بسم الله الرحمن الرحیم

تعهدنامه‌ی اصالت اثر و رعایت حقوق دانشگاه

تمامی حقوق مادی و معنوی مرتب بر نتایج، ابتکارات، اختراعات و نوآوری‌های ناشی از انجام این پژوهش، متعلق به **دانشگاه محقق اردبیلی** می‌باشد. نقل مطلب از این اثر، با رعایت مقررات مربوطه و با ذکر نام دانشگاه محقق اردبیلی، نام استاد راهنما و دانشجو بلامانع است.

اینجانب لیلا زال پور دانش‌آموخته مقطع کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز ریاضی دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه محقق اردبیلی به شماره‌ی دانشجویی ۹۰۲۲۴۰۳۱۲۱ که در تاریخ ۹۲/۰۷/۰۹ از پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود تحت عنوان " بررسی پایداری معادله نمایی " دفاع نموده‌ام، متعهد می‌شوم که:

۱) این پایان‌نامه را قبلاً برای دریافت هیچ‌گونه مدرک تحصیلی یا به عنوان هرگونه فعالیت پژوهشی در سایر دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزشی و پژوهشی داخل و خارج از کشور ارائه ننموده‌ام.

۲) مسئولیت صحّت و سقم تمامی مندرجات پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود را بر عهده می‌گیرم.

۳) این پایان‌نامه، حاصل پژوهش انجام شده توسط اینجانب می‌باشد.

۴) در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه و با رعایت اصل امانتداری علمی، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در متن و فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده‌ام.

۵) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده یا هر گونه بهره‌برداری اعم از نشر کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان‌نامه را داشته باشم، از حوزه‌ی معاونت پژوهشی و فنّاوری دانشگاه محقق اردبیلی، مجوزهای لازم را اخذ نمایم.

۶) در صورت ارائه‌ی مقاله‌ی مستخرج از این پایان‌نامه در همایش‌ها، کنفرانس‌ها، سمینارها، گردهمایی‌ها و انواع مجلات، نام دانشگاه محقق اردبیلی را در کنار نام نویسندگان (دانشجو و اساتید راهنما و مشاور) ذکر نمایم.

۷) چنانچه در هر مقطع زمانی، خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن (منجمله ابطال مدرک تحصیلی، طرح شکایت توسط دانشگاه و ...) را می‌پذیرم و دانشگاه محقق اردبیلی را مجاز می‌دانم با اینجانب مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه رفتار نماید.

نام و نام خانوادگی دانشجو: لیلا زال پور

امضا

تاریخ

دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان:
بررسی پایداری معادله نمایی

استاد راهنما:

دکتر عباس نجاتی

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا عبدالله پور

پژوهشگر:

لیلا زال پور

پاییز ۱۳۹۲

۱۳۵۷
دانشگاه محقق اردبیلی

دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه آموزشی ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیزریاضی

عنوان:

بررسی پایداری معادله ی نمایی

پژوهشگر:
لیلا زال پور

ارزیابی و تصویب شده‌ی کمیته‌ی داوران پایان‌نامه با درجه‌ی ...خوب...

نام و نام خانوادگی	مرتبه‌ی علمی	سمت	امضاء
عباس نجاتی	دانشیار	استاد راهنما و رییس کمیته‌ی داوران	
محمدرضا عبداله پور	استاد یار	استاد مشاور	
محمد رضا مطلبی	استادیار	داور	

مهر 1392

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر عباس نجاتی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر محمد رضا عبدالله‌پور که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

و در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکرمی‌کنم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

لیلا زال پور

۱۳۹۲

نام خانوادگی: زال پور　　　نام: لیلا

عنوان پایان‌نامه:
بررسی پایداری معادله نمایی

استاد راهنما: دکتر عباس نجاتی
استاد مشاور: دکتر محمدرضا عبدالله‌پور

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد
رشته: ریاضی محض　　　گرایش: آنالیز
دانشگاه: محقق‌اردبیلی　　　دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ دفاع: ۹۲/۰۷/۹　　　تعداد صفحات: ۶۰

چکیده
در این پایان نامه تلاش خواهد شد تا نتیجه مشهور ابرپایداری بیکر را برای توابع نمایی با مقادیر مختلط که روی یک جبر باناخ نیم ساده مختلط تعویض پذیر (دلخواه) تعریف شده است، تعمیم دهیم. جر نشان داده است که اگر مساله‌ی پایداری برای توابع نمایی مختلط مقدار به طور معمول بررسی شود، آنگاه مساله‌ی ابرپایداری برقرار نمی‌شود. در واقع جر نشان داده که اگر $(S,+)$ یک نیم‌گروه میانگین‌پذیر و $\varepsilon \in [0,1)$ داده شده باشد و $f : S \to C \setminus \{0\}$ برای هر $x, y \in S$ در رابطه‌ی $\left|\dfrac{f(x+y)}{f(x)f(y)} - 1\right| \leq \varepsilon$ صدق کند، آنگاه یک تابع $g : S \to C \setminus \{0\}$ وجود دارد به طوری که برای هر $x, y \in S$ روابط زیر برقرار است

$$g(x+y) = g(x)g(y)$$
$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| \leq \frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon}$$
$$\left|\frac{g(x)}{f(x)} - 1\right| \leq \frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

هدف مقاله این است کران $\dfrac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon}$ را در نابرابری‌های بالا طوری بهبود ببخشد تا با میل کردن ε به صفر آن کران به صفر میل کند. مهمترین ابزار در رسیدن به این هدف این است که ابتدا قضیه پایداری را برای آن توابع حقیقی مقداری ثابت می‌کنیم که مدول جمعی مجموعه‌ی همه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ هستند.

کلیدواژه‌ها: ابر پایداری، تابع نمایی، ε -تقریبی، گروه میانگین‌پذیر

فهرست مطالب

مقدمه

هرگاه X یک فضای خطی و Y یک فضای خطی نرمدار باشد، معادله‌ی تابعی $\varepsilon(f) = ۰$ را برای توابع $f : X \to Y$ در نظر بگیرید، گوییم این معادله‌ی تابعی پایداری هایرز [۱] - اولام [۲] دارد هرگاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$ و هر تابع $g : X \to Y$ که در نابرابری $\|\varepsilon(g)\| \leq \varepsilon$ صدق کند، تابع f موجود باشد به طوری که $\varepsilon(f) = ۰$ و نابرابری $\|f(x) - g(x)\| \leq K(\varepsilon)$ برای هر x از X برقرار باشد، که در آن $K(\varepsilon)$ فقط برحسب ε بیان می‌شود.

در سال ۱۹۴۰ برای اولین بار پایداری همومورفیسم‌های گروه توسط (اولام، ۱۹۶۰) به صورت زیر بیان شد:

تابع $f : G_۱ \to G_۲$ را در نظر بگیرید که در آن $(G_۱, *)$ یک گروه و $(G_۲, \diamond, d)$ یک گروه متریک با متریک $d(.,.)$ است. آیا برای $\varepsilon > ۰$ می‌توان $\delta(\varepsilon) > ۰$ ای پیدا کرد به گونه ای که هرگاه به ازای هر $x, y \in G_۱$ داشته باشیم

$$d(f(x * y), f(x) \diamond f(y)) < \delta,$$

آنگاه همومورفیسم $h : G_۱ \to G_۲$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $x \in G_۱$ داشته باشیم

$$d(f(x), h(x)) < \varepsilon.$$

به عبارت دیگر، اگر یک نگاشت به شکل تقریبی یک همومورفیسم باشد، چه موقع یک همومورفیسم نزدیک به آن وجود دارد. در سال ۱۹۴۱، هایرز پاسخ مسئله را در حالتی که $G_۱$ و $G_۲$ فضاهای باناخ باشند،

---
[۱] Hyers
[۲] Ulam

به صورت زیر بیان کرد.

قضیه ۱: (هایرز، ۱۹۴۱) فرض کنید $\delta > ۰$ ، $G_۱$ و $G_۱$ فضاهای باناخ باشند. اگر نگاشت $f : G_۱ \to G_۲$ به ازای هر $x \in G_۱$ در رابطه‌ی (تفاضل کوشی)

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta$$

صدق کند، آنگاه حد

$$L(x) = \lim \frac{۱}{۲^n} f(۲^n x)$$

به ازای هر $x \in G_۱$ موجود است و نگاشت $L : G_۱ \to G_۲$ یک نگاشت جمعی منحصر بفردی است که به ازای هر $x \in G_۱$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند

$$\|f(x) - L(x)\| \leq \delta.$$

در قضیه‌ی فوق، تفاضل کوشی به صورت کراندار بیان شده است. در نتیجه نگاشت f به‌صورت مجموع یک نگاشت جمعی و یک نگاشت کراندار نمایش داده می‌شود. در سال ۱۹۵۰، آئوکی [۱] با معرفی مفهوم تفاضل کوشی نامتناهی، تعمیمی از قضیه‌ی هایرز را برای نگاشت‌های جمعی ارایه کرد و در سال ۱۹۷۸، تمیستوکلس ام. راسیاس [۲] با تعمیم قضیه‌ی هایرز برای نگاشت‌های خطی، آن را در چارچوبی کلی‌تر تعمیم داد (بورجین، [۳] ۱۹۵۱).

قضیه ۲: (تی اچ. ام. راسیاس ، ۱۹۷۸) فرض کنید $\varepsilon > ۰$ ، $p < ۱$ ، E فضای خطی نرم‌دار و $E^۱$ فضای باناخ باشد. هرگاه نگاشت $f : E \to E^۱$ به ازای هر $x, y \in E$ در رابطه‌ی (تفاضل کوشی)

$$\|f(x + y) - f(x)f(y)\| \leq \varepsilon(\|x\|^p + \|\|^p) \qquad (۱)$$

۱ Aoki
۲ Themistocles M. Rassias
۳ Bourgin

صدق کند، آنگاه حد

$$L(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{۲^n}f(۲^n x)$$

به ازای هر $x\in E$ از E موجود است و نگاشت $L:E\to E'$ یک نگاشت جمعی منحصر بفردی است که به ازای هر $x\in E$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند

$$\|f(x)-L(x)\|\leq\frac{۲\varepsilon}{۲-۲^p}\|x\|^p \qquad (۲)$$

اگر $p<۰$ ، آنگاه نامساوی (۱) برای $x,y\neq ۰$ و نابرابری (۲) برای $x\neq ۰$ برقرار است. همچنین اگر نگاشت $t\longmapsto f(tx)$ از $\mathbb{R}$ به E' به ازای هر $x\in E$ پیوسته باشد، آنگاه نگاشت $L:E\to E'$ خطی خواهد بود.

نامساوی (۱) برای اولین بار توسط تی اچ. ام. راسیاس معرفی شد تأثیر زیادی را در توسعه‌ی تعمیم مفهوم پایداری هایرز - اولام فراهم کرد. این مفهوم جدید از پایداری، پایداری هایرز - اولام تعمیم یافته یا پایداری هایرز - اولام - راسیپاس برای معادلات تابعی نامیده می‌شود (زویک، ۱۹۹۸؛ هایرز ، ۱۹۹۸)

در سال ۱۹۹۰، تی اچ. ام. راسیاس در بیست و هفتمین گردهمایی بین‌المللی معادلات تابعی، این سوال را مطرح کرد که آیا می‌توان نظیر قضیه‌ی ۲ را در حالت $p\geq ۱$ ثابت کرد. در سال ۱۹۹۱، ز. گاجدا [۱] با بکارگیری روش مشابه آنچه که در مقاله‌ی تی اچ. ام راسیاس ۱۹۷۸ آمده بود، به این سؤال در حالت $p>۱$ پاسخ مثبت داد. گاجدا و همچنین تی اچ. ام. راسیاس به همراه پی. سیمرل [۲] ۱۹۹۲ با ارائه‌ی مثال‌هایی نشان دادند که قضیه‌ی ۲ در حالت $p=۱$ برقرار نیست. در سال ۱۹۸۲ جی. ام. راسیاس [۳] با استفاده از روش تی اچ. ام. راسیپاس، قضیه‌ی پایداری مشابهی را برای تفاضل کوشی نامتناهی ثابت کرد که در آن تابع کنترل $\|x\|^p\|y\|^q$ با فرض $p,q\in\mathbb{R}$ و $r=p+q\neq ۱$ به جای تابع کنترل $\|x\|^p+\|y\|^q$ بکار رفته است.

قضیه ۳: (جی . ام. راسیپاس ، ۱۹۸۲ ؛ ۱۹۸۹) فرض کنید $\varepsilon>۰$، X فضای خطی نرم‌دار و Y فضای باناخ باشد. اگر p,q اعداد حقیقی باشد به طوری که $r=p+q\neq ۱$ و نگاشت $f:X\to Y$ به ازای هر $x,y\in X$

[۱] Z. Gajda
[۲] P. Semrl
[۳] J . M. Rassias

در رابطه‌ی

$$\|f(x+y)-f(x)f(y)\| \le \varepsilon\|x\|^p\|y\|^q$$

صدق کند، آنگاه نگاشت جمعی یکتای $A: X \to Y$ موجود است که به ازای هر $x \in X$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند

$$\|f(x)-A(x)\| \le \frac{\varepsilon}{|۲^r-۲|}\|x\|^r$$

علاوه بر این، اگر نگاشت $f(tx) \longmapsto t$ از $\mathbb{R}$ به Y به ازای هر $x \in X$ از X پیوسته باشد، آنگاه نگاشت $A: X \to Y$ خطی خواهد بود.

(پی. گاوروتا [۱] ، ۱۹۹۰) با ارائه مثالی نشان داد که قضیه‌ی ۳ در حالت $r=۱$ برقرار نیست. فورتی و گاوروتا در مراجع (فورتی [۲] ، ۱۹۹۴) و (فورتی، ۱۹۸۰) و (گاوروتا، ۱۹۹۴) قضیه‌های ۲ و ۳ را به شکل خیلی کلی‌تر تعمیم دادند.

ما در این پایان‌نامه تلاش خواهیم کرد تا نتیجه‌ی مشهور ابرپایداری بیکر [۳] را برای توابع نمایی با مقادیر مختلط که روی یک جبر باناخ نیم‌ساده مختلط تعویض‌پذیر (دلخواه) تعریف شده است، تعمیم دهیم.

[۱] P.Gavruta
[۲] Forti
[۳] Baker

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

در این فصل برخی از تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را مرور می‌کنیم.

۱.۱ تعاریف و قضایا

تعریف ۱.۱.۱. $(G,+)$ یک نیم‌گروه است هرگاه به ازای هر $a,b,c \in G$ داشته باشیم

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

تعریف ۲.۱.۱. G گروه است هرگاه تحت عمل جمع بسته و چنان باشد که

۱)به ازای جمیع a,b,c واقع در G

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

۲)عضو همانی e در G چنان موجود است که به ازای جمیع a های واقع در G

$$a+e=e+a=a$$

۳) به ازای هر a ای در G عضو وارون $a^{۱}$ واقع در G چنان موجود است که

$$a+a^{۱}=a^{۱}+a=e$$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه با عمل جمع باشد در این صورت G آبلی است اگر عمل جمع تعویض‌پذیر باشد یعنی به ازای a,b واقع در G

$$a+b=b+a$$

تعریف ۴.۱.۱. فضای برداری روی ϕ مجموعه‌ای است مانند X که عنصرهایش را بردار نامیده و در آن دو عمل به نام‌های جمع و ضرب اسکالر تعریف شده اند که از خواص جبری زیر برخوردارند

(آ) به هر جفت از بردارهای x و y برداری مانند $x+y$ چنان نظیر است که

$$x+(y+z)=(x+y)+z \quad , \quad x+y=y+x$$

X بردار منحصربه فردی مانند ۰ (بردار صفر یا مبدأ X) دارد به طوری که به ازای هر $x \in X$ ، $x+0=x$ و به ازای هر $x \in X$ بردار منحصربه فردی مانند $-x$ چنان نظیر است که $x+(-x)=0$

(ب) به هر جفت (α, x) با $\alpha \in \phi$ و $x \in X$ چنان نظیر است که

$$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x \quad , 1x=x$$

و دو قانون بخشپذیری

$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x \quad , \quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$$

برقرار می‌باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید E_1 و E_2 دو فضای برداری باشد $f: E_1 \to E_2$ را تابع جمعی گوییم هرگاه رابطه‌ی زیر برقرار باشد

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad (x,y \in E_1).$$

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد ، تابع $\|.\|: X \to \mathbb{R}^+$ یک نرم بر X نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x,y,z \in A$ وبه ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم،

۱) به ازای هر $x,y \in A$ ، $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$ ،

۲) به ازای هر $x \in A$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ ، $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$ ،

۳) به ازای هر $x \in A$ ، $\|x\| \geqslant 0$ و $\|x\|=0$ اگر و تنها اگر $x=0$.

تعریف ۷.۱.۱. فضای نرم‌دار $(X,\|.\|)$ یک فضای باناخ نامیده می‌شود، هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۸.۱.۱. فضای برداری $(A,+,.)$ یک جبر مختلط نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $x,y,z \in A$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم،

۱- $(x+y).z = x.z + y.z$

۲- $x.(y.z) = (x.y).z$

۳- $\alpha.(x.y) = (\alpha x).y = x(\alpha y)$

علاوه بر این نگاشت $\|.\| : A \to R^+$ را یک نرم جبری روی A نامیده می‌شود، هرگاه علاوه بر برقراری شرایط نرم، به ازای هر $x,y \in A$ داشته باشیم

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

بعلاوه اگر جبر نرم‌دار A با نرم تعریف شده کامل باشد در این صورت A را یک جبر باناخ می‌نامند.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید A جبری باناخ باشد نگاشت $* : A \to A$ با ضابطه‌ی $*(x) = x^*$ یک عمل برگشت نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x,y \in A$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم،

۱- $(x+y)^* = x^* + y^*$

۲- $(\alpha x)^* = \alpha^- x^*$

۳- $(xy)^* = y^* x^*$

۴- $x^{**} = x$

تعریف ۱۰.۱.۱. جبر باناخ A با عمل برگشت $*$ یک C^* - جبر نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $x \in A$

$$\|x^*x\| = \|x\|^۲$$

مثال ۱.۱.۱. میدان اعداد مختلط $(\mathbb{C})$ با اعمال جمع معمولی و ضرب اسکالر با عمل برگشت $* : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی $*(\lambda) = \lambda^-$ و با عمل ضرب معمولی تؤام با نرم قدر مطلق، یک $\mathbb{C}^*$ - جبر می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱۱. زیرمجموعه‌ی I از جبر مختلط تعویض‌پذیر A را ایده‌آل می‌نامیم هرگاه

۱− I زیر فضایی از A باشد یعنی به ازای هر $a, b \in I$ ، $a - b \in I$.

۲− هرگاه $r \in A$ و $a \in I$ آنگاه $ra \in I$ و $ar \in I$.

تعریف ۱.۱.۱۲. ایده‌آل ماکزیمال یک ایده‌آل حقیقی است که مشمول هیچ ایده‌آل حقیقی بزرگتری نیست.

تعریف ۱.۱.۱۳. اشتراک تمام ایده‌آلهای ماکزیمال A را رادیکال A می‌گویند و با $radA$ نمایش می‌دهند. اگر $radA = ۰$، A را نیم‌ساده می‌نامند.

تعریف ۱.۱.۱۴. فرض کنید $\triangle$ مجموعه‌ی تمام همریختی‌های مختلط غیرصفر جبر باناخ تعویض‌پذیر A باشند برای هر $x \in A$ و $h \in \Delta$، تابع $x^\wedge : \Delta \to \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی $x^\wedge(h) = h(x)$ تبدیل گلفاند نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱۵. فضای توپولوژیک (X, τ) را فضای هاسدورف می‌نامیم هرگاه به ازای هر $a, b \in X$ که $a \neq b$ همسایگی‌های N_a و N_b که $a \in N_a$ و $b \in N_b$ موجود باشند آنگاه $N_a \cap N_b = \phi$

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنیم X یک فضای برداری باشد، مجموعه‌ی $C \subset X$ محدب است اگر

$$tC + (۱ - t)C \subset C \qquad (۰ \leq t \leq ۱).$$

به عبارتی دیگر اگر $x \in C$ ، $y \in C$ و $۰ \leq t \leq ۱$ باید C شامل $tx + (۱ - t)y$ باشد.

تعریف ۱.۱.۱۷. اگر X یک فضای برداری باشد و $V \subset X$، غلاف محدب V اشتراک تمام زیرمجموعه‌های محدب X است که شامل V می‌باشد و غلاف محدب V با $conv(V)$ نمایش داده می‌شود . ثابت شده است $conv(V)$ مجموعه‌ی تمام ترکیبات خطی محدب متناهی از اعضای V می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱۸. اگر A جبر باناخ باشد و $x \in A$ طیف $\sigma(x)$ از x مجموعه‌ی تمام اعداد مختلط λ ای است که $\lambda e - x$ معکوس‌پذیر نیست.

شعاع طیفی x عدد $\rho(x) = sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$ است.

تعریف ۱.۱.۱۹. گروه آبلی G را بخش‌پذیر می‌نامیم اگر برای هر عدد صحیح مثبت n و هر g از G، y ای در G وجود داشته باشد که $۲^n y = g$ به عبارت دیگر، یک گروه آبلی دو بخشی است اگر تنها اگر $G = ۲G$

تعریف ۱.۱.۲۰. فرض کنید $(G, .)$ یک نیم‌گروه و V یک فضای برداری از توابع مختلط مقدار روی G باشد. برای $f \in V$ و $x \in G$ تابع $\varphi_x^f : G \to \mathbb{C}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\varphi_x^f(y) = f(x.y).$$

V پایای راست نامیده می‌شود، اگر $f \in V$ ایجاب کند که تابع φ_x^f به ازای هر $x \in G$ متعلق به V باشد. به طور متشابه پایای چپ تعریف می‌شود. V پایا نامیده می‌شود هرگاه پایای چپ و راست باشد.

تعریف ۱.۱.۲۱. وقتی یک پایای چپ (راست) روی $B(G)$ وجود داشته باشد، G را یک گروه میانگین‌پذیر چپ(راست) می‌نامیم که $B(G)$ فضای همه‌ی توابع مختلط مقدار روی G است.

تعریف ۱.۱.۲۲. مجموعه‌ی مولد گروه G، زیرمجموعه‌ی S از G است به‌طوری که هر عضو G را بتوان از عناصر S نمایش داد، که تکرار عناصر S جایز است.

تعریف ۱.۱.۲۳. اگر G یک گروه آبلی با مجموعه‌ی متناهی از مولدها باشد، آنگاه G حاصل‌ضرب دکارتی از گروهای دوری نامتناهی $H_۱, H_۲, ..., H_n$ و گروهای دوری $F_۱, F_۲, ..., F_m$ از مرتبه‌ی متناهی است. اگر $n = ۰$، G بی‌تاب نامیده می‌شود.

ما در این پایان‌نامه تلاش خواهیم کرد تا نتیجه‌ی مشهور ابرپایداری بیکر را برای توابع نمایی با مقادیر مختلط که روی یک جبر باناخ نیم‌ساده مختلط تعویض‌پذیر (دلخواه) تعریف شده است، تعمیم دهیم.

فرض کنید $(S, +)$ یک نیم‌گروه دلخواه و $\mathbb{C}$ میدان همه‌ی اعداد مختلط باشد و نگاشت f از S به $\mathbb{C}$، یک نگاشت نمایی تقریبی است یعنی یک ε نامنفی وجود دارد به طوری که

$$|f(x + y) - f(x)f(y)| \leq \varepsilon \quad x, y \in S. \qquad (۱.۱)$$

آنگاه f کراندار است یا نمایی. (بیکر، ۱۹۸۰) همان نتیجه همچنین برای نگاشت نمایی تقریبی با مقادیری

در جبر نرم‌دار که نرم ضربی است، درست است. (بیکر، ۱۹۸۰) در همان مقاله بیکر با ارائه‌ی مثال زیر نشان داد که اگر جبر خاصیت نرم ضربی را نداشته باشد آن نتیجه رد می‌شود.

مثال ۲.۱.۱. فرض کنید $\delta \geq 0$ و $\varepsilon \geq 0$ انتخاب می‌کنیم به طوری که $\delta = |\varepsilon - \varepsilon^2|$ و فرض کنید نگاشت $f : C \to C \oplus C$ با ضابطه‌ی $f(x) = \left[\begin{smallmatrix} e^x & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{smallmatrix}\right]$ تعریف شده باشد .نرم ماتریس که به صورت

$$||M_{\alpha\beta}|| = \max|aij|$$

تعریف می‌شود، غیرضربی است.به ازای هر λ و μ مختلط داریم

$$||f(\lambda + \mu) - f(\lambda)f(\mu)|| = \delta$$

که نشان می‌دهد f غیر کراندار است. همچنین به ازای هر λ و μ مختلط

$$f(\lambda + \mu) = f(\lambda)f(\mu)$$

درست نیست.

در این مثال نقض جبر $A = C \oplus C$ را می‌توان به حاصل‌جمع مستقیم دو ایده‌آل $A = I \oplus J$ تجزیه کرد که $I = \{(\lambda, 0), \lambda \in C\}$ و $J = \{(0, \lambda), \lambda \in C\}$. اگر ما توسط P_1 و P_2 تصاویر متناظر با این حاصل‌جمع مستقیم تجزیه شده را تعریف کنیم، آنگاه نگاشت $P_1(f)$ نمایی است و $P_2(f)$ کراندار است. ما نشان خواهیم داد چنین رفتاری برای توابع نمایی تقریبی با مقادیری در یک جبر باناخ تعویض‌پذیر نیم‌ساده مختلط دلخواه رایج است.

در یک حالتی که یک همومورفیسم تقریبی باید یک همومورفیسم واقعی باشد، می‌گوییم معادله همومورفیسم ابرپایدار است. بیکر، لورنسو [1] و زورزیتو [2] برای اولین بار در موری مسأله‌ی ابرپایداری بحث کردند. جر [3] (۱۹۹۳) نشان داده که اگر مسأله‌ی پایداری برای توابع نمایی مختلط مقدار به طور معمول بررسی شود، آنگاه

[1] J . Lawrence
[2] F . Zorzitto
[3] R . Ger

مسأله‌ی ابرپایداری برقرار نمی‌شود. بنابراین خیلی طبیعی به نظر می‌رسد که برای تابع $f : S \to C \setminus \{۰\}$ مسأله را به صورت زیر مطرح کنیم :

$$\Big|\frac{f(x+y)}{f(x)f(y)} - ۱\Big| \leq \varepsilon, \qquad (x, y \in S). \tag{۲.۱}$$

این ظاهراً کلاس توابع مطرح شده را کاهش می‌دهد، چون ما مقادیر صفر ممکن را حذف کردیم.

در حالتی که $(S, +)$ یک گروه است، به راحتی می‌بینیم که هر جوابی از نامساوی (۱.۱) به طوری که $۰ \in f(S)$، کراندار است. توسط جر نشان داده شده که اگر $(S, +)$ یک نیم‌گروه دلخواه باشد به ازای هر $x \in S$ شرط $f(x) \neq ۰$ غیرضروری خواهد بود.

در همان مقاله جر رفتار پایداری هomomorفیسم تقریبی با مقادیری در گروه $(C \setminus \{۰\}, \cdot)$ را به روش زیر توصیف کرد. اگر $(S, +)$ یک نیم گروه میانگین‌پذیر و $\epsilon \in [۰, ۱)$ داده شده باشد و $f : S \to C \setminus \{۰\}$ برای هر $x, y \in S$ در رابطه‌ی

$$|\frac{f(x+y)}{f(x)f(y)} - ۱| \leq \varepsilon$$

صدق کند، آنگاه یک تابع $g : S \to C \setminus \{۰\}$ وجود دارد به طوری برای هر $x, y \in S$ روابط زیر برقرار است،

$$g(x + y) = g(x) + g(y)$$

$$\Big|\frac{g(x)}{f(x)} - ۱\Big| \leq \frac{۲ - \epsilon}{۱ - \epsilon}, \quad x \in S, \tag{۳.۱}$$

و

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - ۱\Big| \leq \frac{۲ - \varepsilon}{۱ - \varepsilon}, \quad x \in S. \tag{۴.۱}$$

هدف مقاله این است کران $\frac{۲ - \varepsilon}{۱ - \varepsilon}$ در نامساوی (۳.۱) و (۴.۱) را طوری بهبود ببخشد تا با میل کردن ε به صفر ، آن کران به صفر میل کند. مهمترین ابزار در رسیدن به این هدف این است که ابتدا قضیه پایداری را برای آن توابع حقیقی مقداری ثابت کنیم که مدول جمعی مجموعه‌ی همه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ هستند.