دانشگاه پیام نور تبریز

دانشکده علوم

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان

حل عددی معادلات تابعی دیفرانسیلی، انتگرالی و انتگرال دیفرانسیلی

استاد راهنما

دکتر لکستانی

استاد مشاور

دکترصحت خواه

پژوهشگر

معصومه نصیر پور

بهمن ۱۳۸۸

بِسْمِ اللّهِ الرّحمنِ الرّحیم

سر آغاز دین خدا شناسی است و کمال شناخت خدا، باور داشتن او و کمال باور داشتن خدا شهادت به یگانگی اوست و کمال توحید و کمال اخلاص، خدا را از صفات مخلوقات جدا کردن است، زیرا هر صفتی نشان میدهد که غیر از موصوف و هر موصوفی گواهی میدهد که غیر از صفت است پس هرکس که خدا را با صفت مخلوقات تعریف کند او را به چیزی نزدیک کرده و با نزدیک کردن خدا به چیزی دو خدا مطرح شده و با طرح شدن دو خدا، اجزائی برای او تصوّ ر نمود و با تصوّ ر اجزا برای خدا، او را نشناخته است.

خلقت را آغاز کرد و موجودات را بیافرید. بدون نیاز به فکر و اندیشه‌ای، یا استفاده از تجربه‌ای، بی آنکه حرکتی ایجاد کند و یا تصمیمی مضطرب در او راه داشته باشد.

آنچه را آفرید با اندازه گیری دقیق استوار کرد، و با لطف و مهربانی نظمشان داد و به خوبی تدبیر کرد. هر پدیده را برای همان جهت که آفریده شد به حرکت درآورد. چنانکه نه از حدّ و مرز خویش تجاوز نماید و نه در رسیدن مراحل رشد خود کوتاهی کند و این حرکت حساب شده را بدون دشواری به سامان رساند تا بر اساس اراده او زندگی کند.

از فرمایشات گرانبهای حضرت علی (ع)

سپاس

«آموزش عالی‌ترین مظهر تجلی عشق
آدمی به هم نوع خویش است»   کتیبه‌ای باستانی

آنچه که از تعریف عام آموزش بر می‌آید دلالت بر پیچیدگی و تداوم آن درست از لحظات تولد– و حتی از زمان دمیدن روح بر جنین– تا واپسین دم عمر فیزیکی دارد. از این رو هر چه در زمینه‌ی آموزش بطور اعم و اخص که مستقیماً با تمام هستی و زندگی سر و کار دارد انجام گیرد فرایندی خواهد بود به وسعت و تمامت بودن، زیستن و زندگی کردن و این فرایند را هر لحظه، گاه یادگیری و هنگام آموختن است و مربی و استادان فزون از شما.

پس من که خویشتن را در این وادی حیرت و عظمت به خردی– حتی– گاهی نمی‌یابم چگونه که دیده بر کم مقداری و بضاعت اندک خویش فروبندم و حاصل کاری را که وظیفه حاکم آن بوده و هست بر طبق پیشکشی و تقدیم نهم و به پیشگاه عزیزانی عرضه دارم که سر بر آسمانهای علم و افلاک مقام و منزلت می‌سایند و هر یک ستاره‌ای در کهکشانهای علم و ادب این سرزمینند...

تنها از سر جسارت و از روی اخلاص و تعبد بر تعهد دیرین خود صحه‌ای دگربار می‌نهم که مرید راستین مولای متقیان علی مرتضی باشم و همواره مسئول و مدیون و معهود هر آموزگار گردم و بر این پیمان بمان.

از میان خیل عظیم اساتیدی که بر من منت آموزش داشته و دارند از آقایان دکتر لکستانی، دکتر رنجبر، دکتر صحت‌خواه، دکتر خیری، دکتر چایچی صمیمانه سپاسگزارم و خود را همواره رهین همت و صداقت این عزیزان می‌دانم. در ضمن از آقای حسینی و شیری و خانم تاجبخش که مرا در این راستا راهنمایی فرموده‌اند تشکر می‌نمایم.

در پیشگاه الهی، رب آفریننده، آموزنده به قلم و فعل و علم، بر این بیعت، دیگر بار پیمان می‌بندم که هماره بیاموزم و آموزه‌هایم را در مسیر آموزش خود و دیگر انسانهای طالب به کار گیرم... و دین فراموش ناشدنی‌ام را به مکتب و سرزمین و مردم و شهدائی که با خون خود آموخته‌ها را آزمون دادند در پیشگاه امام عصر (عج) بگزارم.

التماس دعا

تقدیم به:

آنکه خالق زیباییست و زیبایی از اوست

((مادر))

نام خانوادگی دانشجو: نصیر پور نام: معصومه
عنوان پایان‌نامه: حل عددی معادلات تابعی دیفرانسیلی، انتگرالی و انتگرال دیفرانسیلی
استاد راهنما : دکتر لکستانی استاد مشاور: دکترصحت خواه
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه پیام نور تبریز دانشکده علوم تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ۱۳۸۸ تعداد صفحه: ۱۱۷
کلید واژه‌ها:
چکیده در این پایان‌نامه چند روش، برای حل عددی معادلات جدید انتگرال – دیفرانسیلی فردهلم؛ مدل شبکه‌های عصبی ارائه می‌کنیم. یکی از روش‌ها، حل عددی برپایه بسط توابع پایه‌ای اصلی و ترکیب ارائه شده است. محاسبات عددی، میانگین ویژه و عملیات پسرو کاربردهای دیفرانسیلی را توضیح می‌دهد. به همین منظور این روش‌ها برای روش‌های متناوب محرک نیز به کار می‌روند.

فهرست مطالب

مقدمه

مساله مقدار اولیه برای معادله انتگرال –دیفرانسیل از نوع پیچش را با یک تابع هموار f و یک تابع اولیه (اصلی) g در نظر بگیرید.

$$\left\{ \begin{array}{rl} \partial_t\theta(x,t) = & f(\theta(x,t),t) + \mu \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\partial_t\theta(y,t)dy, \\ \theta(x,0) = & g(x) \end{array} \right. \tag{۱.۰}$$

که در آن $-\infty \leq x \leq \infty, \quad t \geq 0$. مسئله (۱.۰) مقیاس پیوسته‌ای از یک مدل مجزایی از تبدیل خطی در شبکه‌های عصبی باθ–سیناپس در طی عملیات حجم آن افزایش می‌یابد.[2, 15] زاویه $\theta(x,t)$ مرحله سیگنال را در زمان t مرتبط با یک نرون واقع در نقطه x و تابع f نیروهای خارجی و اثرات پتانسیل را نشان می‌دهد. انتگرال پیچش یا برای اثرات بازدارنده $(k < 0)$ یا برای تاثیر برانگیزنده $(k > 0)$ نرونهای مجاور محاسبه می‌شود. در این شرایط حالت دوم مورد توجه قرار می‌گیرد. به عنوان مثال هسته اصلی $k(s)$ تابع انتگرالی نامنفی فرض می‌شود که در $\mathbb{R}$ تعریف شده و با رابطه

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(s)ds = 1,$$

نرمال می‌شود. هسته گاوسی[1] به صورت

$$K(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-(\frac{s}{\sigma})^2}, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{۲.۰}$$

و هسته نمایی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$K(s) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\sigma} e^{(\frac{-s}{\sigma})}, & \forall s \geq 0, \\ 0, & \forall s < 0, \end{array} \right. \tag{۳.۰}$$

---

[1] Gaussian

برای $\sigma > 0$. این هسته‌ها به طور وسیع در کاربردهای مرتبط و اخیرا بیشتر در مدل سازی گسترش بیماریها مورد بررسی قرار گرفته‌اند [8]. بیاد داشته باشید که هنگامیکه $\sigma \longrightarrow 0$، هر دو هسته (۲.۰) و (۳.۰) به سمت تابع[2] دیراک متمایل می‌شوند. در حالی‌که مسئله (۱.۰) به ازای $x \in \mathbb{R}$ به سمت معادله دیفرانسیلی معمولی

$$\partial_t \theta(x,t) = \frac{f(\theta(x,t),t)}{1-\mu}$$

تنزل می‌کند. بنابراین برای $\mu < 1$ می‌تواند به عنوان یک پارامتر محرک در نظر گرفته می‌شود.

هسته‌های رابطه (۲.۰) مرتبط و وابسته به تاثیر دو سویه هستند، در حالی که هسته‌های رابطه (۳.۰) با یک رابطه یکسو مرتبط می‌باشند. در هر دو حالت تاثیر پذیری بین نرونهایی که به یکدیگر نزدیکتر هستند بیشتر است.

با استفاده از فرمول گسسته‌سازی اویلر نسبت به زمان از(۱.۰) با یک طول گام $\triangle t$ و برای $i = 0, 1, 2, \ldots$ رابطه‌ی

$$\theta^{i+1}(x) = F(x) + \mu \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\theta^{i+1}(y)dy, \tag{۴.۰}$$

$$F(x) = \theta^i(x) = \triangle t f(\theta^i(x), i \triangle t) - \mu \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\theta^i(y)dy, \tag{۵.۰}$$

و $\acute{\theta}(x) = \theta(x, i \triangle t)$ به دست می‌آید. (۵.۰) هم ارز با رابطه (۴.۰) است.

یک روش حل در رابطه (۱.۰) برای هر دو هسته، بر پایه‌ی بسط $\theta(x,t)$ دراندازه توابع پایه‌ای اصلی و ترکیب در شبکه $x_0 < x_1 < ... < x_n$ در بخش ۲.۴ ارائه شده است. سیستم دیفرانسیلی حاصل شامل قالبی است که نمایانگر سهم عبارت انتگرالی در رابطه (۱.۰) است. تکه‌ای خطی، چندجمله‌ای و تقریب‌های طیفی نمای کسری در بخش ۲.۴ مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش ۶.۴ نتایج مذکور

[2] Dirac

در بالا برای مثال‌های خاصی بکار برده می‌شود و تمایز نسبی آن‌ها قابل قیاس است. در نهایت، در بخش مثال‌های عددی بعضی از طرح‌ها که به نتیجه رسیده‌اند ذکر شده است و تدابیر برای تحقیقات آتی به طور خلاصه تهیه شده است.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

ابتدا تعاریف و قضایایی از درونیابی و به کاربردن آنها برای محاسبه‌ی انتگرال بیان می‌شود.

۱.۱ درونیابی

تعریف ۱ : خانواده‌ی $\Phi(x;a_0,...,a_n)$ از توابع با یک متغیر x، که دارای $n+1$ پارامتر a_0، ...، a_n است را در نظر می‌گیریم. مسئله‌ی درونیابی برای Φ پیدا کردن $n+1$ پارامتر a_i است به طوری که به ازای مقادیر حقیقی (x_i,f_i) با x_i های متمایز داشته باشیم.

$$\Phi(x_i;a_0,...,a_n)=f_i, \qquad i=0,...,n. \tag{۱.۱}$$

اگر قرار بدهیم

$$\Phi(x;a_0,...,a_n)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n, \tag{۲.۱}$$

در این صورت مسئله‌ی (۲.۱)، مسئله‌ی درونیابی چندجمله‌ای نامیده می‌شود که برای محاسبه‌ی تقریبی از انتگرالها به وسیله‌ی روش نیوتن–کاتس از آنها استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱.۱ برای $n+1$ نقطه‌ی داده شده (x_i, f_i) به ازای $i = 0, \cdots, n$ به طوری که x_i متمایز باشند مسئله‌ی درونیابی چند جمله‌ای دارای جواب یکتای $P(x)$ است.

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \ell_i(x), \tag{۳.۱}$$

که در آن

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k},$$

ضرایب لاگرانژ نامیده می‌شود. تابع $\ell_i(x)$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.

$$\ell_i(x) = \frac{w(x)}{(x - x_i)w'(x_i)}, \quad w(x) = \prod_{k=0}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}. \tag{۴.۱}$$

برهان : مرجع [۱۴] را ببینید.

۲.۱ فرمول‌های انتگرالگیری نیوتن کاتس

روش‌های انتگرالگیری نیوتن کاتس از جایگزینی چندجمله‌ای به جای تابع انتگرالده به دست می‌آیند. افراز یکنواخت

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \cdots n$$

برای بازه‌ی $[a, b]$ را در نظر می‌گیریم که در آن $h = (b-a)/n$ و $n > 0$، فرض می‌کنیم چندجمله‌ای درجه‌ی n، $P_n(x)$ درونیاب تابع انتگرالده یعنی $f(x)$ باشد. در این صورت خواهیم داشت

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) dx = \sum_{i=0}^{n} f_i \int_a^b l_i(x) dx.$$

با تغییر متغیر $x = a + ht$ به فرمول

$$\sum_{i=0}^{n} f_i \int_a^b l_i(x)dx = h\sum_{i=0}^{n} f_i \int_0^n \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{t-k}{i-k}dx,$$

خواهیم رسید که در آن

$$\alpha_i := \int_0^n \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{t-k}{i-k}dx, \qquad (۵.۱)$$

فقط به n و i بستگی دارد. بنابراین برای n های مختلف، رابطه‌ی (۵.۱) روش‌های مختلفی از فرمول‌های انتگرال‌گیری نیوتن کاتس را نتیجه می‌دهد. با توجه به نحوه‌ی به دست آمده‌ی رابطه (۵.۱) باید برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه‌ی n درست باشد.

مثال ۱ . در حالتی که $n = 2$ باشد داریم

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3}h(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)),$$

این روش به روش انتگرال‌گیری سیمپسون مشهور است.

s مخرج مشترک وزن‌های کسری α_i را چنان توصیف می‌کنیم که اعداد $\sigma_i = s\alpha_i$، برای $i = 0, 1, \cdots n$ صحیح باشد در این صورت جدول ۱ تعدادی از روشهای نیوتن کاتس مشهور را با استفاده از این نمادها نشان می‌دهد.

n	σ							ns	Error	Name
1	1	1	..	..	..	..	..	2	$h^3\frac{1}{12}f^2(\xi)$	روش ذوزنقه ی
2	1	4	1	..	..	..	..	6	$h^5\frac{1}{90}f^4(\xi)$	روش سیمپسون
3	1	3	3	1	..	..	..	8	$h^5\frac{3}{80}f^4(\xi)$	روش ۳ بر ۸
4	7	32	12	32	7	..	..	90	$h^7\frac{8}{945}f^6(\xi)$	روش میلن
5	19	75	50	50	75	19	..	288	$h^7\frac{275}{12096}f^6(\xi)$	
6	41	216	27	272	27	216	41	840	$h^9\frac{9}{1400}f^8(\xi)$	روش ودل

جدول ۱.۱ روشهای مشهور نیوتن کاتس به همراه مرتبه‌ی خطای این روش‌ها

۳.۱ فرمول‌های انتگرالگیری گاوسی

فرض کنید $w(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابع وزن با شرایط زیر باشد.

(۱) $w(x) \geq 0$ و $w(x)$ اندازه‌پذیر در بازه‌ی متناهی یا نامتناهی $[a,b]$ است.

(۲) همه‌ی ممان‌های $\mu_k = \int_a^b x^k w(x)dx$، $k = 0, 1, \cdots$ موجود و متناهی هستند.

(۳) برای چندجمله‌ای های نامنفی $s(x)$ در $[a,b]$ که $\int_a^b w(x)s(x)dx = 0$، نتیجه بدهد $s(x) \equiv 0$.

با فرضیات بالا می‌خواهیم انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ را با استفاده از $I(f) := \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i)$ به طوری که خطا تا حد ممکن از مرتبه‌ی بیشتر باشد، را حل کنیم. نمادهای $\hat{\Pi}_n$ و π_n را به ترتیب برای چندجمله‌ای‌های تکین درجهn و چند جمله‌ای‌های از درجه‌ی کمتر مساوی n استفاده می‌کنیم. همچنین ضرب داخلی را با

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx,$$

تعریف می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که $f \in L^2[a,b]$ اگر

$$\int_a^b w(x)f(x)^2 dx,$$

متناهی باشد و f و g متعلق به $L^2[a,b]$ را عمود بر هم نسبت به تابع وزن $w(x)$ گوییم هرگاه $(f,g) = 0$.

قضیه‌ی زیر وجود چند جمله‌ایهای دوبدو متعامد نسبت به تابع وزن داده شده را تضمین و رابطه‌ی بازگشتی برای محاسبه‌ی این چندجمله‌ای‌ها در اختیار ما قرار می‌دهد.

قضیه ۲.۱ چندجمله‌ای‌های $p_j \in \hat{\Pi}_j$، $j = 0, 1, 2, \cdots$ چنان موجودند که

$$(p_i, p_k) = 0, \qquad i \neq k,$$

و این چندجمله‌ای به صورت یکتا با روابط بازگشتی

$$p_0(x) \equiv 1, \tag{۶.۱}$$

$$p_{i+1}(x) = (x - \delta_{i+1})p_i(x) - \gamma_{i+1}^2 p_{i-1(x)}, \qquad i \geq 0, \tag{۷.۱}$$

مشخص می شوند که در آن $p_{-1}(x) \equiv 0$ و

$$\delta_{i+1} := (xp_i, p_j), \qquad i \geq 0, \tag{۸.۱}$$

$$\gamma_{i+1}^2 := \begin{cases} 1, & i = 0, \\ (p_i, p_i)/(p_{i-1}, p_{i-1}), & i \geq 1 \end{cases}. \tag{۹.۱}$$

برهان : مرجع [۱۴] را ببینید.

در قضیه‌ی بعدی ω_i و x_i را طوری پیدا می‌کنیم که روش عددی مطرح شده برای چندجمله‌ای‌های از درجه‌ی کمتر $2n$ درست باشد.

قضیه ۳.۱ (الف) فرض کنید x_1، ...،x_n ریشه‌های nامین چندجمله‌ای متعامد $p_n(x)$ باشند و ω_1، ...، ω_n از حل سیستم زیر

$$\sum_{i=1}^{n} p_k(x_i)\omega_i = \begin{cases} (p_0, p_0) & k = 0 \\ 0 & k = 1, \cdots, n-1 \end{cases} \tag{۱۰.۱}$$

به دست آید. آن‌گاه به ازای $i = 1, \cdots, n$ (این ω_i ها وزن نامیده می‌شوند.) $\omega_i > 0$ و برای تمام چندجمله‌ای‌های $p \in \Pi_{2n-1}$ داریم

$$\int_a^b w(x)p(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i p(x_i). \tag{۱۱.۱}$$

(ب) برعکس، اگر w_i ها و x_i ها طوری باشند که برای تمام چندجمله‌ای‌های $p \in \Pi_{2n-1}$، (۱۱.۱) برقرار باشد، آن‌گاه x_i ها ریشه‌های p_n هستند و ω_i ها در (۱۰.۱) صدق می‌کنند.

(ج) ممکن نیست w_i ها و x_i ها را طوری پیدا کنیم که (۱۱.۱) برای تمام چندجمله‌ای‌ها برقرار باشد.

در این قسمت دو نوع تابع وزن چبیشف و هرمیت را که در ادامه مورد استفاده قرار داده‌ایم، بررسی می‌کنیم در حالتی که $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ و $[a, b] = [-1, 1]$ تابع $w(x)$ را تابع وزن چبیشف و چندجمله‌ای‌های

متعامد با این تابع وزن را چندجمله‌ای‌های چبیشف می‌نامیم و اگر $w(x) = e^{-x^2}$ و بازه $(-\infty, \infty)$ باشد، تابع $w(x)$ را تابع وزن هرمیت و چندجمله‌ای‌های متعامد با این تابع وزن را چندجمله‌ای‌های هرمیت می‌نامیم.

۴.۱ انواع معادلات انتگرال

تعریف ۲: معادله انتگرال به معادله‌ای گفته می‌شود که در آن تابع مجهول، انتگرالده باشد.

$$F(x, y(x)) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x, t, y(x)dt) = 0$$

شکل کلی یک معادله انتگرال غیر خطی به صورت زیر است:

$$h(x)y(x) - \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x, t, y(x))dt = f(x), \quad \lambda \neq 0, \qquad (۱۲.۱)$$

که در آن $h(x)$,$K(x, t, y(x))$, $f(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, توابع معلوم و$y(x)$ تابع مجهول و λ اسکالر است.

تابع $K(x, t, y(x))$ در معادله انتگرال (۱۲.۱) را هسته معادله انتگرال گوییم.

اگر$K(x, t, y(x)) = K(x, t)y(t)$, آن‌گاه معادله انتگرال را خطی می‌نامیم.

۱.۴.۱ معادلات انتگرال ولترا از نوع دوم

صورت کلی معادله ولترای نوع دوم بصورت

$$y(x) + \int_{a}^{x} K(x, t, y(x))dt = f(x), x > a \qquad (۱۳.۱)$$

است که توابع $K(x, t, y(x))$ و $f(x)$ معلوم و $y(x)$ تابع مجهول می‌باشند. معادله انتگرال (۱۳.۱) غیر خطی است. این رایج‌ترین شکل معادله انتگرال ولترا است که به کار برده می‌شود.

چنین معادلاتی را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$y'(x) = f(x, y(x)), x \geq a, y(a) = y_0, \qquad (۱۴.۱)$$

که این یک مسئله مقدار اولیه در معادلات دیفرانسیل معمولی است. مسئله مقدار اولیه (۱۴.۱) هم ارز با معادله انتگرال

$$y(x) = y_0 + \int_a^x f(t, y(t))dt, \qquad x \geq a$$

است که حالت خاصی از (۱۳.۱) است.

۲.۴.۱ معادلات انتگرال ولترای نوع اول

در حالت کلی، معادلات انتگرال ولترای نوع اول به صورت

$$\int_a^x K(x, t, y(x))dt = f(x), \qquad x \geq a$$

هستند که در آن توابع $K(x, t, y(x))$ و $f(x)$ معلوم $y(x)$ تابع مجهول می‌باشد. معادله انتگرال ولترای خطی نوع اول به صورت

$$\int_a^x K(x, t)y(t)dt = f(x), \qquad x \geq a \qquad (۱۵.۱)$$

است رایج ترین معادلات ولترای نوع اول که مورد بحث قرار می‌گیرد، معادله خطی است. یک مثال ساده ولی مهم از معادله (۱۵.۱) بصورت

$$\int_a^x y(t)dt = f(x), \qquad x \geq a, \qquad (۱۶.۱)$$

است این معادله هم ارز با معادله

$$\begin{cases} y(x) = f'(x), & x \geq a, \\ f(a) = 0, \end{cases}$$

است.

۳.۴.۱ معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم

شکل کلی چنین معادلاتی بصورت

$$\lambda y(x) - \int_D K(x,t)y(t)dt = f(x), \qquad x \in D, \lambda \neq 0 \tag{۱۷.۱}$$

است که در آن D یک مجموعه بسته و کراندار در$\mathbb{R}^m$ $(m \geq 1)$ است. برای$f \neq 0$ وλ داده شده (۱۷.۱) را می‌یابیم، در این حالت مسئله ناهمگن است. برای $f \equiv 0$ معادله (۱۷.۱) یک مسئله مقدار ویژه است که در این حالت مقادیر ویژه و توابع ویژه را می‌یابیم.

۴.۴.۱ معادلات انتگرال فردهلم نوع اول

این معادلات به صورت زیر می‌باشند:

$$\int_D K(x,t)y(t)dt = f(x), \qquad x \in D, \tag{۱۸.۱}$$

K و D بصورتی که برای (۱۷.۱) گفته شد، هستند. چنین معادلاتی معمولاً بد حالت هستند، چون برای جواب y نسبت به تغییرات کوچک f حساس هستند. این مسائل در عمل به دو نوع تقسیم می‌شوند: اول اینکه اگر $K(x,t)$ تابع همواری باشد در این صورت جواب $y(x)$ از (۱۸.۱) در برابر تغییرات کوچک $f(x)$ حساس است و از روشهای خاص برای حل آن استفاده می‌شود . دوم اینکه اگر $K(x,t)$ تابع منفرد باشد در این صورت بدوضعی (۱۸.۱) کاملاً قابل کنترل است و در حقیقت بیشتر نظریه‌ها برای چنین معادلاتی کاملاً شبیه به معادلات نوع دوم، (۱۷.۱) است.