بر حسب انتگرال تابع میتگ – لفلر و تابع رایت نوشت. پُدلوبنی [۴] از روشی مشابه برای یافتن جواب مساله نوع کشی با معادله $(0-1)$ و شرایط اولیه

$$({}_0 D_t^{\alpha-1} u)(x,t)\Big|_{t=0}=f(x) \quad , \quad \lim_{|x|\to\infty} u(x,t)=0,$$

و همچنین معادله از نوع ویس – اشنایدر استفاده کرد. گورِنفِلو و مایناردی [۷۱] معادله شارش

$$({}_0^C D_t^{\alpha} u)(x,t)=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad ((x,t)\in\mathbb{R}^{++}\ ,\ 0<\alpha\le 2),$$

را در ربع صفحه $\mathbb{R}^{++}=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x>0\ ,\ t>0\}$، با شرایط مرزی و اولیه

$$u(x,0)=0 \quad , \quad u(0,t)=\phi(t) \quad (t\ge 0),$$

برای $0<\alpha\le 1$ و با شرایط مرزی و اولیه

$$u(x,0)=\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0 \quad , \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial t}=\psi(t) \quad (t\ge 0),$$

برای $1<\alpha\le 2$ با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کردند. آگراوال [۷۲] از تبدیل لاپلاس مستقیم و معکوس برای به دست آوردن جواب مساله کشی برای معادله دیفرانسیل کسری جزیی از مرتبه چهار استفاده کرد. چِچکین و دیگران [۷۳] معادله شبه شارش با مشتق کسری جزیی کاپوتو از مرتبه توزیعی را حل نمودند. کیلباس و سایرین [۷۴] تبدیل فوریه و لاپلاس را برای یافتن جواب ضمنی مساله کشی زیر به کار بردند؛

$$({}_0^C D_t^{\alpha} u)(x,t)=\lambda\,({}_{-\infty} D_x^{\beta} u)(x,t) \quad (x\in\mathbb{R}\ ,\ t>0\ ,\ 0<\alpha<1\ ,\ \beta>0\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}),$$

$$u(x,0^+)=g(x) \quad , \quad \lim_{x\to\pm\infty} u(x,t)=0,$$

با مشتق کسری کاپوتو بر حسب $t>0$

$$({}_0^C D_t^{\alpha} u)(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{u(x,\tau)-u(x,0)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau,$$

و مشتق کسری ریمان – لیوویل بر حسب $x\in\mathbb{R}$

$$({}_{-\infty} D_x^{\beta} u)(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\{\beta\})}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{[\beta]+1}\int_{-\infty}^{x} \frac{u(\tau,t)}{(x-\tau)^{\{\beta\}}}d\tau,$$

که در آن $[\beta]$، جزء صحیح β و $\{\beta\}=\beta-[\beta]$. کیلباس و سایرین [۷۵] از چنین روشی برای ساختن جواب ضمنی از مساله نوع کشی زیر استفاده کردند؛

$$({}_0D_t^{\alpha} u)(x,t) = \lambda\, ({}_{-\infty}D_x^{\beta} u)(x,t) \quad (x \in \mathbb{R}\ ,\ t>0\ ,\ 0<\alpha\le 1\ ,\ \beta>0\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}),$$

$$({}_0D_t^{\alpha-1} u)(x,0^+) = g(x) \quad , \quad \lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0.$$

معادلات دیفرانسیل جزیی از مرتبه کسری در مدل بندی تعدادی از فرآیندهای فیزیکی مورد استفاده قرار گرفته است. جواب های معادلات شارشی – واکنشی کسری توسط کارهای انجام گرفته توسط ساکسِنا و سایرین [۷۶] مورد مطالعه قرار گرفته اند. پوروهیت و کالا [۴۱] چند معادله دیفرانسیل جزیی کسری تعمیم یافته یک بعدی همگن و غیر همگن را با استفاده از تبدیل لاپلاس و فوریه حل کرده اند. جیانگ و سایرین [۴۲] معادله شارش و شارش – موج کسری چند جمله ای را در یک دامنه متناهی با استفاده از تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه متناهی حل کردند. دینگ و جیانگ [۷۷] جواب معادله شارشی – همرفتی کسری ناهمگن چند جمله ای را با شرایط مرزی ثابت در یک دامنه متناهی به دست آورده اند. ساندِو و تومووسکی [۷۸] معادله موج کسری – زمانی را برای یک نخ مرتعش با استفاده از روش جدا سازی متغیرها و تبدیل لاپلاس بررسی کرده اند.

رِدوزوبوو [۹۷] مساله حرارتی خطی را با حرکت کرانه ها در یک ناحیه نیمه متناهی مطرح کرد. به دنبال آن، دافی [۹۷] این مساله را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کرد. کارتاشوف و سایرین [۱۰۰-۹۸] چند معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را با استفاده از تبدیل لاپلاس با شرط این که مرزها با زمان تغییر کنند، حل کردند.

مشتقات و انتگرال های از مرتبه کسری، نقش عمده ای در سیستم های دینامیکی، کوانتومی، کلاسیک و پیچیده دارند. کاربرد این قبیل انتگرال ها و مشتقات، می تواند در دینامیک سیالات، دینامیک آشفتگی، فیزیک حالت جامد، شیمی، سیستم های دینامیکی تصادفی، فیزیک پلاسما و فیزیک هسته ای، نظریه انرژی جنبشی، نظریه میدان، نظریه کنترل غیر خطی، پردازش تصویر، سیستم های بیولوژیکی غیر خطی، علوم ماده، اختر فیزیک، ویژگی های تغییر شکل صخره ها و . . . باشد [۱۲-۱]. در ابتدا چند ریاضی دان از جمله، فوریه، آبل، ریمان، لیوویل و . . . چند تعریف برای مشتق و انتگرال کسری ارائه دادند. مطالعه و بررسی عمیق در این زمینه توسط لیوویل از سال ۱۸۳۲ میلادی تا سال ۱۸۳۷ میلادی انجام شد و او موفق به تعریف اولین عملگر انتگرال کسری گردید. بعدها، پیشرفت های بیشتر در این زمینه منجر به تعریف عملگر انتگرال کسری ریمان – لیوویل شد، که امروزه نقش مهم و عمده ای در تحلیل سیستم های دینامیکی پیچیده دارد. امروزه چند نوع عملگر مشتق و انتگرال کسری وجود دارد که از جمله آنها می توان مشتق کسری گرونوالد – لتنیکوف و مشتق کسری کاپوتو را نام برد. با وجود این می توان گفت که عملگر انتگرال کسری ریمان – لیوویل بیشتر مورد استفاده قرار می گیرد [۴].

شاخه ای از آنالیز ریاضی به نام حساب کسری، با محاسبات و کاربردهای مشتقات و انتگرال های از مرتبه (مختلط یا حقیقی) کسری سر و کار دارد. این موضوع پیچیده با مسائل گوناگونی در تئوری توابع، معادلات دیفرانسیل و انتگرال، تبدیلات انتگرالی و توابع خاص و دیگر شاخه های آنالیز پیوند خورده است. حساب کسری، تاریخ طولانی دارد و به شکل چشمگیری در طی سی سال اخیر گسترش یافته است. تعداد بسیار زیادی از مقالات، کتابها و کنفرانس های بین المللی در زمینه حساب کسری خود گویای این مطلب می باشد که این شاخه از ریاضیات، روز به روز در حال پیشرفت است.

در این جا به تعریف انتگرال کسری و مشتق کسری ریمان – لیوویل و مشتق کسری کاپوتو می پردازیم.

۱–۱– قضایا و تعاریف مقدماتی

مشتق و انتگرال های مرتبه کسری

تعریف ۱-۱-۱: فرض کنید $[a,b]$ $(-\infty<a<b<+\infty)$ بازه ای متناهی روی محور حقیقی باشد. انتگرال کسری ریمان لیوویل چپ از تابع f که آن را با نماد ${}_aI_x^{\alpha}f$ نشان می دهند، به صورت زیر تعریف می شود [۴ ، ۸]

$$({}_aI_x^{\alpha}f)(x):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \quad (x>a\ ,\ \alpha\in\mathbb{C}\ ,\ \mathrm{Re}(\alpha)>0).$$

مشتق کسری ریمان – لیوویل چپ f که آن را با نماد ${}_aD_x^{\alpha}f$ نشان می دهند، به صورت زیر تعریف شده است [۴ و ۸]

$$({}_aD_x^{\alpha}f)(x):=(\frac{d}{dx})^n({}_aI_x^{n-\alpha}f)(x)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{d}{dx})^n\int_a^x\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \quad (x>a\ ,\ n=[\mathrm{Re}(\alpha)]+1\ ,\ \alpha\in\mathbb{C}\ ,\ \mathrm{Re}(\alpha)>0).$$

تعریف ۱-۱-۲: فرض کنید $f\in AC^n[a,b]$. آنگاه مشتق کسری کاپوتو چپ یا به طور کلی مشتق کسری کاپوتو f که آن را با نماد ${}_a^CD_x^{\alpha}f$ نشان می دهند، تقریبا همه جا روی بازه $[a,b]$ موجود است و

الف) اگر $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ و $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$، $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$، آنگاه ${}_a^C D_x^\alpha f$ به صورت زیر تعریف می شود [۴ و ۸]

$$({}_a^C D_x^\alpha f)(x) := ({}_a I_x^{n-\alpha} f^{(n)})(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt.$$

ب) اگر $\alpha \in \mathbb{N}_0$، آنگاه $({}_a^C D_x^\alpha f)(x) = f^{(n)}(x)$.

در این قسمت به تعریف تبدیلات فوریه و لاپلاس و معرفی وارون آنها می پردازیم.

تبدیل فوریه

فرض کنید f یک تابع روی $\mathbb{R}$ باشد که در شرایط دیریکله [۲۱] صدق کند. برای هر $l > 0$ می توان f را روی بازه $[-l, l]$ به صورت یک سری فوریه بسط داد. می خواهیم ببینیم که وقتی $l \to \infty$، چه اتفاقی برای این بسط رخ می دهد. برای این منظور، بسط فوریه را به صورت زیر می نویسیم. برای $x \in [-l, l]$

$$f(x) = \frac{1}{2l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,l} e^{\frac{n\pi x}{l} i} \quad , \quad c_{n,l} = \int_{-l}^{l} f(y) e^{-\frac{n\pi y}{l} i} dy.$$

فرض کنید $\Delta\xi = \dfrac{\pi}{l}$ و $\xi_n = n\Delta\xi = \dfrac{n\pi}{l}$. آنگاه فرمول های بالا به صورت زیر نوشته می شوند

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,l} e^{i\xi_n x} \Delta\xi \quad , \quad c_{n,l} = \int_{-l}^{l} f(y) e^{-i\xi_n y} dy.$$

فرض کنید که $f(x)$ به طور سریع وقتی که $x \to \pm\infty$، به صفر نزدیک شود. آنگاه اگر ناحیه انتگرال گیری را از $[-l, l]$ به $(-\infty, \infty)$ گسترش دهیم، $c_{n,l}$ زیاد تغییر نخواهد کرد، زیرا نرم $c_{n,l}$ برابر یک است. بنابراین

$$c_{n,l} \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi_n y} dy.$$

انتگرال بالا فقط یک تابع از ξ_n است و اگر آن را $\widehat{f}(\xi_n)$ بنامیم، داریم

$$f(x) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi_n) e^{i\xi_n x} \Delta\xi \quad (|x| < l).$$

مجموع بالا بسیار شبیه به مجموع ریمان می باشد. حالا اگر $l \to \infty$، به طوری که $\Delta\xi \to 0$، آنگاه نماد $\approx$ باید به نماد $=$ تبدیل شود و مجموع بالا به یک انتگرال تبدیل خواهد شد. لذا

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \tag{1-1}$$

وقتی که

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

تابع $\widehat{f}$ تبدیل فوریه تابع f و $(1-1)$ تبدیل فوریه وارون می باشد.

در این جا نیاز به این داریم که تلفیق دو تابع در تبدیل فوریه را بیان کنیم که یک وسیله بسیار کارآمد به لحاظ نظری و کاربردی می باشد. فرض کنید f و g دو تابع روی $\mathbb{R}$ باشند. تلفیق این دو، تابع $f*g$ تعریف شده توسط

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

می باشد، مشروط بر این که این انتگرال موجود باشد.

تبدیل لاپلاس

فرض کنید f یک تابع انتگرال پذیر روی $\mathbb{R}$ باشد به طوری که $f(t)=0$ برای $t<0$. در تعریف انتگرال تبدیل فوریه f، یعنی

$$\hat{f}(\omega)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt,$$

می توانیم ω را یک عدد مختلط در نظر بگیریم. در واقع، اگر $\omega=\alpha+i\beta$ با $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$، آنگاه $|e^{-i\omega t}|=e^{\beta t}$. بنابراین انتگرال بالا نه فقط برای ω های حقیقی، بلکه برای همه ω های با قسمت حقیقی منفی، همگرا است و این انتگرال یک تابع تحلیلی روی این دامنه تعریف می کند. اگر ω را به نیم صفحه $\mathrm{Im}(\omega)<-a$ محدود کنیم، می توانیم این الزام که f انتگرال پذیر باشد، ضعیف تر کنیم: انتگرال قبل، برای همه توابع $f(t)$ که سریع تر از e^{at} رشد نمی کنند، همگرا می باشد. در این وضعیت، مرسوم است که تغییر متغیر $z=i\omega$ را اعمال کنیم تا تبدیل لاپلاس از تابع f به صورت زیر تعریف شود

$$\mathfrak{L}\{f(z)\}=\hat{f}(-iz)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-zt}dt.$$

تبدیل لاپلاس حقیقتا یک حالت خاص از تبدیل فوریه می باشد. اما این تبدیل بیشتر از تبدیل فوریه به کار می رود. اول این که به علت وجود تابع نمایی e^{-zt} برای $\mathrm{Re}(z)>0$ و $t>0$، حساسیت در مورد مساله همگرایی انتگرال فوق کمتر می شود. دوم این که تبدیلات لاپلاس، توابع تحلیلی از z هستند و همه تشکیلات تئوری متغیرهای مختلط برای کمک به مطالعه آنها به کار می رود.

فرض کنید ζ رده تمام توابع مانند f روی نیم خط حقیقی مثبت $[0,\infty)$ باشد که قطعه به قطعه پیوسته هستند و در تخمین

$$|f(t)|\le C e^{at} \quad (C\ge 0,\, a\in\mathbb{R})$$

صدق می کنند. بعضی اوقات، مقادیر منفی متغیر t ظاهر می شوند و توافق می کنیم که عناصر ζ روی خط حقیقی منفی صفر باشند. به عبارت دیگر، عناصر ζ یا توابع روی $[0,\infty)$ می باشند یا توابعی روی $\mathbb{R}$ که در شرط $f(t)=0$ برای هر $t<0$ صدق می کنند. در این ارتباط، تابع پله ای هویساید $H(t)$ که به صورت زیر تعریف می شود،

$$H(t)=\begin{cases}1 & :t\ge 0\\ 0 & :t<0\end{cases}$$

مفید می باشد. هر اشتباه و نگرانی ممکن در مورد این که آیا تابع f برای $t<0$، صفر خواهد شد یا نه، می تواند توسط ضرب $f(t)$ در $H(t)$ رفع شود. بنابراین، برای مثال، فرض کنیم که تابع $f\in\zeta$ به صورت $f(t)=\cos t$ برای $t\ge 0$ تعریف شده باشد. آنگاه گسترش f به $\mathbb{R}$ به صورت $f(t)=H(t)\cos t$ داده می شود.

اگر $f \in \zeta$، تبدیل لاپلاس f، تابعی از متغیر مختلط z تعریف شده به صورت

$$\mathfrak{L}\{f(z)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt$$

برای $\operatorname{Re}(z) > 0$ می باشد.

همانند تبدیل فوریه، تبدیل لاپلاس نیز از خاصیت های عملگری بهره می گیرد. یکی از این عملگرها، تلفیق دو تابع می باشد. انتگرال تلفیق برای توابعی که برای $t<0$ صفر می باشند، منجر به یک انتگرال روی بازه های متناهی می گردد. فرض کنید که f و g هر دو وقتی $t<0$، صفر باشند. آنگاه برای $s>t$، $f(t-s)=0$ و برای $s<0$، $g(s)=0$، لذا

$$(f*g)(t) = \begin{cases} \int_0^t f(t-s)g(s)ds & : t \geq 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}.$$

برای این که تبدیل لاپلاس یک وسیله کارآمد باشد، احتیاج داریم که بدانیم چگونه f را از $\mathfrak{L}\{f\}$ به دست آوریم. برای این منظور، از فرمول وارون فوریه کمک می گیریم. فرض کنید که $f \in \zeta$ و $|f(t)| \leq Ce^{at}$. عدد $b>a$ را انتخاب می کنیم و قرار می دهیم $g(t) = e^{-bt}f(t)$. آنگاه g روی بازه $[0,\infty)$ انتگرال پذیر می باشد، بنابراین می توانیم تبدیل فوریه اش را محاسبه کنیم (با توجه به این که $g(t)=0$ برای $t<0$)؛

$$\widehat{g}(\omega) = \int_0^\infty e^{-bt}f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \mathfrak{L}\{f(b+i\omega)\}.$$

با فرض این که f (و در نتیجه g) قطعه به قطعه هموار باشد و متوسط حدود چپ و راستش در هر نقطه از ناپیوستگی اش تعریف شود (دوباره تعریف شود)، می توانیم قضیه ۷-۶ از فصل هفتم مرجع [۲۱] را به کار برده و به دست آوریم

$$e^{-bt}f(t) = g(t) = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r}\widehat{g}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r}\mathfrak{L}\{f(b+i\omega)\}e^{i\omega t}\,d\omega.$$

حال قرار می دهیم $z=b+i\omega$؛ وقتی که ω روی بازه $[-r,r]$ تغییر می کند، z روی قطعه خط عمودی از $b-ir$ تا $b+ir$ تغییر می کند و انتگرال روی این قطعه خط را با $\int_{b-ir}^{b+ir}$ نشان می دهیم. همچنین، $dz = i\,d\omega$، بنابراین

$$e^{-bt}f(t) = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{b-ir}^{b+ir}\mathfrak{L}\{f(z)\}e^{(z-b)t}\,dz.$$

سرانجام، با ضرب دو طرف تساوی فوق در e^{bt} داریم

$$f(t) = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{b-ir}^{b+ir}\mathfrak{L}\{f(z)\}e^{zt}\,dz.$$

این فرمول، فرمول وارون تبدیل لاپلاس می باشد. توجه کنید که فرمول بالا مستقل از انتخاب b است، مادامی که b به اندازه کافی بزرگ باشد به طوری که $R(z)=b$ در نیم صفحه ای که $\mathfrak{L}\{f\}$ در آن تحلیلی است، واقع شود. این نتایج را در یک قضیه جمع بندی می کنیم.

قضیه ۱-۱-۱: [۲۱] فرض کنید $f \in \zeta$، یعنی $|f(t)| \le C e^{at}$، و f هموار قطعه ای روی $[0,\infty)$ باشد. اگر $b > a$، آنگاه

$$\frac{1}{2}\{f(t^-)+f(t^+)\} = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{b-ir}^{b+ir}\mathfrak{L}\{f(z)\}e^{zt}\,dz,$$

برای همه $t \in \mathbb{R}$. در حالت خاص، عبارت طرف راست مساوی با $\frac{1}{2}f(0^+)$ می باشد، وقتی که $t=0$ و صفر می باشد، وقتی که $t<0$.

نتیجه ۱-۱-۱: [۲۱] اگر f و g متعلق به ζ باشند و $\mathfrak{L}\{f\} = \mathfrak{L}\{g\}$، آنگاه $f = g$. (دقیق تر بگوییم، $f(t) = g(t)$ برای همه t ها وقتی که هر دوی f و g پیوسته باشند.)

توسط نتیجه بالا، تابع $f \in \zeta$ به وسیله تبدیل لاپلاس آن، F، (تا میزان تغییرات در ناپیوستگی ها) به طور یکتا تعیین می شود و می گوییم که f تبدیل لاپلاس وارون F می باشد و می نویسیم $f = \mathfrak{L}^{-1}\{F\}$:

$$f = \mathfrak{L}^{-1}\{F\} \iff F = \mathfrak{L}\{f\}.$$

قضیه ۱-۱-۲: [۲۱] فرض کنید $F(z)$ یک تابع تحلیلی در نیم صفحه $\mathrm{Re}(z) > a$ باشد و برای $b > a$، $0 < r$ و $t \in \mathbb{R}$. فرض کنید

$$f_{r,b}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-ir}^{b+ir}F(z)e^{zt}\,dz.$$

فرض کنید $F(z)$ در تخمین زیر با شرط $\mathrm{Re}(z) > a$ صدق کند

$$|F(z)| \le C(1+|z|)^{-\alpha} \quad (\alpha > \frac{1}{2}),$$

و این که برای $b > a$، $f_{r,b}(t)$ وقتی $r \to \infty$ همگرای نقطه ای به تابع $f(t)$ در رده ζ باشد. آنگاه $\lim_{r\to\infty} f_{r,b}(t) = f(t)$ برای همه $b > a$، و $F = \mathfrak{L}\{f\}$.

عملا وقتی که یک تابع تحلیلی مانند $F(z)$ داده شود، انتظار داریم که تبدیل لاپلاس یک تابع مانند $f(t)$ باشد. بنابراین برای محاسبه f، F را در فرمول لاپلاس وارون جایگذاری می کنیم. این فرآیند، اگر ندانیم که F واقعا تبدیل لاپلاس تابعی می باشد، کمی خطرپذیر است.

برای مثال، فرض کنید $F(z) = \exp(z^2)$ و $f(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp(-\frac{t^2}{4})$. آنگاه چون $F(z)$ هیچ نقطه استثنایی ندارد، می توان خط عمودی را از $b - i\infty$ تا $b + i\infty$ در هر جایی در صفحه مختلط قرار داد، از جمله روی محور y ها. در این صورت، برای هر عدد حقیقی b از جمله $b = 0$، داریم

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}F(z)e^{tz}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}F(z)e^{tz}\,dz.$$

چون z روی محور y هاست، بنابراین فرض می کنیم $z = ix$ که $x \in \mathbb{R}$. لذا

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{z^2}e^{tz}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}e^{itx}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}\cos(tx)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

اما F تبدیل لاپلاس f نیست، به دلیل آن که در شرایط قضیه بالا صدق نمی کند.

قضیه ۱-۱-۳: (سوخوتِن – واندِر پُل) [۲۲] فرض کنید $\mathfrak{L}\{f(t)\}=F(s)$ و $F(s)$ در نیم صفحه $\mathrm{Re}(s)>s_0$ تحلیلی است. فرض کنید $\mathfrak{L}\{g(t)\}=G(s)=F(\varphi(s))$ که $\varphi(s)$ نیز در نیم صفحه $\mathrm{Re}(s)>s_0$ تحلیلی می باشد. با داشتن این مفروضات می توانیم تابع g را تعیین کنیم. یعنی این که

$$G(s)=F(\varphi(s))=\int_0^\infty f(\tau)\exp(-\varphi(s)\tau)d\tau,$$

و

$$g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(\varphi(s))\exp(ts)ds,$$

آنگاه

$$g(t)=\int_0^\infty f(\tau)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\exp(-\varphi(s)\tau)\exp(ts)ds\right)d\tau.$$

همان طور که می دانیم، تبدیل لاپلاس در حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل معمولی و جزیی کسری به کار می رود. اما در این بخش، به کاربرد جالب تبدیل لاپلاس و وارون آن برای محاسبه برخی انتگرال ها می پردازیم. از نمایش انتگرالی نیز برای محاسبه این گونه انتگرال ها استفاده می کنیم. اما قبل از این که به سراغ حل انتگرال ها برویم، ابتدا به اثبات چند قضیه مقدماتی می پردازیم.

۱–۲– قضایای مقدماتی در تبدیل لاپلاس

قضیه ۱-۲-۱: [۱۰۳] فرض کنید $f(t)$ پیوسته، مثبت و صعودی برای $t>0$ باشد. آنگاه رابطه های انتگرالی مختلط زیر، برقرار می باشند.

الف) $$f(\frac{t}{a})=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{ts}}{s}\left(\int_0^\infty\exp(-asf^{-1}(\varepsilon))d\varepsilon\right)ds$$

ب) $$f(\frac{1}{t})=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{ts}}{s}\left(\int_0^\infty\exp(-\frac{s}{f^{-1}(\varepsilon)})d\varepsilon\right)ds$$

ج) $$g(f(t))-g(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{ts}}{s}\left(\int_0^\infty g'(\varepsilon)\exp(-sf^{-1}(\varepsilon))d\varepsilon\right)ds$$

اثبات: الف) با تعویض ترتیب انتگرال گیری داریم

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{ts}}{s}\left(\int_0^\infty\exp(-asf^{-1}(\varepsilon))d\varepsilon\right)ds=\int_0^\infty\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{ts}}{s}e^{-asf^{-1}(\varepsilon)}ds\right)d\varepsilon$$

$$=\int_0^\infty\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{-asf^{-1}(\varepsilon)}\right\}d\varepsilon=\int_0^\infty H(t-af^{-1}(\varepsilon))d\varepsilon=\int_0^{f(\frac{t}{a})}d\varepsilon=f(\frac{t}{a}).$$

در ضمن، H تابع پله ای هویساید می باشد.

ب) اثبات این قسمت دقیقا مشابه اثبات قسمت (الف) می باشد.

ج) با تعویض ترتیب انتگرال گیری که مجاز می باشد (بنا به قضیه فوبینی)، داریم

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{ts}}{s}\left(\int_0^\infty g'(\varepsilon)\exp(-sf^{-1}(\varepsilon))d\varepsilon\right)ds=\int_0^\infty g'(\varepsilon)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{ts}}{s}\exp(-sf^{-1}(\varepsilon))ds\right)d\varepsilon$$

$$=\int_0^\infty g'(\varepsilon)\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\exp(-sf^{-1}(\varepsilon))\right\}d\varepsilon=\int_0^\infty g'(\varepsilon)H(t-f^{-1}(\varepsilon))d\varepsilon$$

$$=\int_0^{f(t)} g'(\varepsilon)d\varepsilon=g(f(t))-g(0).$$

۳-۱- محاسبه وارون تبدیل لاپلاس توابع

محاسبه وارون تبدیل لاپلاس با استفاده از نمایش انتگرالی

مساله ۳-۱-۱: [۱۰۳] با کمک نمایش انتگرالی، می توان تبدیل وارون توابع زیر را محاسبه کرد.

الف) $f_1(t)=\mathfrak{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}}\right\}$　ب) $(a>0)\ \ f_2(t)=\mathfrak{L}^{-1}\left\{\dfrac{\sinh\sqrt{s^2+a^2}}{\sqrt{s^2+a^2}}\right\}$

ج) $(\mathrm{Re}(s)>|\mathrm{Im}(a)|)\ \ f_3(t)=\mathfrak{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}\,(s+\sqrt{s^2+a^2})^{n+\frac{1}{2}}}\right\}$

د) $f_4(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{K_n(as)\}$ وقتی که $K_n(as)$ تابع بسل تعمیم یافته از مرتبه n می باشد.

حل: با استفاده از رابطه انتگرالی سونین، داریم

$$\int_0^\infty \frac{K_\mu(s\sqrt{x^2+z^2})}{(x^2+z^2)^{\frac{\mu}{2}}}x^{\nu+1}J_\nu(ax)dx=\frac{a^\nu}{s^\nu}\frac{(s^2+a^2)^{\frac{\mu-\nu-1}{2}}}{z^{\mu-\nu-1}}K_{\mu-\nu-1}(z\sqrt{s^2+a^2})$$

$$s>0\ ,\ a>0\ ,\ \mathrm{Re}(\nu)>-1\ ,\ |\arg(z)|<\frac{\pi}{2},$$

وقتی که K_μ تابع بسل تعمیم یافته می باشد. برای اثبات رابطه بالا، می دانیم که [۸۹]

$$K_\mu(w)=\frac{1}{2}\left(\frac{w}{2}\right)^\mu\int_0^\infty e^{-\tau}e^{-\frac{w^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{\mu+1}}.$$

سپس

$$\int_0^\infty \frac{K_\mu(s\sqrt{x^2+z^2})}{(x^2+z^2)^{\frac{\mu}{2}}}x^{\nu+1}J_\nu(ax)dx=\frac{s^\mu}{2^{\mu+1}}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-\tau}e^{-\frac{s^2(x^2+z^2)}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{\mu+1}}\right)x^{\nu+1}J_\nu(ax)dx$$