بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

عنوان:

تعیین عناصر در جبرهای باناخ تحت ویژگی‌های طیفی

پژوهشگر:

فاروق پرویزی

استاد راهنما:

دکتر هوگر قهرمانی

استاد مشاور:

دکتر شهرام سعیدی

پایان نامه‌ی کارشناسي ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز ریاضی

بهمن‌ماه 1392

تعهد نامه

اینجانب فاروق پرویزی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز ریاضی دانشگاه کردستان، دانشکده‌ی علوم پایه گروه ریاضی تعهد می‌نمایم که محتوای این پایان‌نامه نتیجه‌ی تلاش و تحقیقات خود بوده و از جایی کپی‌برداری نشده و به پایان رسانیدن آن نتیجه‌ی تلاش و مطالعات مستمر اینجانب و راهنمایی و مشاوره‌ی اساتید بوده است.

با تقدیم احترام

فاروق پرویزی

1391 / 11/02

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسي ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز ریاضی

عنوان:
تعیین عناصر در جبرهای باناخ تحت ویژگی‌های طیفی

پژوهشگر:
فاروق پرویزی

در تاریخ 02 /11 / 1392 توسط کمیته‌ی تخصصی وهیات داوران زیر مورد بررسی قرار گرفت و با نمره‌ی19 و درجه‌ی عالی به تصویب رسید.

هیات داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
1- استاد راهنما	دکتر هوگر قهرمانی	استادیار	
2- استاد مشاور	دکتر شهرام سعیدی	دانشیار	
3- استاد داور داخلی	دکتر صابر ناصری	استادیار	
4- استاد داور داخلی	دکترمحمدعلی اردلانی	استادیار	

مهر و امضاء مدیر گروه

مهر و امضاء معاون آموزشی و تحصیلات تکمیلی دانشکده

تقدیم به . . .

استوارترین تکیه گاهم

دستان پر مهر پدر و مادر مهربانم

که هرچه آموختم در مکتب عشق شما آموختم، و هرچه بکوشم قطره ای از دریای بیکران مهربانیتان را سپاس نتوانم بگویم.

و تقدیم به خواهران دلسوز و برادران عزیزتر از جانم، و به همسر مهربانم که در این مدت همواره مشوق من بوده اند.

تقدیم به استاد فرهیخته جناب آقای دکتر هوکر قهرمانی که همواره راهنما و راه گشای بنده در اتمام این پایان نامه بوده اند.

و تقدیم به معلم فداکار شهید ادهم مظفری که با ایثار جان خود عشق به معلمی را در نهاد انسانیت جاودانه ساخت.

تقدیر و سپاسگزاری

بر خود لازم می‌دانم که از مهربانی‌ها و راهنمایی‌های دلسوزانه‌ی اساتید راهنما و مشاور عزیزم آقایان **دکتر هوگر قهرمانی** و **دکتر شهرام سعیدی** که در این مدت، خالصانه بنده را در راستای فهم ودرک عمیق مفاهیم پایان‌نامه، هدایت و راهنمایی نمودند، تشکر نمایم.

همچنین سایر اساتیدی که در طول دوران تحصیلی مقطع کارشناسی ارشد افتخار شاگردی آنها را داشته و مرا یاری نمودهاند، ارج می نهم.

در پایان از زحمات بی‌پایان پدر و مادر مهربانم، خواهران دلسوز و برادران عزیزم، حیدر، ناصر و فردین و همچنین همسر مهربانم که همواره یار و یاور من بودند و همچنین از همه دوستان عزیزم ازجمله وحید قاسمی،ناصح مردوخی، شاهو ناصری کوروش کریمی، فواد امجدی، خه‌بات احمدی، حسام ابراهیمی، صلاح محمدی، مهدی ولی‌ئی، امید ابراهیمیوسایر همکلاسی‌های خوبم که در طول دوران تحصیلی یار و یاور من بودند، نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

چکیده

جبر باناخ A نیم‌ساده است[۱] هرگاه تنها عنصر $a \in A$ با خاصیت $\sigma(ax) = \{0\}$ برای هر عنصر $x \in A$، عنصر صفر باشد.
در این پایان‌نامه رابطه‌ی بین عناصر $a, b \in A$ را که در یکی از دو شرط زیر صدق می‌کنند، مورد بررسی قرار می‌دهیم:

۱. $\sigma(ax) = \sigma(bx)$ برای هر $x \in A$.

۲. $r(ax) \leq r(bx)$ برای هر $x \in A$.

در حالت خاص نشان می‌دهیم که اگر A یک C^*−جبر باشد آنگاه نتیجه سوال اول این است که $a = b$، و اگر A یک C^*− جبر اول باشد، نتیجه سوال دوم این است که $a \in \mathbb{C}b$. در انتها به عنوان کاربردی از نتایج سوالات بالا، چند مشخصه‌ی طیفی از نگاشت‌های ضربی[۲] را به دست خواهیم آورد.

کلمات کلیدی: *جبر باناخ نیم ساده، C^*−جبر، طیف، نگاشت ضربی*

نتیجه[chapter] تذکر[chapter] مثال[chapter]

[۱] Semi-simple
[۲] Multiplicative

فهرست مطالب

پیشگفتار

در ریاضیات، بخصوص در آنالیز تابعی، جبر باناخ پس از استفان باناخ[۳] نامگذاری شد. اولین کنفرانس درباره‌ی جبرهای باناخ و نگاشت‌های روی آن از یک تا دوازده جولای سال ۱۹۷۴ در دانشگاه کالیفرنیا تحت عنوان " همریختی‌ها و مشتق‌ها در جبرهای باناخ" اتفاق افتاد. دلایل زیادی وجود دارد که چرا جبرهای باناخ را مطالعه می‌کنیم که برخی از آنها بصورت زیر است.

- مثال‌های متعددی را پوشش می‌دهد.
- مباحث و اثبات‌های متعددی را در قالب مجرد بیان می‌کند.
- مباحث مختلفی از جبر و آنالیز را در ارتباط با هم بررسی می‌کند.
- نتایج زیبا و جالبی را روی ساختار جبرهای باناخ بیان می‌کند.

تئوری جبرهای باناخ مختلط می‌تواند بسیار متفاوت از جبرهای باناخ حقیقی باشد. برای مثال طیف عناصر از جبرهای باناخ مختلط هرگز نمی‌تواند تهی باشد در حالیکه در جبرهای باناخ حقیقی چنین چیزی امکان‌پذیر است.

در این پایان‌نامه منظور از جبر باناخ، جبر مختلط باناخی می‌باشد و برای سادگی کار فرض می‌کنیم که تمام جبرهای ما عنصر همانی دارند.

طیف عنصر $a \in A$ را با $\sigma(a)$ و یا گاهی با $\sigma_A(a)$ نشان می‌دهیم. همچنین با $r(a)$ شعاع طیفی عنصر $a \in A$ و با $Z(A)$ مرکز A را مشخص خواهیم کرد. یادآوری می‌کنیم که جبر باناخ A نیم‌ساده است هرگاه تنها عنصر $a \in A$ با خاصیت $\sigma(ax) = \{0\}$ برای هر عنصر $x \in A$، عنصر صفر باشد.

و این یعنی $\sigma(ax) = \sigma(0x)$ برای هر $x \in A$ نتیجه دهد که $a = 0$.

اکنون به دو سوال اساسی زیر توجه کنید.

سوال(۱): فرض کنید A یک جبر باناخ نیم‌ساده باشد. اگر $a, b \in A$ در رابطه‌ی

$$\sigma(ax) = \sigma(bx)$$

برای هر $x \in A$، صدق کنند، در این صورت چه رابطه ای بین a و b برقرار است؟

جواب این سوال را در حالت کلی نمی‌دانیم، با این حال در موارد ویژه‌ی متعددی قادر به پیدا کردن رابطه‌ی بین a و b هستیم.

[۳] Estephan Banach

در حالت اول مسئله را تحت این فرض که $a \in A$ به صورت حاصل‌ضرب یک عنصر خودتوان و یک عنصر معکوس‌پذیر نوشته شود، در نظر می‌گیریم، که اثبات آن مبتنی بر مشخصه‌های طیفی از خودتوان‌های مرکزی می‌باشد.
در حالت دوم فرض می‌کنیم که A یک جبر باناخ جابجایی باشد، و همچنین در حالت سوم فرض می‌کنیم که A یک C^*-جبر باشد.
سوال (۲): فرض کنید A یک جبر باناخ نیم‌ساده باشد. اگر $a, b \in A$ در رابطه‌ی

$$r(ax) \leq r(bx)$$

برای هر $x \in A$، صدق کنند، در این صورت چه رابطه ای بین a و b وجود دارد؟
جواب این سوال را نیز در حالت کلی نمی‌دانیم، اما با این حال خواهیم دید که پاسخ این سوال وابسته به جبر یا عناصر داخل سوال دارد. در یک حالت خاص وقتی $b = ۱$، قبلا توسط پتک[۴] [۱۵]، و بطور مستقل در [۴]، بررسی شده است. نتیجه‌ی این مورد این است که $a \in Z(A)$.
نتایج اصلی ما در باره‌ی مسئله دوم بیان می‌کنند که اگر A یک C^*-جبر اول باشد آنگاه عناصر $a, b \in A$ که در مسئله دو صدق می‌کنند، لزوما وابسته خطی هستند.
معتقد هستیم که دو سوال بالا به نوبه‌ی خود جالب و چالش برانگیز هستند. بااین حال، انگیزه‌ی اولیه‌ی ما برای این بررسی، سوالات اصلی حول مسئله‌ی کاپلانسکی رو نگاشت‌های حافظ طیف بودند[۹]، که موضوع فصل چهارم می‌باشند.
با استفاده از نتایج فصل دوم این مسئله را که آیا نگاشت φ، بین جبرهای باناخ $A_۰$ و A، که در شرط

$$\sigma(\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)) = \sigma(xyz)$$

برای هر $x, y, z \in A_۰$ صدق می‌کند، ضربی است؟ بررسی می‌کنیم.
در اینجا ابتدا با استفاده از مقاله‌ی مولنر[۵] [۱۳]، که در آن شرایط پیچیده‌تر

$$\sigma(\varphi(x)\varphi(y)) = \sigma(xy)$$

را که البته روی جبرهای خاصی بررسی کرده، تشویق شده‌ایم. و در آخر نتایج اصلی فصل سوم را روی نگاشت $\varphi : A_۰ \longrightarrow A$ که در رابطه‌ی

$$r(\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)) = r(xyz)$$

[۴] Ptak
[۵] Molnar

برای هر $x, y, z \in A$، صدق می‌کند، بکار می‌بریم. توضیحات نسبتا بیشتر و همراه با جزئیات زیادتری درباره نگاشت‌های اخیر را در آغاز فصل چهارم خواهیم آورد.

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

۱.۱ فضاهای توپولوژیک و فضاهای باناخ

در این بخش برخی از نتایج مورد نیاز مربوط به توپولوژی را بیان می‌کنیم. مطالبی که در این فصل آمده است، برگرفته از منابع [۲۲ − ۱۹] می‌باشند.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{X}$ یک مجموعه ناتهی باشد. گردایه $\mathbb{T}$ از زیرمجموعه‌های $\mathcal{X}$ را یک توپولوژی روی $\mathcal{X}$ گوییم اگر $\mathbb{T}$ در خواص زیر صدق نماید:

۱. $\mathcal{X} \in \mathbb{T}$ و $\varnothing \in \mathbb{T}$.

۲. هرگاه U و V متعلق به $\mathbb{T}$ باشند، آنگاه $U \cap V \in \mathbb{T}$

۳. هرگاه $\{V_i : i \in I\}$ خانواده‌ای از اعضای $\mathbb{T}$ باشد، آنگاه $\cup_{i\in I} V_i \in \mathbb{T}$.

هرگاه $\mathbb{T}$ یک توپولوژی بر مجموعه $\mathcal{X}$ باشد، آنگاه جفت $(\mathcal{X}, \mathbb{T})$ یک فضای توپولوژیک نام دارد. اگر ابهامی در توپولوژی $\mathbb{T}$ نباشد، گاهی به خاطر سادگی به جای $(\mathcal{X}, \mathbb{T})$ می‌نویسیم $\mathcal{X}$. اعضای $\mathbb{T}$ را زیرمجموعه‌های باز $\mathcal{X}$ می‌نامیم. در زیر چند مثال از فضاهای توپولوژیک می‌آوریم.

مثال ۲.۱.۱. فرض کنیم $\mathcal{X}$ یک مجموعه ناتهی باشد. در این‌صورت، $\mathbb{T} = \{\mathcal{X}, \varnothing\}$ یک توپولوژی بر $\mathcal{X}$ است به نام توپولوژی ناگسسته. این توپولوژی، کوچکترین توپولوژی ممکن (نسبت به شمول) بر $\mathcal{X}$ است.

مثال ۳.۱.۱. فرض کنیم $\mathcal{X}$ یک مجموعه ناتهی باشد. در این‌صورت $\mathbb{T} = P(\mathcal{X})$ یک توپولوژی بر $\mathcal{X}$ است. این توپولوژی را توپولوژی گسسته می‌نامند، و این بزرگترین توپولوژی ممکن بر $\mathcal{X}$ است.

مثال ۴.۱.۱. فرض کنید $(\mathcal{X}, d)$ یک فضای متری باشد. در این‌صورت، گردایه‌ی تمام زیرمجموعه‌های باز $\mathcal{X}$ از خواص یک توپولوژی بهره‌مند است. لذا هر فضای متری یک فضای توپولوژیک است. برای توضیح بیشتر رجوع کنید به [۲۱].

حال مجموعه‌های بسته را مانند فضاهای متری تعریف می‌کنیم. زیرمجموعه $E \subseteq \mathcal{X}$ بسته است اگر و فقط اگر متممش باز باشد. در این محدوده گوی‌های فضای متری با همسایگی‌ها عوض می‌شوند. یک همسایگی نقطه x مجموعه باز دلخواه شامل x است. بست و نقاط انباشتگی یک مجموعه همانند فضاهای متری تعریف می‌شوند.

تعریف ۵.۱.۱. $(\mathcal{X}, \mathbb{T})$ یک فضای هاسدورف[۱] و $\mathbb{T}$ یک توپولوژی هاسدورف است اگر نقاط متمایز $\mathcal{X}$ همسایگی‌های از هم جدایی داشته باشند.

تعریف ۶.۱.۱. گوییم زیرمجموعه K از فضای توپولوژیک $(\mathcal{X}, \mathbb{T})$ فشرده است اگر هر پوشش باز K، زیرپوششی متناهی داشته باشد.
به خصوص، هرگاه $\mathcal{X}$ خود یک مجموعه‌فشرده باشد، آنگاه $(\mathcal{X}, \mathbb{T})$ را یک فضای توپولوژیک فشرده می‌نامیم.

از تعریف فوق واضح است که هر زیرمجموعه‌ی متناهی از یک فضای توپولوژیک باید فشرده باشد. همچنین روشن است که هر اجتماع متناهی از مجموعه‌های فشرده باید فشرده باشد.

قضیه ۷.۱.۱. *احکام زیر در فضای توپولوژیک هاسدورف $(\mathcal{X}, \mathbb{T})$ برقرارند:*

۱. *هر زیرمجموعه فشرده $\mathcal{X}$، بسته است.*

۲. *هرگاه B زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از مجموعه‌ی فشرده‌ی A باشد، آنگاه B فشرده است.*

اثبات: ر. ک. [۲۱]

تعریف ۸.۱.۱. گوییم تابع $f : (\mathcal{X}, \mathbb{T}_1) \longrightarrow (\mathcal{Y}, \mathbb{T}_2)$ بین دو فضای توپولوژیک $(\mathcal{X}, \mathbb{T}_1)$ و $(\mathcal{Y}, \mathbb{T}_2)$، در نقطه $a \in \mathcal{X}$ پیوسته است اگر به ازای هر همسایگی V از $f(a)$، یک همسایگی مانند W از a باشد به طوری که هروقت $x \in W$، $f(x) \in V$. هرگاه f در هر نقطه از $\mathcal{X}$ پیوسته باشد، آنگاه f را یک تابع پیوسته بر $\mathcal{X}$ می‌نامیم.

---
[۱] Hausdorff

قضیه ۹.۱.۱. *احکام زیر به ازای تابع $f : (\mathcal{X}, \mathbb{T}_۱) \longrightarrow (\mathcal{Y}, \mathbb{T}_۲)$ بین دو فضای توپولوژیک هم ارزند:*

۱. *f یک تابع پیوسته است.*

۲. *هرگاه $\mathcal{O}$ زیرمجموعه بازی از $\mathcal{Y}$ باشد، آنگاه $f^{-۱}(\mathcal{O})$ نیز باز است.*

۳. *به ازای هر زیرمجموعه A از $\mathcal{X}$، $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*

۴. *هرگاه C زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از $\mathcal{Y}$ باشد، آنگاه $f^{-۱}(\mathcal{C})$ زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از $\mathcal{X}$ است.*

اثبات: ر. ک. [۲۱]

تعریف ۱۰.۱.۱. دو فضای توپولوژیک $(\mathcal{X}, \mathbb{T}_۱)$ و $(\mathcal{Y}, \mathbb{T}_۲)$ را همانریخت نامیم اگر یک تابع یک به یک و پوشا مانند $f : (\mathcal{X}, \mathbb{T}_۱) \longrightarrow (\mathcal{Y}, \mathbb{T}_۲)$ باشد به طوری که f و $f^{-۱}$ هر دو پیوسته باشند. در این‌صورت تابع f تعریف شده در بالا را یک همئومورفیسم می‌نامیم.

قضیه ۱۱.۱.۱. *هرگاه $f : (\mathcal{X}, \mathbb{T}_۱) \longrightarrow (\mathcal{Y}, \mathbb{T}_۲)$ یک تابع پیوسته بوده و A زیرمجموعه‌ی فشرده $\mathcal{X}$ باشد، آنگاه $f(A)$ زیرمجموعه‌ی فشرده‌ای از $\mathcal{Y}$ است.*
به خصوص، هر تابع حقیقی پیوسته بر فضای توپولوژیک $(\mathcal{X}, \mathbb{T}_۱)$ ماکزیمم و مینیمم خود را بر یک زیرمجموعه فشرده $\mathcal{X}$ می‌گیرد.
اثبات: ر. ک. [۲۱]

تعریف ۱۲.۱.۱. فضای توپولوژیک $(\mathcal{X}, \mathbb{T})$ را موضعا فشرده نامیم اگر هر نقطه از $\mathcal{X}$ همسایگیی داشته باشد که بستارش فشرده باشد.
واضح است که هر فضای فشرده، موضعا فشرده است ولی عکس آن برقرار نیست. به عنوان مثال $\mathbb{R}^n$ فشرده نیست ولی موضعا فشرده است.

قضیه ۱۳.۱.۱. *فرض کنید $(\mathcal{X}, \mathbb{T})$ یک فضای توپولوژیک موضعا فشرده هاسدورف باشد. همچنین، V یک مجموعه‌ی باز و A یک مجموعه‌ی فشرده باشد به طوری که $A \subseteq V$. در این صورت، مجموعه‌ی بازی چون $\mathcal{O}$ با بست فشرده هست به طوریکه $A \subseteq \mathcal{O} \subseteq \overline{\mathcal{O}} \subseteq V$.*
اثبات: ر. ک. [۲۱]

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای توپولوژیک باشد. در این صورت یک جداسازی $\mathcal{X}$ یعنی زوج مرتبی مانند (U, V) که در آن U و V دو مجموعه‌ی باز غیر تهی $\mathcal{X}$ هستند به طوریکه $\mathcal{X} = U \cup V$ و $U \cap V = \phi$.

تعریف ۱.۱.۱۵. فضای $\mathcal{X}$ را همبند می‌گویند، در صورتی که هیچ جداسازی نداشته باشد. در واقع $\mathcal{X}$ را نتوان به صورت اجتماع دو مجموعه ناتهی مانند U و V نوشت، به شرطی که:

$$U \cap \bar{V} = \phi \quad \text{و} \quad \bar{U} \cap V = \phi.$$

تعریف ۱.۱.۱۶. فضای توپولوژیک $\mathcal{X}$ را نرمال می‌نامند هرگاه به ازای هر دو مجموعه‌ی بسته‌ی $\mathcal{X}$ مانند E و F که $E \cap F = \phi$، دو مجموعه‌ی باز جدا از هم مانند U و V وجود داشته باشند به طوریکه $E \subseteq U$ و $F \subseteq V$.

قضیه ۱.۱.۱۷. *فرض کنید E و F دو زیر مجموعه‌ی فضای توپولوژیک $\mathcal{X}$ باشند. به علاوه فرض کنیم تابعی پیوسته مانند $f : \mathcal{X} \longrightarrow [0,1]$ چنان وجود داشته باشد که به ازای هر x از E، $f(x) = 0$ و به ازای هر x از F، $f(x) = 1$. در این‌صورت مجموعه‌های بازی مانند U و V موجودند به طوریکه $E \subseteq U$ و $F \subseteq V$ و $U \cap V = \phi$.*

اثبات: ر. ک. [۲۲]

نتیجه ۱.۱.۱۸. *فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای توپولوژیک با خاصیت زیر باشد:*
به ازای هر دو مجموعه‌ی بسته‌ی جدا از هم مانند E و F، تابعی پیوسته مانند $f : \mathcal{X} \longrightarrow [0,1]$ موجود است به طوریکه به ازای هر x از E، $f(x) = 0$ و به ازای هر x از F، $f(x) = 1$. در این صورت $\mathcal{X}$ نرمال است.

اثبات: ر. ک. . [۲۲]

قضیه ۱.۱.۱۹. *(**لم اوریسون**[۲]) فرض کنید A و B مجموعه‌های بسته‌ی جدا از همی در فضای نرمال $\mathcal{X}$ باشند. آنگاه تابع پیوسته‌ی $f : \mathcal{X} \longrightarrow [0,1]$ چنان وجود دارد که*

۱. *$f(a) = 0$، برای هر $a \in A$.*

۲. *$f(b) = 1$، برای هر $b \in B$.*

اثبات: ر. ک. [۲۲]

تعریف ۱.۱.۲۰. فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای توپولوژیک باشند، و $A \subseteq \mathcal{X}$. به علاوه فرض کنید $f : A \longrightarrow \mathcal{Y}$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت تابع $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ را یک توسیع f می‌خوانیم در صورتی که $F \mid A = f$. به عبارت دیگر، به ازای هر x از A، $F(x) = f(x)$.

[۲] Uryson

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان (مجموعه اعداد حقیقی یا مختلط) باشد، که عناصرش اسکالر نامیده می‌شوند. یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ یک مجموعه‌ی غیرتهی X که عناصرش را بردار نامند با دو عمل دوتایی :

۱. جمع برداری: $X \times X \to X$ با ضابطه‌ی $+(v,\omega) = v+\omega$، که در اینجا v و ω عضو X هستند.

۲. ضرب اسکالری: $\mathbb{F} \times X \to X$ با ضابطه‌ی $\times(\alpha, v) = \alpha \times v$، که در اینجا، $v \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$.

است که در شرایط زیر صدق می‌کند.

۱. برای هر v، ω و u عضو X داریم، $v + (\omega + u) = (v + \omega) + u$ (خاصیت شرکت‌پذیری جمع برداری)

۲. برای هر v و u عضو X داریم $v+u = u+v$ (خاصیت جابجایی جمع)

۳. عمل جمع برداری دارای عنصر خنثی صفر است یعنی، به ازای هر $v \in X$ داریم، $v + ۰ = v$

۴. عمل جمع برداری دارای عنصر وارون است یعنی، به ازای هر $v \in X$، یک عنصر $u \in X$ وجو دارد به‌طوری‌که $v + u = ۰$، $(u = -v)$

۵. به ازای هر $\alpha \in \mathbb{F}$ و v و u عضو X داریم، $\alpha(v + u) = \alpha v + \alpha u$ (خاصیت توزیع‌پذیری ضرب اسکالری نسبت به جمع برداری)

۶. به ازای هر $v \in X$ و α و β عضو $\mathbb{F}$ داریم، $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ (خاصیت توزیع‌پذیری جمع اسکالری نسبت به ضرب اسکالری)

۷. به ازای هر $v \in X$ و α و β عضو $\mathbb{F}$ داریم، $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ (خاصیت توزیع‌پذیری ضرب اسکالری نسبت به ضرب در میدان اسکالرها)

۸. عمل ضرب اسکالری دارای عنصر یکه است یعنی، به ازای هر $v \in X$، یک عنصر $۱ \in \mathbb{F}$ وجو دارد به‌طوری‌که $۱v = v$

تعریف ۲۲.۱.۱. یک نیم نرم روی فضای برداری X، تابعی چون $\|\cdot\| : x \longrightarrow \|x\|$، از X به $[۰, \infty)$ است بطوریکه:

۱. به ازای هر $x, y \in X$، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

۲. به ازای هر $x \in X$ و $t \in \mathbb{C}$، $\|tx\| = |t| \; \|x\|$.

اگر علاوه بر این، از $\|x\| = 0$ نتیجه شود که $x = 0$، آنگاه $\|\cdot\|$ را یک نرم روی X می‌نامند.
اگر $\|\cdot\|$ یک نرم روی X باشد، X را یک فضای نرم‌دار می‌نامیم. در این صورت با قرار دادن

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

زوج (X, d) یک فضای متری خواهد بود که متر d را متر تولید شده توسط نرم می‌گوئیم.

تعریف ۲۳.۱.۱. دو نرم $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ را روی فضای برداری نرم‌دار X معادل می‌گویند، هرگاه اعداد ثابتی مانند $m, M \geq 0$ وجود داشته باشند، به طوریکه به ازای هر $x \in X$، داشته باشیم:

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2.$$

توجه کنید که در این صورت توپولوژیهای القایی توسط این دو نرم نیز برابر خواهند بود.

قضیه ۲۴.۱.۱. *در یک فضای برداری با بعد متناهی ، همه‌ی نرم‌ها معادل هستند.*
اثبات: ر. ک. [۲۱]

تعریف ۲۵.۱.۱. اگر X یک فضای نرم‌دار باشد، آنگاه گوی یکه در X را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$ball\ X = \{x \in X \ : \ \|x\| \leqslant 1\}$$

تعریف ۲۶.۱.۱. گوییم زیرمجموعه‌ی A از یک فضای نرم‌دار، کراندار نرمی (یا فقط کراندار) است هرگاه $M > 0$ی باشد به طوری که $\|x\| \leq M$، به ازای هر $x \in A$ برقرار باشد.
هر دنباله‌ی کشی $\{x_n\}$ از یک فضای نرمدار، کراندار است.

گزاره ۲۷.۱.۱. *فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد آنگاه*

۱. *نگاشت $X \times X \longrightarrow X$ که به ازای هر $x, y \in X$ به صورت $(x, y) \longrightarrow x + y$ تعریف شده باشد، پیوسته است.*

۲. *نگاشت $\mathbb{F} \times X \longrightarrow X$ که به ازای هر $x \in X$ و $\lambda \in \mathbb{F}$ به صورت $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ تعریف شده باشد، پیوسته است.*

اثبات: ر. ک. [۲۱]

تعریف ۲۸.۱.۱. فضای نرم‌دار X را یک فضای کامل می‌گویند، هرگاه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری و $\|\cdot\|$ یک نرم روی X باشد. اگر X با متر تولید شده توسط این نرم، یک فضای کامل باشد، آنگاه $(X, \|\cdot\|)$ را یک فضای باناخ می‌گویند.

مثال ۳۰.۱.۱. از جمله ساده‌ترین فضاهای باناخ عبارتند از $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{C}^n$، یعنی فضاهای برداری n بعدی روی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$، که با متر اقلیدسی معمولی مجهز شده‌اند؛ هرگاه مثلا،

$$z = (z_۱, z_۲, ..., z_n) \quad (z_i \in \mathbb{C})$$

یک بردار در $\mathbb{C}$ باشد، آنگاه

$$\|z\| = \left(|z_۱|^۲ + ... + |z_n|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} .$$

روی $\mathbb{C}$ می‌توان نرم‌های دیگری نیز تعریف کرد. به عنوان مثال،

$$\|z\| = \max\left(|z_i| \ : \ ۱ \leq i \leq n\right) \quad \text{یا} \quad \|z\| = |z_۱| + |z_۲| + ... + |z_n|.$$

برای توضیحات بیشتر رجوع کنید به [۲۱].

مثال ۳۱.۱.۱. روی $\mathbb{R}^۲$ نرم $\|.\|_\infty : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow [۰, +\infty)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$$

در این صورت این نگاشت با تعریف بالا یک نرم روی $\mathbb{R}^۲$ می‌باشد که $\mathbb{R}^۲$ تحت آن کامل می‌باشد، بنابراین $(\mathbb{R}^۲, \|.\|_\infty)$ یک فضای باناخ می‌باشد.
برای توضیحات بیشتر رجوع کنید به [۲۱].

مثال ۳۲.۱.۱. روی $\mathbb{R}^۲$ نرم $\|.\|_۱ : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow [۰, +\infty)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\|(x, y)\|_۱ = |x| + |y|$$

در این صورت این نگاشت با تعریف بالا یک نرم روی $\mathbb{R}^۲$ می‌باشد که $\mathbb{R}^۲$ تحت آن کامل می‌باشد، بنابراین $(\mathbb{R}^۲, \|.\|_۱)$ یک فضای باناخ می‌باشد.
برای توضیحات بیشتر رجوع کنید به [۲۱].