متروید‌های ۳–همبند غیردودویی

مهدی مولایی

مرکز آموزش‌های نیمه حضوری دانشگاه ارومیه

گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر قدرت الله آزادی

مهر ۱۳۸۹

تقدیم به پدر بزرگوارم،

مادر مهربانم و

همسر عزیزم

تشکر و قدردانی

سپاس و قدردانی صمیمانه‌ی خود را تقدیم استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتر آزادی، داور خارجی جناب آقای دکتر اذانچیلر، داور داخلی جناب آقای دکتر آقالاری و تمام کسانی می‌نمایم که در به ثمر رسیدن این پایان‌نامه مرا یاری نمودند.

فهرست مندرجات

چکیده

یک ماترویید دودویی است اگر و تنها اگر هیچ مینوری یکریخت با $U_{۲,۴}$ که نمایش هندسی آن یک خط چهار نقطه‌ای است، نداشته باشد. این قضیه توسط بیکسبای توسیع داده شد، او ثابت کرد که هر عنصری در یک ماترویید همبند غیردودویی در یک $U_{۲,۴}$—مینور قرار دارد. این نتیجه بعدها توسط سیمور توسیع داده شد. او نشان داد که هر جفت از عناصر در یک ماترویید ۳—همبند غیردودویی در یک $U_{۲,۴}$—مینور قرار دارند. در این پایان‌نامه قضیه سیمور را توسیع می‌دهیم به این صورت که اگر $\{x, y, z\}$ مشمول در یک ماترویید ۳—همبند غیردودویی M باشد، آنگاه M یک $U_{۲,۴}$—مینور شامل $\{x, y, z\}$ دارد یا M یک مینوری یکریخت با چرخشی از رتبه سه دارد که $\{x, y, z\}$ را به عنوان لبه یا مجموعه پره‌هایش دارد.

این پایان‌نامه بر اساس مقاله زیر تنظیم شده است.

James G.Oxley, On Nonbinary 3 − Connected Matriods

Transacitions of the American Mathematical society, Vol.300, no.2.(Apr., 1987), pp.663−679

پیشگفتار

این پایان‌نامه شامل پنج فصل می‌باشد. در فصل اول مفاهیم مقدماتی گراف و متروید را می‌آوریم. در فصل دوم همبندی گراف‌ها و مترویدها و ۱—جمع و ۲—جمع مترویدها و رابطه آن با ۳—همبندی مترویدها را مورد بحث قرار می‌دهیم. در فصل سوم کمان‌ها، بنیادها، چرخش‌ها و چرخ‌ها را بررسی می‌کنیم که کاربرد زیادی در برهان قضیه اساسی دارد. فصل چهارم شامل یک سری تعریف و سپس قضایایی در رابطه با مترویدهای ۳—همبند است. فصل پنج شامل لم‌های به هم پیوسته‌ای است که برهان قضیه اساسی را کامل می‌کند. سیمور نشان داد که اگر $\{x,y\} \subseteq E(M)$، آنگاه M یک مینور یکریخت با $U_{۲,۴}$ دارد که مجموعه زمینه‌اش شامل x,y می‌باشد. سیمور همچنین حدس زد که اگر M غیردودویی و ۴—همبند و $\{x,y,z\} \subseteq E(M)$ باشد، آنگاه M یک $U_{۲,۴}$—مینور شامل z,y,x دارد. علاوه بر این او متذکر شد که این حدس برای مترویدهای خاصی نادرست می‌باشد. در این پایان‌نامه ما مستقیماً به حدس سیمور نمی‌پردازیم اما دقیقاً مشخص می‌کنیم که چه زمانی این حدس برای مترویدهای ۳—همبند غیردودویی نادرست می‌باشد.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

دراین فصل تعاریف و نتایج مقدماتی، که در فصل‌های بعدی این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، را می آوریم.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی نظریه گراف

تعریف ۱.۱.۱ **گراف**[۱] G سه‌تایی است متشکل از یک مجموعه متناهی و غیرخالی $V(G)$، که اعضای آن رأس‌های گراف، و مجموعه متناهی $E(G)$، که اعضای آن یال‌های گراف نامیده می‌شوند، به همراه رابطه‌ای که به هر عضو $E(G)$ دو عضو از $V(G)$ را وابسته می‌کند. اگر $e = uv$ یک یال از گراف G باشد، u و v را **نقاط انتهایی**[۲] آن یال گوییم. علاوه بر این u

[۱] Graph
[۲] End points

و v را دو رأس **مجاور**[۳] نیز می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ اگر $e = uv$ یالی از گراف G باشد که نقاط انتهایی آن یکسان می‌باشند، e را یک **طوقه** [۴] گوییم، و اگر دو یال دارای نقاط انتهایی یکسان باشند آنها را **موازی** [۵] می‌نامیم.

گراف فاقد طوقه و یال موازی را **ساده** [۶] می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱ **درجه** [۷] رأس v_i که با نماد $d(v_i)$ نمایش داده می‌شود، تعداد یالهایی می‌باشند که بر آن رأس واقع هستند.

تعریف ۴.۱.۱ گراف H را یک **زیرگراف** [۸] گراف G گوییم هرگاه $V(H)$ و $E(H)$ به ترتیب زیرمجموعه‌هایی از $V(G)$ و $E(G)$ باشند.

تعریف ۵.۱.۱ هرگاه G_1 و G_2 دو گراف باشند، **اجتماع**[۹] آنها که با نماد $G_1 \cup G_2$ نمایش داده می‌شود، گرافی است با مجموعه رئوس $V(G_1) \cup V(G_2)$ و مجموعه یالهای $E(G_1) \cup E(G_2)$.

[۳] Adjacent
[۴] Loop
[۵] Multiple edges
[۶] Simple
[۷] Degree
[۸] Subgraph
[۹] Union

تعریف ۶.۱.۱ دو گراف G و H را **یکریخت** [۱۰] گوییم هرگاه نگاشت‌های دو سویی $\psi : V(G) \to V(H)$ و $\theta : E(G) \to E(H)$ چنان موجود باشند که رأس v از گراف G روی یال e از گراف G باشد اگر و تنها اگر $\psi(v)$ روی یال $\theta(e)$ باشد. دو گراف یکریخت G و H را با نماد $G \cong H$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۱.۱ در یک گراف ساده n رأسی مانند G، اگر هر دو رأس دلخواه آن با هم مجاور باشند، گراف را **کامل** [۱۱] گوییم و با نماد K_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱ **مکمل**[۱۲] گراف G که آن را با نماد $\overline{G}$ نشان می‌دهیم، گراف ساده‌ای با مجموعه رئوس $V(G)$ است که در آن $uv \in E(\overline{G})$ اگر و تنهااگر $uv \notin E(G)$.

تعریف ۹.۱.۱ دنباله $v_0 e_1 v_1 ... v_{k-1} e_k$ از عناصر گراف G را که در آن v_i ها رأس‌های گراف و e_i ها یال‌های آن می‌باشند به طوری که هریال e_i مجاور با رأسهای v_{i-1} و v_i می‌باشد، یک **گشت**[۱۳] گوییم.

هر گشتی که در آن رئوس و یال‌ها مجزا باشند، یک **مسیر**[۱۴] نامیده می‌شود.

هر مسیر بسته را یک **دور**[۱۵]گوییم.

دوری که تعداد یال‌های آن فرد باشد را دور فرد گوییم.

---

[۱۰] Isomorphic

[۱۱] Complete

[۱۲] Complement

[۱۳] Walk

[۱۴] Path

[۱۵] Cycle

لم ۱۰.۱.۱ هر u,v−گشت، شامل یک u,v−مسیر می‌باشد.

برهان: به لم (۵.۲.۱) از مرجع [۱۴] مراجعه شود. ■

تعریف ۱۱.۱.۱ گرافی را که هر یال آن سودار یا جهت‌دار باشد، **گراف سودار یا جهت‌دار**[۱۶] گوییم.

تعریف ۱۲.۱.۱ **گراف زیربنای**[۱۷] گراف سودار G گرافی است که در آن به جای هر یال سودار، یک یال بی‌سو با همان نقاط انتهایی قرار می‌گیرد.

تعریف ۱۳.۱.۱ گراف $G=(V,E)$ را یک گراف **دوبخشی**[۱۸] گویند، هرگاه بتوان مجموعه رئوس G را به $V=X\cup Y$ افراز کرد که هر یال دارای یک نقطه انتهایی در X و دیگری در Y باشد. گراف دوبخشی G را به صورت سه‌تایی (X,Y,E) نیز نمایش می‌دهند.

هرگاه تعداد عناصر مجموعه‌های X و Y به ترتیب برابر m و n باشند، و هر رأس X مجاور با هر رأس Y باشد، گراف دوبخشی را کامل گفته و با نماد $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم.

لم ۱۴.۱.۱ گراف G دوبخشی است اگر و تنها اگر هیچ دور فردی نداشته باشد.

برهان: به قضیه (۵.۲.۱) از مرجع [۱۴] مراجعه شود. ■

---

[۱۶] Digraph
[۱۷] Underlying Graph
[۱۸] Bipartite graph

۲.۱ مفاهیم مقدماتی نظریه متروید

تعریف ۱.۲.۱ **متروید**[۱۹] M، زوج مرتب $(E,\mathcal{I})$ می‌باشد که در آن E مجموعه‌ای متناهی بوده و $\mathcal{I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های E می‌باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$(I1)$ $\varnothing \in \mathcal{I}$.

$(I2)$ هرگاه $I \in \mathcal{I}$ و $I' \subseteq I$، در این صورت $I' \in \mathcal{I}$.

$(I3)$ هرگاه I_1 و I_2 متعلّق به $\mathcal{I}$ باشند و $|I_1| < |I_2|$، در این صورت عضوی از $I_2 - I_1$ مانند e چنان وجود دارد که $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.

شرط سوم را اصل بقای استقلال گوییم.

اعضای $\mathcal{I}$ را **مجموعه‌های مستقل**[۲۰] و مجموعه E را **مجموعه زمینه**[۲۱] متروید M گوییم.

مجموعه‌های مستقل ماکسیمال را **پایه**[۲۲]های یک متروید گوییم.

زیرمجموعه‌هایی از E را که در $\mathcal{I}$ نیستند، مجموعه‌های **وابسته**[۲۳] متروید گوییم.

مجموعه‌های وابسته مینیمال را **دور**[۲۴]های متروید گوییم.

[۱۹] Matroid
[۲۰] Independant Sets
[۲۱] Ground Set
[۲۲] Base
[۲۳] Dependant
[۲۴] Circuits

تعریف ۲.۲.۱ یک دور سه عضوی را یک **مثلث** [۲۵] و یک هم‌دور سه عضوی را یک، **سه‌تایی**[۲۶] گویند.

قضیه ۳.۲.۱ فرض کنید که I یک مجموعه مستقل در M و e یک عنصر از M باشد به طوری که $I \cup e$ وابسته است. در این صورت M یک دور یکتا مشمول در $I \cup e$ دارد که این دور شامل e می‌باشد.

برهان: به قضیه (۶.۱.۱) از مرجع [۷] مراجعه شود. ■

مثال ۴.۲.۱ فرض کنید A ماتریس زیر باشد:

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

که در آن ستون‌ها به ترتیب از چپ با اعداد ۱، ۲، ۳، ۴و ۵ نام‌گذاری شده‌اند. در این صورت با فرض: $E = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$

و $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{۱\}, \{۲\}, \{۴\}, \{۵\}, \{۱, ۲\}, \{۱, ۵\}, \{۲, ۴\}, \{۲, ۵\}, \{۴, ۵\}\}$

$(E, \mathcal{I})$ یک متروید می‌باشد. ملاحظه می‌شود که اعضای $\mathcal{I}$ دقیقاً زیرمجموعه‌های مستقل خطی از مجموعه بردارهای ستونی ماتریس A می‌باشند. متروید تولید شده به روش فوق را یک **متروید برداری** [۲۷] گوییم و با نماد $M[A]$ نمایش می‌دهیم. ■

[۲۵] Triangle
[۲۶] Triad
[۲۷] Vector Matroid

قضیه **۵.۲.۱** فرض کنید $\mathcal{C}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعه E باشد. در این صورت $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از دورهای یک ماترویید روی E است، اگر و تنها اگر $\mathcal{C}$ در شرایط زیر صدق کند:

$(C۱)$ $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

$(C۲)$ هرگاه $C_۱$ و $C_۲$ عناصری از $\mathcal{C}$ باشند و $C_۱ \subseteq C_۲$، در این صورت $C_۱ = C_۲$.

$(C۳)$ هرگاه $C_۱$ و $C_۲$ عناصر متمایزی از $\mathcal{C}$ باشند و $e \in C_۱ \cap C_۲$، در این صورت عضوی از $\mathcal{C}$ مانند $C_۳$ چنان موجود است که $C_۳ \subseteq (C_۱ \cup C_۲) - e$.

خاصیت زیر را اصل تغییر دور گوییم:

$(C_۳)'$ هرگاه $C_۱$ و $C_۲$ عناصر متمایزی از $\mathcal{C}$ باشند و $e \in C_۱ \cap C_۲$، و $f \in C_۱ - C_۲$ در این صورت عضوی از $\mathcal{C}$ مانند $C_۳$ چنان موجود است که $f \in C_۳ \subseteq (C_۱ \cup C_۲) - e$.

برهان: به نتیجه (۵.۱.۱) و قضیه (۱۱.۴.۱) از مرجع [۷] مراجعه شود. ■

قضیه **۶.۲.۱** اگر E را مجموعه یالهای گراف G و $\mathcal{C}$ را گردایه شامل مجموعه یالهای دورهای G در نظر بگیریم، آنگاه $\mathcal{C}$ مجموعه‌ای از دورهای یک ماترویید بر روی E می‌باشد.

برهان: به قضیه (۷.۱.۱) از مرجع [۷] مراجعه شود. ■

نکته **۷.۲.۱** ماترویید حاصل از گراف داده شده G را **ماترویید دوری** [۲۸] گراف G گوییم و با نماد $M(G)$ نمایش می‌دهیم.

[۲۸] Cycle Matroid

تعریف ۸.۲.۱ دو مترويد M_1 و M_2 را یکریخت گوییم و با نماد $M_1 \cong M_2$ نمایش می‌دهیم، هرگاه نگاشتی دوسویی مانند $\psi : E(M_1) \to E(M_2)$ چنان موجود باشد که برای هر $X \subseteq E(M_1)$، $\psi(X)$ در M_2 مستقل باشد اگر و تنها اگر X در M_1 مستقل باشد.

تعریف ۹.۲.۱ مترويدی را که یکریخت با یک مترويد دوری باشد، **مترويد گرافیک** [۲۹] گوییم.

تعریف ۱۰.۲.۱ هرگاه M یکریخت با مترويد برداری حاصل از ماتریس A روی میدان F باشد، گوییم M **قابل نمایش** [۳۰] روی میدان F است، یا F—**قابل نمایش** [۳۱] است. ماتریس A را نیز یک **نمایش** [۳۲] از M روی میدان F گوییم.

تعریف ۱۱.۲.۱ یک مترويد را **دودویی** [۳۳] گویند اگر قابل نمایش روی میدان $GF(2)$ باشد.

ماتریس دلخواه A را **کامل تک مدولی** [۳۴] گویند اگر دترمینان هر زیرماتریس مربع از آن عضوی از $\{-1, 0, 1\}$ باشد.

یک مترويد را **منظم** [۳۵] گویند اگر قابل نمایش توسط یک ماتریس کامل تک مدولی باشد.

[۲۹] Graphic Matroid
[۳۰] Representable
[۳۱] F-Representable
[۳۲] Representation
[۳۳] Binary
[۳۴] Totally unimodular matrix
[۳۵] Regular

همان طور که می‌توان هر ماترویید را توسط دورهایش تبیین کرد، می توان آن را توسط پایه‌هایش نیز مطابق قضیه زیر بیان کرد:

قضیه **۱۲.۲.۱** فرض کنید $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعه E باشد. دراین صورت $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از پایه‌های یک ماترویید روی E است، اگر و تنها اگر $\mathcal{B}$ در شرایط زیر صدق کند:

$(B1)$ $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

$(B2)$ هرگاه B_1 و B_2 عناصری از $\mathcal{B}$ باشند و $x \in B_1 - B_2$، در این صورت عضوی مانند $y \in B_2 - B_1$ چنان موجود است که : $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$.

برهان: به لم (۱.۲.۱)، لم (۲.۲.۱)، قضیه (۳.۲.۱)، لم (۴.۲.۱) و نتیجه (۵.۲.۱) از مرجع [۷] مراجعه شود. ■

به عنوان نتیجه‌ای از قضیه فوق داریم:

نتیجه **۱۳.۲.۱** هرگاه B_1 و B_2 دو عضو از $\mathcal{B}$ باشند، در این صورت $|B_1| = |B_2|$.

مثال **۱۴.۲.۱** فرض کنید m و n اعدادی صحیح و نامنفی باشند به طوری که $m \leq n$ و E یک مجموعه n—عنصری و B گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های m—عنصری از E باشد. در این صورت B گردایه پایه‌های یک ماترویید است. چنین ماتروییدی را به وسیله $U_{m,n}$ نشان داده و ماترویید **یکنواخت** [۳۶] گویند. $U_{0,0}$ را ماترویید **تهی** [۳۷] گویند. ■

[۳۶] Uniform

[۳۷] Empty

تعریف ۱۵.۲.۱ هر متروید فاقد طوقه و یال‌های موازی را **متروید ساده**[۳۸] گوییم. مترویدی که هیچ مجموعه وابسته‌ای نداشته باشد را **آزاد**[۳۹] گویند. به عنوان مثال برای هر $n \geq 0$، $U_{n,n}$ مترویدی آزاد است.

قضیه ۱۶.۲.۱ فرض کنید M یک متروید و $\mathcal{B}^*(M) = \{E(M) - B \ : \ B \in \mathcal{B}(M)\}$ باشد. در این صورت $\mathcal{B}^*(M)$ مجموعه پایه‌های یک متروید روی $E(M)$ می‌باشد.

برهان: به قضیه (۱.۱.۲) از مرجع [۷] مراجعه شود. ■

تعریف ۱۷.۲.۱ متروید حاصل از قضیه فوق را **دوگان** [۴۰] متروید M گوییم و با نماد M^* نمایش می‌دهیم.

برای دوگان متروید M روابط زیر برقرارند:

$$\mathcal{B}^*(M) = \mathcal{B}(M^*) \qquad , \qquad (M^*)^* = M$$

همچنین برای متروید دلخواه M، اگر $M^* = M$، آنگاه M را **خود دوگان**[۴۱] گوییم. دورها، پایه‌ها، مجموعه‌های مستقل و وابسته M^* را هم‌دورها، هم‌پایه‌ها، مجموعه‌های هم‌مستقل و هم‌وابسته متروید M می‌گویند.

مثال ۱۸.۲.۱ اگر $M = U_{m,n}$، آنگاه داریم $M^* = U_{n-m,n}$. ■

[۳۸] Simple Matroid
[۳۹] Free
[۴۰] Dual
[۴۱] Self dual

گزاره **۱۹.۲.۱** اگر C و C^* دور و هم‌دوری از M باشند، آنگاه:

$$|C \cap C^*| \neq ۱$$

برهان: به قضیه (۱۱.۱.۲) از مرجع [۷] مراجعه شود. ■

گزاره **۲۰.۲.۱** فرض کنید $M = (E, \mathcal{I})$ یک متروید و $X \subseteq E(M)$ باشد. همچنین فرض کنید:

$$\mathcal{I} \mid_X = \{I \subseteq X \mid I \in \mathcal{I}\}$$

به راحتی می‌توان دید که $(X, \mathcal{I} \mid_X)$ یک متروید است.

برهان: به بخش (۱.۳) از مرجع [۷] مراجعه شود. ■

تعریف **۲۱.۲.۱** متروید فوق را **تحدید** [۴۲] متروید M به X و یا **حذف** [۴۳] $E - X$ از متروید M گویند و با نماد $M \mid_X$ یا $M \backslash (E - X)$ نمایش می‌دهند. مجموعه زمینه این متروید X می‌باشد.

تعریف **۲۲.۲.۱** فرض کنید $M = (E, \mathcal{I})$ یک متروید و $T \subseteq E(M)$ باشد. M/T را که به صورت زیر تعریف می‌شود، **انقباض** [۴۴] T در M گوییم.

$$M/T = (M^* \backslash T)^* \Rightarrow (M/T)^* = M^* \backslash T$$

---

[۴۲] Restriction
[۴۳] Deletion
[۴۴] Contraction

بدیهی است که $E(M/T) = E(M) - T$. مترویید حاصل را با نماد $M \cdot (E - T)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲۳.۲.۱ ماتروییدی که به وسیله دنباله‌ای از حذف‌ها و انقباض‌ها از مترویید M به دست می‌آید را می‌توان به صورت $M \setminus X/Y$ نمایش داد که X و Y مجموعه‌هایی مجزا هستند، که می‌توانند تهی نیز باشند. این مترویید را یک **مینور**[۴۵] مترویید M گویند. اگر $X \cup Y$ غیرتهی باشد، آنگاه $M \setminus X/Y$ را یک مینور سره گویند.

مترویید N_1 را یک $N-$مینور از مترویید M گوییم هرگاه N_1 یک مینور از M و یکریخت با N باشد.

گزاره ۲۴.۲.۱ N یک مینور از مترویید M است اگر و تنها اگر N^* یک مینور از مترویید M^* باشد. به ویژه

$$N^* = M^*/X\backslash Y \quad \Leftrightarrow \quad N = M\backslash X/Y$$

برهان: به قضیه (۲۷.۱.۳) از مرجع [۷] مراجعه شود. ■

تعریف ۲۵.۲.۱ فرض کنید N و M به ترتیب متروییدهایی روی E و $E \cup e$ باشند و $e \notin E$، در این صورت M یک **توسیع**[۴۶] از N است، اگر $M \setminus e = N$ و M یک **ارتقا**[۴۷] از N است، اگر M^* یک توسیعی از N^* باشد، یعنی $M^* \setminus e = N^*$. M را یک توسیع غیربدیهی

[۴۵] Minor
[۴۶] Extention
[۴۷] lift

از N گویند، اگر e یک طوقه یا هم‌طوقه از M نباشد و نیز e در یک دور دو عنصری از M نباشد. همچنین M را یک ارتقای غیربدیهی از N گویند، اگر M^* یک توسیع غیربدیهی از N^* باشد.

تعریف **۲۶.۲.۱** کلاسی از ماتروییدها را که همه مینورهایش نیز در این کلاس باشند، **بسته تحت مینور**[۴۸] یا **مینور بسته**[۴۹] گویند.

تعریف **۲۷.۲.۱** از آنجا که $M|_X$ یک ماترویید است، لذا پایه‌های این ماترویید به تعداد مساوی عضو دارند. تعداد اعضای پایه‌های ماترویید $M|_X$ را **رتبه**[۵۰] X در ماترویید M گوییم و با نماد $r(X)$ یا $r_M(X)$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$r_M(X) =$ تعداد اعضای زیرمجموعه مستقل ماکسیمال در X $= M|_X$ تعداد اعضای پایه

و یا:

$$r(X) = Max\{|Y|; Y \subseteq X, Y \in \mathcal{I}\}$$

برای تابع رتبه فوق، قضیه و گزاره زیر را داریم:

قضیه **۲۸.۲.۱** فرض کنید E یک مجموعه و $r : 2^E \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ یک تابع باشد. شرط لازم و کافی برای این که r تابع رتبه یک ماترویید باشد این است که در شرایط زیر صدق کند:

$(R1)$ اگر $X \subseteq E$، آنگاه $0 \leq r(X) \leq |X|$.

[۴۸] Close under minors

[۴۹] Minor-closed

[۵۰] Rank