بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه ملایر
دانشکده علوم پایه - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی
(گرایش آنالیز عددی)

روش تجزیه لاپلاس برای حل معادلات انتگرال ولترا

استاد راهنما:

دکتر فرشید میرزائی

استاد مشاور:

دکتر محسن اسماعیل بیگی

نگارش:

سونیا قهرمانی

دی ماه ۹۲

به نام خدا

روش تجزیه لاپلاس برای حل معادلات انتگرال ولترا

نگارش

سونیا قهرمانی

پایان نامه
ارائه شده به تحصیلات تکمیلی به عنوان بخشی
از فعالیت های لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد
در رشته
ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)
از دانشگاه ملایر

ارزیابی و تایید شده توسط کمیته پایان نامه با درجه ....

دکتر فرشید میرزائی، استادیار ریاضیات کاربردی (استاد راهنما) ....

دکتر محسن اسماعیل بیگی، استادیار ریاضیات کاربردی (استاد مشاور) ....

دکتر محمود پری پور، استادیار ریاضیات کاربردی (استاد داور) ....

دکتر خسرو سایه وند، استادیار ریاضیات کاربردی (استاد داور) ....

دکتر علی ایمانزاده، استادیار فلسفه (نماینده تحصیلات تکمیلی) ....

دی ماه ۱۳۹۲

ماحصل آموخته هایم را تقدیم می کنم

به آنان که مهر آسمانی شان آرام بخش آلام زمینی ام است

به استوارترین تکیه گاهم ، دستان پر مهر پدرم

به سبزترین نگاه زندگیم ، چشمان پر مهر مادرم

که هرچه آموختم در مکتب عشق شما آموختم

و هرچه بکوشم قطره ای از دریای بی کران مهربانیتان را

سپاس نتوانم بگویم.

تقدیر و تشکر...

همه ی پیشرفت های معنوی و مادی بشر ریشه در تربیت افراد دارد که از منبع زلال ایمان، معرفت و ایثار معلم سیراب می شود.

استاد گرامی جناب آقای دکتر فرشید میرزائی:

دلسوزی، تلاش و کوشش حضرتعالی در تعلیم و تربیت و انتقال معلومات و تجربیات ارزشمند در کنار برقراری رابطه صمیمی و دوستانه با دانشجویان و ایجاد فضائی دلنشین برای کسب علم و دانش و درک شرایط دانشجویان حقیقتاً قابل ستایش است. بی شک راهنمایی های شما راه گشای اتمام و اکمال پایان نامه بوده است. اینجانب بر خود وظیفه میدانم در کسوت شاگردی از زحمات و خدمات ارزشمند شما استاد گرانقدر تقدیر و تشکر نمایم و از خداوند متعال برایتان سلامتی، موفقیت و همواره یاد دادن رامسئلت دارم.

و همچنین از استاد مشاور صبور جناب آقای دکتر محسن اسماعیل بیگی بخاطر راهنمایی های گرانبهایشان سپاس گزارم.

در پایان از اساتید محترم آقایان دکتر خسرو سایه وند و دکتر محمود پری پور که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

نام خانوادگی دانشجو: قهرمانی	نام: سونیا
عنوان پایان نامه: روش تجزیه لاپلاس برای حل معادلات انتگرال ولترا	
استاد راهنما: دکتر فرشید میرزائی	
استاد مشاور: دکتر محسن اسماعیل بیگی	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه ملایر - گروه ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: دی ماه ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۱۱۵	
معادلات انتگرال ولترا ، روش تجزیه لاپلاس ، روش تجزیه آدومیان، روش تجزیه لاپلاس اصلاح شده	

چکیده

در این پایان نامه، معادلات انتگرال ولترا خطی و غیرخطی و همچنین دستگاه معادلات انتگرال ولترا خطی و غیرخطی را با استفاده از تبدیل لاپلاس و ترکیب تبدیل لاپلاس و تجزیه آدومیان حل کرده ایم. بدین منظور، معادلات انتگرال و انواع آن و همچنین دستگاه معادلات انتگرال را تعریف می کنیم. تبدیلات لاپلاس، ویژگی ها و قضیه های آن را معرفی می کنیم. تجزیه آدومیان را تعریف می کنیم و ویژگیهای آن را برای معادلات انتگرال ولترا نشان خواهیم داد. به جزئیات روش حل عددی معادلات انتگرال ولترا خطی و غیرخطی و دستگاه معادلات انتگرال ولترا خطی و غیرخطی با حل عددی چند مثال پرداخته شده است.

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

تاریخچه

نظریه معادلات انتگرال یکی از مهمترین شاخه های آنالیز ریاضی است. اصولا اهمیت آن از لحاظ مسائل مقدار مرزی در تئوری معادلات با مشتقات جزئی است. معادلات انتگرال در خیلی از مسائل فیزیک و علوم فنی مهندسی ظاهر می شوند. در تحقیقات قرن اخیر در نظریه کشسانی این نوع معادلات نقش مهمی را بازی کرده اند. معادلات انتگرال سالهای زیادی است که در ریاضی ظاهر شده است. در حقیقت توسعه نظریه معادلات انتگرال تنها در اواخر قرن ۱۹ شروع شد. در حدود سالهای (۱۹۰۳-۱۹۰۰) یک ریاضیدان ایتالیایی به نام ولترا [۱] روی آن کار کرد و همچنین یک ریاضی دان سوئدی به نام فردهلم[۲] درهمان سالها کارهای مشهور و جالب خود را روی یک روش جدید جهت حل مساله دیراکله[۳] منتشرکرد. از آن زمان به بعد تا عصر حاضر معادلات انتگرال موضوع تحقیقات ریاضیدانان زیادی بوده است. معادلات انتگرال منفرد [۱,۳] در اوائل قرن ۱۹ در ارتباط با دو مساله کاملا متفاوت توسط دو نفر معرفی شد. یکی از آنها هیلبرت[۴] بود که ضمن کار روی بعضی مسائل مقدار مرزی نظریه توابع تحلیلی، با آنها برخورد کرد. نظریه معادلات انتگرال منفرد در دهه سوم و چهارم قرن ۱۹ توسط یک ریاضیدان فرانسوی به نام ژیراد[۵] و دو ریاضیدان روس به نامهای وکوا[۶]و موسخلیش ویلی[۷] توسعه پیدا کرد. معادلات انتگرال ولترا غیرخطی برای اولین بار توسط ولترا و فردهلم در تحقیق فیزیک - ریاضی شان اختراع شد. بعدها هم تعدادی طرح و روش تحلیلی و عددی مانند روش ضرایب متناهی، روش تفاضلات متناهی، و روش های اختلالی به وجود آمد که برای به دست آوردن یک جواب تقریبی برای معادلات انتگرال غیرخطی به کار برده شد که در این میان با مشکلاتی مانند پایداری، انتخاب کوچک و بزرگ پارامتر و غیره مواجه شد. برای غلبه بر این مشکلات برای اولین بار در سال ۱۹۰۶ روش تبدیل لاپلاس برای حل معادلات انتگرال ولترا توسط بتمن[۸] مطرح شد که یک روش خیلی توانمند برای حل معادلات انتگرال ولترا خطی و غیرخطی به شمار رفت. در سالهای اخیر هم خان[۹] روش های

[۱] V. Volterra

[۲] I. Fredholm

[۳] P. G. L. Dirichlet

[۴] D. Hlbert

[۵] G. Giraud

[۶] I. Vekual

[۷] N. Muskhelishvili

[۸] H. Bateman

[۹] M. Khan

جدیدی را برای حل معادلات انتگرال ولترا غیرخطی به کمک ترکیب روش تبدیل لاپلاس و روش تجزیه آدومیان [۹ – ۵] در مسائل فیزیکی به کار برده است. به دنبال آن باکودا [۱] با استفاده از روش ترکیبی تبدیل لاپلاس و تجزیه آدومیان، روشی را برای حل دستگاه معادلات انتگرال ولترا خطی و غیرخطی [۱۵] پیشنهاد داده است.

[۱] H. O. Bakodah

۱.۱ تعاریف و دسته بندی معادلات انتگرال

تعریف ۱.۱ هرگاه دریک معادله، تابع مجهول زیر علامت انتگرال قرار داشته باشد، آن را معادله انتگرال گوییم. البته تابع مجهول می تواند علاوه بر زیر علامت انتگرال خارج از علامت انتگرال هم باشد.

تعریف ۲.۱ درحالت کلی معادلات انتگرال به سه دسته زیر تقسیم می شوند
- معادلات انتگرال فردهلم
- معادلات انتگرال منفرد
- معادلات انتگرال ولترا

تعریف ۳.۱ یک معادله انتگرال را خطی گوییم هر گاه عملگرهای تعریف شده روی تابع مجهول خطی باشد. در غیر اینصورت آن را معادله انتگرال غیرخطی می نامیم. که فرم کلی آن ها به ترتیب به صورت زیراست.

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a k(x,t)u(t)dt \ , \tag{۱.۱}$$

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a F(x,t,u(t))dt \ , \tag{۲.۱}$$

که درمعادلات فوق $u(x)$ تابع مجهول و $k(x,t)$ ، $f(x)$ ، $F(x,t,u(t))$ و $h(x)$ توابع معلومند و λ هم عددی معلوم و مخالف صفر است که می تواند حقیقی یا مختلط باشد. تابع $k(x,t)$ را کرنل (هسته) معادله انتگرال می نامیم.

تعریف ۴.۱ معادلات انتگرال فردهلم: اگر در روابط (۱۰۱) و (۲۰۱) کران بالای انتگرال عدد حقیقی b باشد آن را معادله انتگرال فردهلم می نامیم.

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \ ; \quad a \leq \ x \leq b \ , \tag{۳.۱}$$

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b F(x,t,u(t))dt \ ; \quad a \leq x \leq b \ . \tag{۴.۱}$$

تعریف ۵.۱ معادلات انتگرال منفرد: اگر در روابط (۱۰۱) و (۲۰۱) یکی یا هر دو کران انتگرال نامتناهی باشد یا هسته معادله انتگرال در فاصله $[a,b]$ نامنفرد باشد آن را معادله انتگرال منفرد

می نامیم. مانند:

$$h(x)u(x)=f(x)+\lambda\int_a^{\infty}k(x,t)u(t)dt\ ;\ a\leq x<\infty\ , \tag{۵.۱}$$

$$h(x)u(x)=f(x)+\lambda\int_a^{\infty}F(x,t,u(t))dt\ ;\ a\leq x<\infty\ , \tag{۶.۱}$$

و یا

$$h(x)u(x)=f(x)+\lambda\int_a^{x}\frac{۲xt}{\sqrt{x-t}}\ u(t)dt\ ;\ a\leq x<\infty\ , \tag{۷.۱}$$

$$h(x)u(x)=f(x)+\lambda\int_a^{x}\frac{۱}{\mid x-۲t\mid}\ F(u(t))dt\ ;\ a\leq x\ <\infty\ . \tag{۸.۱}$$

تعریف ۶.۱ معادلات انتگرال ولترا: اگر در روابط (۱٫۰۱) و (۲٫۰۱) کران بالای انتگرال متغیر x باشد آن را معادله انتگرال ولترا می نامیم.

$$h(x)u(x)=f(x)+\lambda\int_a^{x}k(x,t)u(t)dt\ ;\ a\leq x\leq b\ , \tag{۹.۱}$$

$$h(x)u(x)=f(x)+\lambda\int_a^{x}F(x,t,u(t))dt\ ;\ a\leq x\leq b\ . \tag{۱۰.۱}$$

ملاحظه ۱.۱ معادله انتگرال ولترا را می توان به چهار دسته زیر تقسیم بندی نمود .

الف)معادله انتگرال ولترا نوع اول

اگر در روابط (۹٫۰۱)و (۱۰٫۰۱) قرار دهیم $h(x)=۰$ معادله انتگرال ولترا نوع اول حاصل می شود.

$$۰=f(x)+\lambda\int_a^{x}k(x,t)u(t)dt\ ;\ a\leq\ x\ \leq b\ , \tag{۱۱.۱}$$

$$۰=f(x)+\lambda\int_a^{x}F(x,t,u(t))dt\ ;\ a\leq\ x\leq\ b\ . \tag{۱۲.۱}$$

ب)معادله انتگرال ولترا نوع دوم

اگر در روابط (۹٫۰۱) و(۱۰٫۰۱) قرار دهیم $h(x)=۱$ معادله انتگرال ولترا نوع دوم حاصل می شود.

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^{x}k(x,t)u(t)dt\ ;\ a\leq\ x\ \leq\ b\ , \tag{۱۳.۱}$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x F(x,t,u(t))dt \; ; \; a \leq \; x \; \leq b \; . \qquad (۱۴.۱)$$

ج)معادله انتگرال ولترا نوع سوم

روابط (۹.۱) و (۱۰.۱) را در حالت کلی معادله انتگرال ولترا نوع سوم می نامیم.

د)معادله انتگرال ولترا همگن

اگر در روابط (۹.۱) و (۱۰.۱) قرار دهیم $h(x) = ۱ \; , \; f(x) = ۰$ معادله انتگرال ولترا همگن حاصل می شود.

$$u(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \; ; \; a \leq \; x \; \leq b \; , \qquad (۱۵.۱)$$

$$u(x) = \lambda \int_a^x F(x,t,u(t))dt \; ; \; a \leq \; x \; \leq b \; . \qquad (۱۶.۱)$$

ملاحظه ۲.۱ همان تقسیم بندی که در معادلات انتگرال ولترا گفته شد در مورد معادلات انتگرال فردهلم و منفرد نیز صادق است.

۲.۱ تعریف دستگاه معادلات انتگرال

تعریف ۷.۱ دستگاه معادلات انتگرال ولترا:دستگاهی به فرم زیر است که در آن کران بالای انتگرال متغیرx می باشد.

$$u_i(x) = f_i(x) + \sum_{m=۰}^{n} \int_a^x k_{i,m}(x,t) \; F_{i,m}(u_m(x))dt \; ; i = ۰, ۱, ۲, ..., n, \; a \leq x \leq b \; , \qquad (۱۷.۱)$$

اگر در دستگاه معادلات انتگرال تابع مجهول زیر علامت انتگرال خطی باشد، دستگاه معادلات انتگرال را خطی می نامیم در غیر این صورت آن را دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی می نامیم.

فصل ۲

تعاریف و قضیه های تبدیلات لاپلاس

مقدمه

ترادیس لاپلاس(تبدیل لاپلاس): یک تبدیل انتگرالی است که بسیار پرکاربرد است. ترادیس لاپلاس با نماد $L\{f(t)\}$ در واقع عملگری خطی از تابع $f(t)$ با آرگومان حقیقی t ($t \geq ۰$) به تابع $F(s)$ با آرگومان مختلط s است. این ترادیس به بزرگداشت پیرسیمون لاپلاس [۱]، ریاضی دان فرانسوی، لاپلاس نامگذاری شده است. ترادیس لاپلاس برای اولین بار تبدیل لاپلاس را در یکی از کارهایش بر روی نقطه نظریه احتمال به کار برد. ویژگی مهم این ترادیس آن است که بسیاری از رابطه ها و تغییراتی که بر روی تابع اصلی $f(t)$ برقرار هستند در ترادیس یافته آن یعنی $F(s)$ نیز با رابطه ای ساده و منطقی برقرارند. ترادیس لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال کاربرد دارد.

[۱] P. S. Laplace

۱.۲ ویژگی های تبدیل لاپلاس

تعریف ۱.۲ فرض کنید تابع f برای $t \in [0, \infty)$ تعریف شده باشد. تابع F را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \ , \tag{۱.۲}$$

حوزه تعریف F مجموعه sهایی است که به ازای آنها انتگرال فوق همگراست، یعنی sهایی که به ازای آنها حد زیر موجود است:

$$\lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt \ , \tag{۲.۲}$$

تابع $F(s)$ را تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ می نامیم و آن را با $L\{f(t)\}$ نشان می دهیم. پس:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \ . \tag{۳.۲}$$

تعریف ۲.۲ تابع f را بر بازه $t \in [0, \infty)$ از مرتبه نمایی نامیم، هر گاه ثابتهای T ، M و α وجود داشته باشند به طوری که:

$$\forall \ \ t \geq \ T \ \ ; \ \ | f(t) | \leq M e^{\alpha t} \ . \tag{۴.۲}$$

یعنی وقتی $t \longrightarrow \infty$، رشد $f(t)$ کندتر از مضربی از یک تابع نمایی است.

تعریف ۳.۲ تابع f را در بازه متناهی $t \in [a, b]$ قطعه ای پیوسته می گوییم هر گاه بتوان این بازه را به تعداد متناهی زیر بازه تقسیم نمود به طوری که f در نقاط درونی این زیر بازه پیوسته باشد و وقتی t به سمت نقاط انتهایی زیر بازه ها میل می کند، f دارای حد متناهی باشد.

قضیه ۱.۲ فرض کنید f بر بازه $t \in [0, \infty)$ قطعه ای پیوسته و از مرتبه نمایی باشد، آن گاه $L\{f(t)\}$ برای $s > \alpha$ موجود است [۱۸].

اثبات: می توان نوشت :

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt \ , \tag{۵.۲}$$

چون $e^{-st} f(t)$ قطعه ای پیوسته است، اولین انتگرال طرف راست موجود است. برای انتگرال دوم با توجه به رابطه (۴.۲) ، داریم:

$$\forall \ \ t \ \geq \ T \ \ ; |e^{-st} f(t)| \leq M e^{-st} e^{\alpha t} = M e^{(\alpha - s)t} \ , \tag{۶.۲}$$

اگر $s > \alpha$، آن گاه $\int_T^\infty M e^{(\alpha - s)t} dt$ همگراست و از رابطه (۶.۲) نتیجه می شود که انتگرال $\int_T^\infty e^{-st} f(t) dt$ نیز همگراست.

قضیه ۲.۲ فرض کنیم f بر بازه $t \in [\circ, \infty)$ قطعه ای پیوسته و از مرتبه نمایی باشد. اگر $L\{f(t)\} = F(s)$ ، آن گاه [۱۸] :

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = \infty \ . \qquad (۷.۲)$$

اثبات: اعداد حقیقی مثبت M_1, T و عددحقیقی α وجود دارند به طوری که :

$$\forall \ \ t \ \geq T \ \ ; \ \ |f(t)| \leq M_1 \ e^{\alpha t} \ , \qquad (۸.۲)$$

می توان نوشت :

$$F(s) = \int_\circ^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)dt \ , \qquad (۹.۲)$$

چون f در بازه نامتناهی $t \in [\circ, \infty)$ قطعه ای پیوسته است، عدد حقیقی مثبت M_2 وجود دارد به طوری که :

$$\circ \leq t \leq T \ \ ; \ \ |f(t)| \leq M_2 \ , \qquad (۱۰.۲)$$

بنابراین:

$$|F(s)| \leq M_2 \int_\circ^T e^{-st} dt + M_1 \int_T^\infty e^{-t(s-\alpha)} dt \ , \qquad (۱۱.۲)$$

یا

$$|F(s)| \leq M_2 \ \frac{1}{s} \ (1 - e^{sT}) + M_1 \ \frac{1}{s-\alpha} \ e^{-T(s-\alpha)} \quad ; \ s > \alpha \ , \qquad (۱۲.۲)$$

حال از نامساوی فوق داریم:

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = \circ \ . \qquad (۱۳.۲)$$

قضیه ۳.۲ فرض کنید $f_1(t), f_2(t)$ دو تابع باشند که تبدیل لاپلاس آنها موجود است. اگر c_1, c_2 دو عدد حقیقی و ثابت دلخواه باشند، آن گاه داریم[۱۸] :

$$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 L\{f_1(t)\} + c_2 L\{f_2(t)\} \ . \qquad (۱۴.۲)$$

اثبات: بنا به تعریف می توان نوشت :

$$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = \int_\circ^\infty e^{-st} [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] dt \ , \qquad (۱۵.۲)$$

چون هر یک از انتگرال های $\int_\circ^\infty e^{-st} f_1(t)dt$ و $\int_\circ^\infty e^{-st} f_2(t)dt$ موجود هستند پس:

$$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \int_\circ^\infty e^{-st} f_1(t)dt + c_2 \int_\circ^\infty e^{-st} f_2(t)dt = c_1 L\{f_1(t)\} + c_2 L\{f_2(t)\} \ . \qquad (۱۶.۲)$$