بسمه تعالی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

انشعاب سیکل‌های حدی توسط اختلال یک سیستم همیلتونی با یک حلقه هموکلینیک

سخنران: الهام مستاجران گورتانی

زمان: سه شنبه ۱۹ /۶ /۹۲ ساعت ۱۰ صبح

مکان: سالن خوارزمی دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱– دکتر رسول عاشقی

۲– دکتر محمدرضا رئوفی

۳– دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

۴– دکتر رضا مزروعی سبدانی

چکیده

در این پایان نامه انشعابات سیکل‌های حدی برای یک نوع از سیستم‌های چندجمله‌ای ناهموار را با مختل کردن یک سیستم همیلتونی قطعه‌ای خطی دارنده یک مرکز در مبدأ و یک حلقه هموکلینیک حول مبدا مطالعه می‌کنیم. با استفاده از تابع ملنیکوف مربوط به سیستم‌های تکه‌ای هموار نزدیک به همیلتونی، کران‌های پایینی برای ماکزیمم تعداد سیکل‌های حدی در انشعابات هاپف و هموکلینیک بیان می‌کنیم. هم چنین تخمینی برای تعداد سیکل‌های حدی که از طوق تناوبی بین مرکز و مدار هموکلینیک منشعب می‌شوند را به دست می‌آوریم. وقتی درجه جملات اختلال کم است، نتیجه دقیقی روی تعداد صفرهای تابع ملنیکوف مرتبه اول به دست می‌آوریم.

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

انشعاب سیکل‌های حدی توسط اختلال یک سیستم همیلتونی با یک حلقه هموکلینیک

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

الهام مستاجران گورتانی

استاد راهنما
دکتر رسول عاشقی

شهریور ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی خانم الهام مستاجران گورتانی
تحت عنوان

انشعاب سیکل‌های حدی توسط اختلال یک سیستم همیلتونی با یک حلقه هموکلینیک

در تاریخ ۱۹ /۶ /۹۲ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما	دکتر رسول عاشقی
۲– استاد مشاور	دکتر محمدرضا رئوفی
۳– استاد داور۱	دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه
۴– استاد داور۲	دکتر رضا مزروعی سبدانی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

تقدیم به:

خدایی که آفرید

جهان را، انسان را، عقل را، علم را، معرفت را، عشق را

و به کسانی که عشقشان را در وجودم دمید،

مادر و پدر عزیزم.

شهریور ۱۳۹۲

سپاس مخصوص، خداوند مهربان را که به انسان توانایی و دانایی بخشید تا به بندگانش شفقت ورزد، مهربانی کند و در حل مشکلاتشان یاریشان نماید. سپاس ایزد منّان را که به من فرصت داد تا به این مرحله از علم رسیده و از هیچ محبّتی دریغ نکرد و در تمام مراحل زندگیم مراقوّت قلب بود.

همتم بدرقه راه کن ای طایر قدس　　که دراز است ره مقصد و من نوسفرم

از خانواده عزیزم به ویژه پدر و مادر مهربانم به پاس محبت های بی دریغشان و اینکه همیشه مشوق و پشتیبانم بوده اند، از صمیم قلب سپاسگزارم.

با تقدیر و تشکر شایسته از استاد عالی رتبه و گرانقدر، جناب آقای دکتر رسول عاشقی که در کمال سعه صدر با حسن خلق و فروتنی از هیچ کمکی بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند.

سپاس و تقدیر شایسته از استاد گرامی و عالیقدر، جناب آقای دکتر محمدرضا رئوفی که زحمت مشاوره این پایان نامه را پذیرفتند.

سپاس و قدردانی از اساتید محترم داور، جناب آقای دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه و جناب آقای دکتر رضا مزروعی سبدانی که داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند.

در پایان تشکر خود را از دوستان عزیزم به پاس همیاری های صمیمانه در طی این دو سال ابراز می دارم.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

چکیده

در این پایان نامه انشعابات سیکل‌های حدی برای یک نوع از سیستم‌های چندجمله‌ای ناهموار را با مختل کردن یک سیستم همیلتونی قطعه‌ای خطی دارنده یک مرکز در مبدأ و یک حلقه هموکلینیک حول مبدا مطالعه می‌کنیم. با استفاده از تابع ملنیکوف مربوط به سیستم‌های تکه‌ای هموار نزدیک به همیلتونی، کران‌های پایینی برای ماکزیمم تعداد سیکل‌های حدی در انشعابات هاپف و هموکلینیک بیان می‌کنیم. هم چنین تخمینی برای تعداد سیکل‌های حدی که از طوق تناوبی بین مرکز و مدار هموکلینیک منشعب می‌شوند را به دست می‌آوریم. وقتی درجه جملات اختلال کم است، نتیجه دقیقی روی تعداد صفرهای تابع ملنیکوف مرتبه اول به دست می‌آوریم.

فصل ۱

مقدمه

۱.۰.۱ تاریخچه

مسائل متنوع و زیادی در علوم، مکانیک، مهندسی الکترونیک و تئوری کنترل وجود دارند که مدل بندی ریاضی آنها توسط سیستم‌های ناهموار توصیف می‌شود. مثال‌هایی مانند سیستم‌های فیدبک رله در تئوری کنترل، مدارات کلیدزنی در الکترونیک و قدرت، اصطکاک و ضربه در مهندسی مکانیک و ... در این زمینه وجود دارند. این مثال‌ها در [۱]، [۲] و [۳] آورده شده اند. در [۴–۶] انشعاب در سیستم‌های ناهموار شامل انشعاب هاپف، هموکلینیک و ساب‌هارمونیک مطالعه شده است. در [۷–۹] روش ملنیکف برای انشعابات هاپف و هموکلینیک به سیستم‌های ناهموار گسترش داده شده است. در [۱۰] روش معدل گیری برای سیستم‌های ناهموار معرفی شده است. نتایج بیشتر در [۱۱–۱۸] بیان شده‌اند. یکی از مهم‌ترین مسائل باز در نظریه معادلات دیفرانسیل در صفحه، تعیین تعداد ماکزیمم سیکل‌های حدی برای یک دستگاه چندجمله‌ای مرتبه n در صفحه است که اولین بار توسط هیلبرت در ابتدای قرن گذشته در دومین کنگره بین‌المللی ریاضی‌دانان در پاریس مطرح شد. این مسئله با گذشت بیش از یک قرن، علیرغم تحقیقات جدی و چاپ صدها مقاله پیرامون آن، هنوز برای $n = ۲$ باز است. تجزیه و تحلیل مسئله‌ی تعیین تعداد و موقعیت مکانی خانواده‌های موضعی و پیوسته از سیکل‌های حدی که بر اثر اختلال از مدارهای تناوبی یک دستگاه دینامیکی منشعب می‌شوند، بر اساس ایده زیر استوار است:

جایگزینی مسئله یافتن سیکل‌های حدی دستگاه مختل شده با مسئله یافتن صفرهای یک تابع مناسب.

برای به دست آوردن تابع مناسب، ابتدا برش پوانکاره $\Sigma_\circ$ را در نظر می‌گیریم که در حقیقت یک پاره خط یا کمانی است که خانواده‌ی مدارهای تناوبی دستگاه مختل نشده را به طور مورب قطع می‌کند. سپس به کمک نگاشت بازگشتی پوانکاره $(\xi, \varepsilon) \longmapsto \mathcal{P}(\xi, \varepsilon)$، که در آن ξ یک مختصه روی $\Sigma_\circ$ است و ε پارامتر اختلال است، تابع فاصله (تغییر مکان) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$d(\xi, \varepsilon) \equiv \mathcal{P}(\xi, \varepsilon) - \xi.$$

بر اساس این تعریف، صفرهای تابع فاصله متناظر با مدارهای تناوبی دستگاه مختل شده هستند که Σ_0 را قطع می‌کنند. چون $d(\xi, 0) \equiv 0$ ، تعیین مکان و مرتبه تکرار صفرهای d نیاز به دانستن مشتقات جزیی آن دارد. برای مثال اگر $d_\varepsilon(\xi_0, 0) = 0$ و $\partial_\xi d_\varepsilon(\xi_0, 0) \neq 0$ ، یعنی ξ_0 ریشه ساده است، آنگاه از قضیه تابع ضمنی وجود یک تابع هموار $\xi = \xi^*(\varepsilon)$ نتیجه می‌شود به طوری که $d(\xi^*(\varepsilon), \varepsilon) \equiv 0$ و منحنی $\xi = \xi^*(\varepsilon)$ متناظر با یک خانواده موضعی و پیوسته از سیکل‌های حدی است که از مدار تناوبی دستگاه مختل نشده که Σ_0 را در نقطه ξ_0 قطع می‌کند، منشعب می‌شود. حال اگر $h = H(\xi)$ و $d_E(h, \varepsilon) = H(\mathcal{P}(\xi, \varepsilon)) - H(\xi), \xi \in \Sigma_0$، برابر با افزایش انرژی در طول یک برش پوانکاره Σ_0 با مختص ξ از یک جریان همیلتونی با تابع همیلتونی H باشد، آنگاه تابع ملنیکف مرتبه k ام، $M_k(h)$ ، به صورت ضرایب در سری توانی تابع $d_E(h, \varepsilon)$ بر حسب توان‌های ε تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر

$$d_E(h, \varepsilon) = M_1(h)\,\varepsilon + M_2(h)\,\varepsilon^2 + M_3(h)\,\varepsilon^3 + \ldots.$$

بنابراین، سیکل‌های حدی متناظر با صفرهای ایزوله از اولین تابع ملنیکف غیر صفر هستند و کران بالای دقیق این ماکزیمم تعداد سیکل‌های حدی که از طوق تناوبی دستگاه مختل نشده ایجاد می‌شوند را تعیین می‌کند.

- در سال ۲۰۰۹ لالیبره سیستم مختل شده زیر را در نظر می‌گیرد

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y(a_1 x + a_0)(b_1 y + b_0) + \varepsilon p(x, y), \\ \dot{y} &= x(a_1 x + a_0)(b_1 y + b_0) + \varepsilon q(x, y). \end{aligned}$$

که در آن توابع p و q چندجمله‌ای دلخواه از درجه n هستند و برای $i = 1, 2$، $a_i, b_i \neq 0$ و ε به قدر کافی کوچک است. این سیستم یک مرکز در مبدا دارد، با استفاده از قضیه معدل‌گیری نشان می‌دهد که حداکثر $17n + 15$ سیکل حدی از مدارهای تناوبی منشعب می‌شود.

- در سال ۲۰۱۱ هان و یانگ نشان دادند برای سیستم لینارد

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -g(x) - \varepsilon f(x) y.$$

که دارای یک حلقه گوشه‌دار و یک حلقه هموکلینیک است، ماکزیمم تعداد سیکل‌های حدی منشعب از این حلقه‌ها، $n + 4[\frac{n+1}{2}]$ است.

- در سال ۲۰۰۰، هان نشان می‌دهد در سیستم $\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, \varepsilon, a)$ تعداد ماکزیمم سیکل‌های حدی که تحت اختلال در انشعاب هاپف به وجود می‌آید، ۳ است.

- در سال ۲۰۰۵ ژانگ و دیو روشی جدید برای محاسبه تابع ملنیکف مرتبه n برای مطالعه انشعابات هموکلینیک

در سیستم‌های نوسانگر غیر خطی به دست آورده اند.

- در سال ۲۰۰۸ هان و کائو یک میدان برداری درجه چهارم $Z_۲$-هم پایا را مطالعه کرده‌اند و نشان داده‌اند که برای این سیستم حداقل ۴ سیکل حدی بزرگ اطراف سیزده نقطه تکین وجود دارد و سپس با استفاده از روش انشعاب هموکلینیک مضاعف و قضیه پوانکاره-بندیکسون نتیجه می‌گیرند که ۱۶ سیکل حدی با دو ساختار متفاوت در این سیستم‌ها وجود دارد.

- در سال ۲۰۰۱ کال و گاسول پایداری یک نقطه تکین را برای معادلات دیفرانسیل ناپیوسته با یک خط از نقاط ناپیوستگی L بررسی می‌کنند. این کار برای اکثر حالتهای عام توسط محاسبه نوعی از ثابتهای لیاپانف انجام شده است. این محاسبات براساس مختصات قطبی تعمیم یافته و با معرفی ثابت‌های لیاپانف است. این ثابت‌های لیاپانف برای تولید سیکل های حدی در برخی مثال‌های خاص استفاده شده است.

- در سال ۲۰۰۳ گاسول و ترگروساحل مسائل مرکز-کانون و سیکل‌پذیری از یک کانون ضعیف برای یک خانواده از سیستم‌های ناهموار را مورد بررسی قرار داده اند.

- در سال ۲۰۱۰ لی و هان یک سیستم چندجمله‌ای قطعه‌ای هموار را به شکل زیر در نظر گرفتند

$$(\dot{x},\dot{y})=\begin{cases}(b^{+}y+p_n^{+}(x,y,\delta), \quad -b^{+}x+q_n^{+}(x,y,\delta)); & x\geq ۰,\\ (b^{-}y+p_n^{-}(x,y,\delta), \quad -b^{-}x+q_n^{-}(x,y,\delta)); & x< ۰,\end{cases}$$

که در آن $b^{\pm}>۰$ و $q_n^{\pm}$، $p_n^{\pm}$ چندجمله‌ای‌های دلخواه از درجه n هستند. ثابت شده است که ماکزیمم تعداد سیکل‌های حدی این سیستم n است.

- در سال ۲۰۱۰ باتلی رفتار آشوبی اختلال زمان پیوسته یک سیستم ناهموار که قسمت مختل نشده آن یک حلقه هموکلینیک لغزنده در مبدا دارد را بررسی کرده است. او نشان داده است که برای این سیستم تابع ملنیکف یک صفر ساده در تعدادی نقاط دارد و لذا جوابهایی از سیستم وجود دارد که دارای رفتار آشوبی هستند.

- در سال ۲۰۱۰ چن و دیو سیستم درجه دوم ناهمواری را مطالعه می‌کنند که در آن ۵ سیکل حدی از یک کانون مرتبه ۵ منشعب می‌شود و هم‌چنین یک خانواده از سیستم‌های درجه دوم ناهموار با یک کانون مرتبه ۹ می‌سازند و نشان می‌دهند سیکل‌پذیری برای این سیستم‌ها حداقل ۹ است.

- در سال ۱۹۹۷ هان نشان داده است که برای سیستم‌های همیلتونی سیکل‌پذیری یک حلقه هموکلینیک ۱ یا ۲ است و نیز ثابت کرده است که سیکل پذیری حلقه های هموکلینیک در سیستم های نزدیک همیلتونی درجه دوم به جز برای یک مورد، معادل ۲ است.

- در سال ۲۰۰۰، هان یک سیستم همیلتونی را به شکل زیر در نظر گرفته است.

$$\dot{x} = f(x,y) + \varepsilon f_0(x,y,\varepsilon,\delta),$$
$$\dot{y} = g(x,y) + \varepsilon g_0(x,y,\varepsilon,\delta).$$

که در آن توابع f، g، f_0 و g_0 همگی حداقل از کلاس C^3، $\varepsilon > 0$، $\delta \in D \subset \mathbb{R}^n$ و D کراندار است و L یک حلقه هموکلینیک برای این سیستم است. هان نشان می‌دهد تحت اختلال، ۲سیکل حدی بزرگ از این حلقه منشعب می‌شود و هم‌چنین تحت شرایطی بررسی می‌کند که تحت این اختلال، حداکثر ۵ یا ۹ سیکل حدی نزدیک حلقه به وجود می‌آید.

- در سال ۲۰۰۷ هان و چن ثابت کردند که برای همه سیستم‌های همیلتونی چندجمله‌ای با اختلال چندجمله‌ای از درجه n، حداکثر $n + \frac{n+1}{2}$ سیکل حدی نزدیک مرکز وجود دارد و نتایج اصلی روی سیستم‌های لینارد به دست آوردند. برخی از مهمترین نتایج به دست آمده به شرح زیر است:

در [۵] گاسول و تروگرسا یک رده از سیستم‌های ناپیوسته از معادلات دیفرانسیل به شکل زیر را مطالعه کرده‌اند.

$$(\dot{x},\dot{y}) = \begin{cases} (-y + P^+(x,y), x + Q^+(x,y)) & y \geq 0, \\ (-y + P^-(x,y), x + Q^-(x,y)) & y \leq 0, \end{cases} \tag{۱.۱}$$

که در آن $P^\pm$ و $Q^\pm$ توابع تحلیلی هستند که با جملات حداقل درجه دوم شروع می‌شوند. در این سیستم مبدا یک نقطه مداری است. در این سیستم‌ها دو مسئله بررسی می‌شود. مسئله کانون–مرکز بدین مفهوم که بررسی کنیم مبدا در سیستم ۱.۱ مرکز یا یک جاذب یا یک دافع است و مسئله سیکل‌پذیری یعنی یک رده از سیستمهای ۱.۱ را بیان کنیم و سپس ماکزیمم تعداد سیکل‌های حدی که از مبدا تحت تغییرات پارامتر در این کلاس از سیستم‌ها منشعب می‌شود را تعیین کنیم. هدف اصلی گسترش روش‌های جدید برای محاسبه ثابت‌های لیاپانف در سیستم‌های نوع ۱.۱ است. این روش‌ها ابزاری برای حل این مسائل ارائه می‌دهند.

در [۶] چن و دیو تعداد سیکل‌های حدی با دامنه کوچک که در سیستم درجه دوم ناپیوسته زیر از مبدا منشعب می‌شوند را مطالعه می‌کنند.

$$(\dot{x},\dot{y}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \delta x - y + p_1x^2 + p_2xy + p_3y^2 \\ x + \delta y + p_4x^2 + p_5xy + p_6y^2 \end{pmatrix}, y \geq 0, \\ \begin{pmatrix} \delta x - y + q_1x^2 + q_2xy + q_3y^2 \\ x + \delta y + q_4x^2 + q_5xy + q_6y^2 \end{pmatrix}, y \leq 0, \end{cases} \tag{۲.۱}$$

مبدا برای این سیستم یک نقطه کانون-کانون است و مدارهای نزدیک مبدا نسبت به هر دو مولفه سیستم خط $y = \circ$ را قطع می‌کنند. سیستم ۲.۱ یک حالت خاص از رده سیستم‌های ناپیوسته به شکل زیر است.

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \begin{cases} (X^{+}(x,y), Y^{+}(x,y)), & y \geq \circ, \\ (X^{-}(x,y), Y^{-}(x,y)) & y \leq \circ, \end{cases} \tag{۳.۱}$$

که در آن $X^{\pm}$و $Y^{\pm}$ توابع حقیقی تحلیلی هستند. موضوع اصلی در رابطه با ۳.۱ حل مسائل کانون-مرکز و سیکل‌پذیری است. در سال‌های اخیر این مساله برای برخی حالت‌های خاص ۳.۱ توسط چندین ریاضیدان مطالعه شده است. آنها ثابت‌های لیاپانف را برای سیستم ۳.۱ محاسبه و تکنیک‌هایی برای تولید سیکل‌های حدی در برخی مثال‌های خاص به کار برده اند. موضوع مهم دیگر حل مسائل کانون-مرکز و سیکل‌پذیری به مفهوم تعیین ماکزیمم مرتبه یک کانون از سیستم ۳.۱ است. در سال ۱۹۵۰ این دو مساله برای سیستم‌های درجه دوم هموار به طور کامل مطالعه شده است. ثابت شده که در سیستم‌های درجه دوم هموار ماکزیمم مرتبه یک کانون و نیز سیکل پذیری هر دو سه است. اگرچه این مساله برای سیستم‌های درجه دوم ناهموار هنوز باز است و تنها برخی نتایج جزیی به دست آمده است. مثال‌هایی از سیستم ۲.۱ با چهار سیکل حدی منشعب از یک کانون مرتبه چهار و پنج سیکل حدی منشعب از یک کانون مرتبه پنج در این زمینه وجود دارد. چن و دیو مثال‌هایی از سیستم‌های درجه دوم ناپیوسته ۲.۱ ارائه می‌دهند و نشان می‌دهند سیکل‌پذیری سیستم ۲.۱ حداقل نه است. برای سیستم‌های ناپیوسته به دلیل اینکه شامل پارامترهای بیشتری است، حل مسایل سیکل‌پذیری و کانون-مرکز بسیار مشکلتر از سیستم‌های تحلیلی است. به علاوه برای سیستم‌های تحلیلی همه ثابت‌های لیاپانف مرتبه هفت برای نقطه تعادل از نوع کانون می‌تواند در نظر گرفته نشود. اما این مطلب در حالت کلی برای سیستم‌های ناهموار برقرار نیست. در ادامه مفاهیم ثابت‌های لیاپانف برای سیستم ناپیوسته ۳.۱ را تعریف می‌کنند و مثالی خاص از ۲.۱ با نه سیکل حدی منشعب از مبدا را ارائه می‌دهند.

یکی از جالب‌ترین پدیده هایی که در دینامیک‌های غیرخطی به وقوع می‌پیوندد، ایجاد آشوب ناشی از حساسیت نسبت به شرایط اولیه است. معمولا وجود چنین رفتار آشوبی به وجود نقطه هموکلینیک متقاطع از نگاشت تناوبی از دینامیک‌های غیرخطی متناظر با نعل اسب پایا بستگی دارد. وقتی یک اختلال کوچک و تناوبی از یک معادله خودگردان با یک حلقه هموکلینیک را در نظر بگیریم، وجود چنین نقاط هموکلینیک متقاطعی می‌تواند توسط مفهوم یک روش انشعاب به عنوان روش ملنیکف تعریف شود. ثابت شده است که این روش در مطالعه این نوع مسائل بسیار پرکاربرد است. لذا انشعاب مدارهای هموکلینیک در معادلات مختل شده هموار گسترش یافته است. اخیرا تلاش شده است که تئوری آشوب به معادلات دیفرانسیل ناپیوسته گسترش داده شود. آشوب در معادلات دیفرانسیل ناپیوسته، معادلات دیفرانسیل ناپیوسته سه بعدی تکه‌ای خطی و سیستم‌های ناپیوسته به طور ضعیف مطالعه شده است. در [۹] باتلی معادله دیفرانسیل ناپیوسته زیر را مطالعه می‌کند. در سال ۲۰۰۸ تحلیل تابع ملنیکف در سیستم‌های هیبرید توسط کالینز انجام شده است. باتلی رفتار آشوبی جواب‌های معادلات دیفرانسیل ناپیوسته مختل شده را در یک فضای متناهی البعد زمانیکه مدارهای

هموکلینیک سیستم مختل نشده آن به طور مورب از منیفلد ناپیوسته عبور می‌کنند بررسی کرد. پس از آن به بررسی انشعاب هموکلینیک چنین سیستم‌هایی پرداخت. اکنون موضوع مورد بحث آن است که در صورت وجود مدار هموکلینیک لغزنده در این سیستم‌ها آیا چنین رفتار مشابهی به وقوع می‌پیوندد.

$$\begin{aligned}
&\dot{y} = z,\\
&\dot{z} = y - \frac{1}{2}y^{3} + yz,\ z < e^{\frac{-4\sqrt{3}\pi}{9}}\\
&\dot{y} = z,\\
&\dot{z} = y - \frac{1}{2}y^{3} + (y-q)z,\ z > e^{\frac{-4\sqrt{3}\pi}{9}},
\end{aligned}$$

این سیستم برای $q \geq 36.1$ یک مدار هموکلینیک لغزنده در نقطه زینی $(0,0)$ دارد. باتلی تحلیل موضعی دینامیک‌های نزدیک به جواب‌های هموکلینیک معادلات دیفرانسیل ناپیوسته مختل نشده را انجام می‌دهد. ثابت می‌کند که مدار هموکلینیک لغزنده معادله مختل نشده، توسط یک خانواده $\{z_m(t)\}$ از جواب‌های قطعه‌ای C^1-هموار معادله مختل شده با جهش‌های کوچک در رویه ناپیوستگی تقریب زده می‌شود.
در [۱۵] هانگ و یانگ سیستم لینارد زیر را در نظر گرفته‌اند.

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -g(x) - \varepsilon f(x) y, \tag{4.1}$$

در آن ε پارامتر کوچک، $f(x)$ و $g(x)$ به ترتیب چندجمله ای از درجه n و m هستند. برای ε به قدر کافی کوچک فرض کنیم نماد $H(n,m)$ ماکزیمم تعداد سیکل‌های حدی این سیستم را نشان دهد. کران پایین $H(n,m)$ در بسیاری از مقالات مطالعه شده است. گاوریلف ثابت کرده است که $H(n,m) \geq n + [\frac{(n+1)}{m+1}]$. بلوز نشان داده که $H(n,1) \geq [\frac{n}{2}]$. برای $n \geq 2$، هان نشان داده است که $H(n,2) \geq [\frac{2n+1}{3}]$است. کریستوفر برای $2 \leq n \leq 50$، نشان داده که $H(n,3) \geq 2[\frac{3n+6}{8}]$. اخیرا یانگ برای $n = 3,4,5,6,7,8$، نشان داد که $H(n,3) \geq [\frac{3n+14}{4}]$. با فرض $g(x) = x^{2}(x-1)$ سیستم ۴.۱ به ازای $\varepsilon = 0$ یک حلقه گوشه دار اطراف مرکز دارد. لی و ژانگ بسط تابع ملنیکف را نزدیک حلقه گوشه دار ارائه داده اند. هان ثابت کرده است که سیستم ۴.۱ برای $n = 3,4,5$ به ترتیب $4,5,6$ سیکل حدی منشعب میشود. اخیرا هان ثابت کرده است که برای $6 \leq n \leq 22$، $H(n,3) \geq n + 2 - [\frac{n+1}{4}]$. با در نظر گرفتن $g(x) = x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)$، $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$، کریستوفر نشان داده که $H(9,4) \geq 9$. اخیرا هان سیکل های حدی سیستم ۴.۱ تحت $g(x) = x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)$ را مطالعه کرده که در آن سیستم ۴.۱ به ازای $\varepsilon = 0$ دو مرکز، دو زین هذلولی و یک حلقه هموکلینیک اطراف یک حلقه هموکلینیک مضاعف دارد و برای $n = 2,3,5,6,7,8$، نشان داد که $H(n,4) \geq n + 3$ و $H(4,4) \geq 6$. هان در [۱۵] فرض کرده است که سیستم ۴.۱ به ازای $\varepsilon = 0$ حداقل یک خانواده از مدارهای تناوبی و نیز یک نقطه تکین پوچ توان دارد اگر و فقط اگر شرایط زیر برقرار باشد:

(a) $\alpha = \beta = ۰$. سیستم ۴.۱ به ازای $\varepsilon = ۰$ یک مرکز، یک زین پوچ توان و یک حلقه زینی پوچ توان دارد.

(b) $\alpha = ۰$، $۰ < \beta < ۱$. این سیستم یک مرکز، یک زین، یک گوشه زینی و یک حلقه هموکلینیک دارد.

(c) $۰ < \alpha = \beta < ۱$. سیستم یک مرکز، یک زین، یک گوشه پوچ توان، یک حلقه هموکلینیک و یک حلقه گوشه دار پوچ توان دارد.

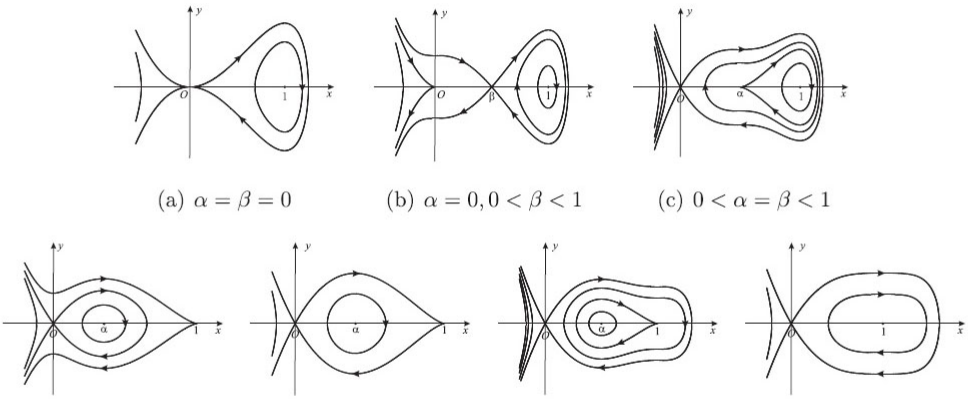
(d) $\beta = ۰$، $۰ < \alpha < \frac{۲}{۵}$. سیستم یک مرکز، یک زین، یک گوشه پوچ توان و یک حلقه هموکلینیک دارد.

(e) $\alpha = \frac{۲}{۵}$، $\beta = ۱$. سیستم یک مرکز، یک زین، یک گوشه پوچ توان، یک حلقه هموکلینیک و یک چند سیکل متصل به یک گوشه پوچ توان با یک زین دارد.

(f) $\beta = ۱$، $\frac{۲}{۵} < \alpha < ۱$. سیستم یک مرکز، یک زین، یک گوشه پوچ توان، یک حلقه هموکلینیک و یک حلقه گوشه دار پوچ توان دارد.

(g) $\alpha = \beta = ۱$. سیستم یک زین، یک مرکز پوچ توان و یک حلقه هموکلینیک دارد.

▲



(a) $\alpha=\beta=0$ (b) $\alpha=0, 0<\beta<1$ (c) $0<\alpha=\beta<1$

(d) $0<\alpha<\frac{2}{5}, \beta=1$ (e) $\alpha=\frac{2}{5}, \beta=1$ (f) $\frac{2}{5}<\alpha<1, \beta=1$ (g) $\alpha=\beta=1$

شکل ۱.۱: نمای فاز سیستم ۴.۱ به ازای $\varepsilon = ۰$.

هان در [۱۵] تنها حالت (c) و (f) را در نظر گرفته است و برای $m = ۴$ نتایج زیر را به دست می‌آورد. اگر ماکزیمم تعداد سیکل‌های حدی سیستم ۴.۱ را تحت شرایط ۳ و ۶ به ترتیب $H_c^*(n)$ و $H_d^*(n)$ نشان دهیم، داریم

$$H_c^*(n) \geq n + ۲ - [\frac{n+۱}{۵}], ۲ \leq n \leq ۱۸,$$

$$H_d^*(n) \geq \begin{cases} ۴, & n = ۲, \\ n + ۴ - [\frac{n+۱}{۵}] & ۳ \leq n \leq ۱۸. \end{cases}$$

و نیز برای سیستم ۴.۱ برای $۹ \leq n \leq ۱۸$ خواهیم داشت $H(n, ۴) \geq n + ۴ - [\frac{n+۱}{۵}]$.

در این پایان نامه سیستم همیلتونی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} \dot{x} = H_y + \varepsilon\, p(x, y, \delta), \\ \dot{y} = -H_x + \varepsilon\, q(x, y, \delta), \end{cases} \tag{۵.۱}$$

که در آن q، p و H همگی تحلیلی هستند و $\varepsilon \geq ۰$ یک پارامتر حقیقی کوچک است. فرض کنید درصورتی که $\varepsilon = ۰$ باشد، این سیستم یک خانواده از مدارهای تناوبی L_h اطراف مبدا دارد که L_h به عنوان $H(x, y) = h, h > ۰$ تعریف میشود. تابع $M(h) = \oint_{L_h} qdx - pdy$ تابع ملنیکف مرتبه اول این سیستم نامیده می شود. این تابع اهمیت زیادی در مطالعه انشعابات سیکل‌های حدی دارد. برای نمونه اگر این تابع یک صفر تنها در $h_۰$ با چندگانگی فرد داشته باشد، آنگاه سیستم ۵.۱ یک سیکل حدی نزدیک $L_{h_۰}$ دارد که این سیکل حدی به مفهوم یک مدار تناوبی تنها است. می‌دانیم یک سیکل حدی پایدار است اگر مجموعه حدی مدارهای نزدیک به آن باشد. کنید $N_{Hopf}(n)$ و $N_{Homoc}(n)$ به ترتیب ماکزیمم تعداد سیکل‌های حدی تولید شده توسط انشعاب هاپف و انشعاب هموکلینیک باشد. هم‌چنین $Z(n)$ ماکزیمم تعداد سیکل‌های حدی منشعب شده از مدارهای تناوبی باشد. در این صورت قضایای زیر را خواهیم داشت

قضیه ۱.۰.۱

برای هر عدد طبیعی n داریم

$$\text{۱)}\ N_{Hopf}(n) \geq n + [\frac{n+۱}{۲}],$$
$$\text{۲)}\ N_{Homoc}(n) \geq n + [\frac{n+۱}{۲}].$$

قضیه ۲.۰.۱

برای $n = ۱, ۲, ۳, ۴$ داریم

$$Z(n) = n + [\frac{n+۱}{۲}].$$

قضیه ۳.۰.۱

برای $n \geq ۵$ داریم

$$n + [\frac{n+۱}{۲}] \leq Z(n) \leq ۲n + [\frac{n+۱}{۲}].$$

این پایان نامه در ۵ فصل ارائه شده است. همانطور که ملاحظه شد فصل اول به بیان تاریخچه اختصاص داشت.

در ادامه و در فصل دوم به بیان مفاهیم،تعاریف و قضایای پایه خواهیم پرداخت. اهداف و نتایج مقدماتی این پایان نامه در فصل سوم بیان شده که این نتایج نقش اساسی در فهم و اثبات قضایای اصلی این پایان نامه دارند. فصل چهارم به محاسبه تابع ملنیکف اختصاص یافته است. در فصل پنجم به اثبات قضایای اصلی این پایان نامه می‌پردازیم. در ضمن ساختار اصلی این پایان نامه مبتنی بر مرجع [۷] است.

فصل ۲

مفاهیم، تعاریف و قضایای پایه

در این فصل برخی از مفاهیم پایه و اساسی در نظریه معادلات دیفرانسیل عادی و جزیی را مرور می‌کنیم و به بیان برخی از نتایج و قضایای مورد نیاز در فصل‌های بعدی می‌پردازیم. دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{dx}{dt} := \dot{x} = f(x), \; x \in \mathbb{R}^n \tag{۱.۲}$$

را در نظر می گیریم که در آن $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ یک تابع برداری با متغیر مستقل t به نام زمان است و $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک تابع هموار از رده ی C^k، $k \geq ۱$، با دامنه تعریف U است که U یک زیر مجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^n$ است. بیشتر اوقات معادله (۱.۲) به همراه شرط اولیه $x(\circ) = x_\circ \in U$ داده می شود که در این حالت در جستجوی جواب $x(t, x_\circ)$ هستیم به طوری که $x(\circ, x_\circ) = x_\circ$، یعنی جوابی که در لحظه‌ی $t_\circ = \circ$ از نقطه‌ی$x_\circ \in \mathbb{R}^n$ می گذرد. در این حالت نگاشت $x(., x_\circ) : I_{x_\circ} \subseteq \mathbb{R}^۱ \to \mathbb{R}^n$ یک خم در $\mathbb{R}^n$ تعریف می کند که این خم مداری از معادله (۱.۲) گذرا از $x_\circ$ نامیده می‌شود. چون میدان برداری (۱.۲) مستقل از زمان است، بنابراین، جواب‌های گذرا در زمان‌های $t_\circ \neq \circ$ را می‌توان همواره به $t_\circ = \circ$ منتقل کرد. یعنی اگر $x(t)$ جوابی از معادله با شرط اولیه $x(t_\circ) = x_\circ$ باشد، آن‌گاه $y(t) = x(t + t_\circ)$ نیز جوابی از معادله با شرط اولیه $y(\circ) = x(t_\circ) = x_\circ$ است.

۱.۲ مفاهیم و تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۲

هرگاه میدان برداری f به طور صریح به زمان بستگی نداشته باشد، دستگاه (۱.۲) خودگردان نامیده می‌شود. ▲

تعریف ۲.۱.۲

تابع هموار $x = \phi(t, x_\circ)$ با شرط $\phi(\circ, x_\circ) = x_\circ$ که به ازای هر t در بازه ی $I_{x_\circ} = (\alpha_{x_\circ}, \beta_{x_\circ}) \subseteq \mathbb{R}$ تعریف شده و در معادله (۱.۲) صدق کند را جواب معادله (۱.۲) گذرا از$x_\circ \in U$ در زمان $t = \circ$ گوییم.