بسم الله الرحمن الرحیم

مقد مه‌ای برنظریـــه ابرمنیفلـــد

جمهوری اسلامی ایران

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده علوم ـ بخش ریاضی

پایان‌نامه

درجه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان : مقدمه‌ای بر نظریه ابرمنیفلد

استاد راهنما

دکتر یوسف بهرامپور

مولف : سید علیرضا عمرانی

خرداد ۱۳۶۹

فهرست

مقدمه :

سالهای اخیر شاهد توسعه سریع شاخههای جدیدی در ریاضی بوده اند . مقالاتی که منتشر می شود اغلب پیشوند اَبَرْ (Super) استفاده می‌کند . بعضی‌ازایده‌ها در" ابرریاضیات " بطور جداگانه درسالهای قبل مورد بررسی قرارگرفته‌اند . ولی امروزه‌ابر منیفلد یک نظریه آشنا وعمومی‌است . کاربرد آن درفیزیک (نظریه‌وحدت نیروهای شناخته شده) وبعضی‌نتایج آن درریاضیات درصدها مقاله ودهها کتاب بحث وبررسی شده‌است . مفهوم ابرمنیفلد شخص‌راقادرمی‌سازدکه‌ایده منیفلد معمولی رابه‌اشیاء ضد جابجائی (Anticommutative) تعمیم دهد ،اغلب کارهای اساسی دراین زمینه بوسیله برزین ، لیتس وکاستنت انجام گرفته بدین ترتیب که‌بافه‌ای از توابع C^{∞} روی منیفلد x به یک بافه(,) Λ ازابر جبر جابجائی تعمیم داده‌میشود .

ریاضیدانان درابتدا انگیزه لازم برای مطالعه در جزئیات ابرریاضیات راند اشتند ولی دربعدا" روشن شد که‌این نظریه کلیه قسمتهای ریاضی رادر برمی‌گیرد . مطلبی که باعث پیشرفت درمطالعه ابرریاضی شده کاربرد آن در فیزیک است . ظاهرا" یک نظریه واحد متشکل ازنیروهای قوی ـ نیروهای ضعیف ، الکترومانیتیک ـ جاذبه می‌تواند به‌زبان ابرمنیفلد بیان شود . تا جائی که می‌توان گفت :

" جهانی که درآن زندگی می‌کنیم یک ابرمنیفلد ازبعد (4,4) می‌باشد بطوریکه‌منیفلد کالبد آن‌فضا ـ زمان ۴ بعدی معمولی‌است . گروه تبدیلی این

ابرمنیفلد یک ابرگروه لی است ."

اولین ریاضیدانی‌که تشخیص داد در آستانه یک موضوع جدید قرار دارد ، بدون شک برزین است (۱۹۶۰) مدتی‌گذشت تااینکه مقالات درزمینه ابر ریاضی عرضه شدند این مقالات بخصوص شامل مطالبی‌درمورد ابرمنیفلد ، ابرگروه لی ، ساختمانی شبیه به‌گروه لی برای ابر گروه لی ، ابرجبر لی وساختن یک تئوری انتگرال برای ابرمنیفلد بودند . از لحاظ تاریخی گفته می شود که لفظ ابر (Super) بوسیله فیزیکدانان معرفی شده‌است . (یادآوری‌اینکه‌د ربعضی مقالات که همزمان منتشرمی شدند ویاد رمقاله‌های‌قبل از ۱۹۷۴ ابرجبر لی‌را جبرلی مدرج (Graded Lie Algebra) نیزمی‌نامیده‌اند) .

د راین مقاله نظریه ابرمنیفلد بطورساده بررسی‌می شود ود رارائه‌آن سعی شده‌است د رطرح موضوعات مسائل اساسی واصولی بیان گردد تا شاید زمینه لازم جهت ادامه ومطالعه د راین شاخه ازریاضی فراهم گردد . همچنین کوشش شده‌کهاز واژه‌های خارجی استفاده نشده‌وبجای آن ازمعادل فارسی آنها که‌د رسالهای اخیر متداول‌گردیده‌استفاده گردد وواژه‌هائی‌که‌معادل فارسی برای‌آنها یافت نشده عین واژه خارجی د رمتن آمده است .

فصل اول

ابرفضای خطی (Linear Superspace)

تعریف ۱ـ۱ فرض کنید $z_2 = \{\bar{o}, \bar{1}\}$ ، فضای برداری M را ابرفضا (Superspace) نامیم اگر M را بتوان به صورت مجموع مستقیم زیرفضاهایش نوشت یعنی :

$$M = M_{\bar{o}} \oplus M_{\bar{1}}$$

اگر $v \in M$ در این صورت v را یک عنصر زوج M گوئیم اگر $v \in M_{\bar{o}}$ و v را یک عنصر فرد M گوئیم اگر $v \in M_{\bar{1}}$. زیرفضاهای $M_{\bar{o}}$ و $M_{\bar{1}}$ را مولفه‌های همگن (Homogenous Component) فضای M می‌نامیم . بنابراین یک عنصر $v \in M$ را همگن گوئیم اگر v یا زوج یا فرد باشد .

اگر $v \in M_i$, $i \in z_2$ در این صورت i را درجه (یا زوجیت Parity) v گوئیم و چنین می‌نویسیم : $p(v) = i$ یا $|v| = i$

(در این مقاله از علامت اول استفاده می‌کنیم .)

فرض کنید $N \subset M$ یک زیرفضای M باشد ، در این صورت N را یک ابرزیرفضا (Subsuperalgebra) گوئیم هرگاه :

$$N = (N \cap M_{\bar{o}}) \oplus (N \cap M_{\bar{1}})$$

مثال ۱: فرض کنید $M = R^2 = (R \times \{o\}) \oplus (\{o\} \times R)$ و $N = \{(x,x) | \ x \in R\}$ در این صورت N یک ابرزیرفضای R^2 نمی‌باشد .

اگر M و N ابرفضا باشند می‌توان $M \oplus N$ و $M \otimes N$ و $Hom(M,N)$ را نیز به ابرفضا تبدیل نمود به طریق زیر :

$$(M \oplus N)_i = M_i \oplus N_i$$

$$(M \otimes N)_i = \sum_{m+n=i} M_m \otimes N_n$$

$$\mathrm{Hom}\,(M,N)_i = \left\{ f \in \mathrm{Hom}(M,N) \mid f(M_m) \subset N_{m+i} \right\}$$

بعبارت دیگر f رازوج گوئیم اگر : $\begin{cases} f(M_o) \subset N_o \\ f(M_1) \subset N_1 \end{cases}$ یعنی $p(f)=o$

و f رافرد گوئیم اگر : $\begin{cases} f(M_o) \subset N_1 \\ f(M_1) \subset N_o \end{cases}$ یعنی $p(f)=1$

تعریف ۲ــ۱ یک ابرفضامانند A راابرجبرگوئیم اگر A یک جبرشرکت پذیر باواحد باشد وهمچنین‌تابع ضرب $A \times A \longrightarrow A$ یک تبدیلد وخطی زوج‌باشد .

تعریف معادل‌تعریف فوق چنین‌است : جبر A رایکابرجبرگوئیم اگر A یــــک ابرفضاباشد که‌در شرایط زیرصدق کند :

الف) $p(ab)=p(a)+p(b)$ برای $a,b \in A$ $\quad A_iA_j \subset A_{(i+j)\bmod 2}$

ب) $1 \in A_o$

مثال : $A = \left\{ f : V \xrightarrow{\mathrm{End}} V \mid V = V_o \oplus V_1 \right\}$ یک ابرجبراست زیرا

$$A_o = \left\{ f : V \xrightarrow{\mathrm{End}} V \mid f(V_o) \subset V_o \ , \ f(V_1) \subset V_1 \right\}$$

$$A_1 = \left\{ f : V \xrightarrow{\mathrm{End}} V \mid f(V_o) \subset V_1 \ , \ f(V_1) \subset V_o \right\}$$

بنابراین $A = A_o \oplus A_1$ به‌آسانی‌نشان‌داده‌می‌شود که

$p(fog)=p(f) + p(g)$ ابرجبر A راجابجائی‌گوئیم اگر :

$$ab = (-1)^{p(a)p(b)}ba$$

برای a و b همگن‌در A .

تعریف ۳ـ۱ جبرخارجی (Exterior Algebra)

فرض کنید V یک فضای برداری با پایه $\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ باشد .
یک جبر گراسمن یا خارجی روی V که با علامات ΛV یا $\Lambda(n)$ نشان داده می شود یک ابرجبر جابجائی است با پایه :

$$\{1, \xi_1,\dots,\xi_n, \xi_i \wedge \xi_j, \dots, \xi_i \wedge \xi_j \wedge \xi_k, \dots, \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k}, \dots\}$$
$$i<j \quad , \quad i<j<k \quad , \quad \dots i_1 < i_2 < \dots < i_k$$

ضرب در $\Lambda(n)$ بوسیله بدنبال هم نویسی (Juxtaposition) عناصر آن می باشد و $\xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i$ که نتیجه آن چنین است : $\xi_i^2 = 0$.

$$\Lambda V = \bigoplus_K (\Lambda V)_k \qquad \text{و} \qquad (\Lambda V)_k = \langle \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k} \rangle_{i_1 < \dots < i_k}$$

بنابراین :

$$\Lambda V = \Big\{ \bigoplus_{\substack{k \\ \text{زوج}}} (\Lambda V)_k \Big\} \oplus \Big\{ \bigoplus_{\substack{L \\ \text{فرد}}} (\Lambda V)_L \Big\}$$

هر $f \in \Lambda(n)$ را میتوان بصورت یگانه ای زیر نوشت یعنی :

$$f = \sum f_v \, \xi^v \qquad\qquad f_v \in V$$

که v تمام مقادیر ممکن به فرم $v = (v_1, \dots v_n)$ را بخود می گیرد و هر v_i یا صفر است و یا یک و $\xi^v = \xi_1^{v_1} \dots \xi_n^{v_n}$.

مدول ها روی ابرجبرها

تعریف ۴ـ۱ فرض کنید A یک ابرجبر شرکت پذیر با عضو واحد باشد .

یک مدول چپ روی A ، یک ابرفضا مانند M است همراه با یک عمل چپ از A بروی M ، یعنی یک تابع مانند $A \times M \to M$ وجود دارد که در

شرایط زیر صدق می‌کند :

الف) $a(bm) = (ab)m \qquad a,b \in A,\ m \in M$

ب) $(a+b)m = am + bm \quad , \quad a(m+m') = am + am'$

ج) $1.m = m$

د) اگر $p(a)$ و $p(m)$ تعریف شده باشند در این صورت $p(am) = p(a)+p(m)$

(مدول راست به طریق مشابه قابل تعریف است .)

اگر A یک ابرجبر جابجائی باشد ، در این صورت از هر A- مدول چپ میتوان یک A- مدول راست ساخت ، به طریق زیر :

$$ma = (-1)^{p(m)p(a)} am \qquad a \in A\ ,\ m \in M$$

ساختار مدولهای چپ و راست روی A سازگارند :

$$a(mb) = (am)b \qquad a,b \in A\ ,\ m \in M$$

یعنی هر مدول روی یک ابرجبر جابجائی دو طرفه خواهد بود .

تعریف ۵ــ۱ فرض کنید M و N ، A- مدول باشند همریختی (Homomorphism) از M به N یک عملگر خطی (Linear Operator) $F : M \longrightarrow N$ است بطوریکه :

$$F(ma) = (F(m))a \qquad a \in A\ ,\ m \in M$$

و $\operatorname{Hom}_A(M,N) = \{ F : M \longrightarrow N \mid F \text{ یک } A\text{- همریخت است} \}$

روی $\operatorname{Hom}_A(M,N)$ ساختار A- مدول قرار میدهیم به این صورت که :

$$(aF)(m) = a(F(m)) \qquad , \qquad (Fa)(m) = F(am),\ a \in A\ ,\ m \in M$$

باتوجه‌به‌تعریف فوق وفرمول (*) نتیجه‌می شود که : $aF = (-1)^{p(a)p(F)}Fa$

مثال۲: $End_A(M) = Hom_A(M,M)$ یک A- جبر شرکت پذیرباواحد میباشد

زیرا :

$$[End_A(M)]_{\bar{o}} = \{ f : M \xrightarrow{Hom} M \mid f(M_{\bar{o}}) \subset M_{\bar{o}} , f(M_{\bar{1}}) \subset M_{\bar{1}} \}$$

$$[End_A(M)]_{\bar{1}} = \{ f : M \xrightarrow{Hom} M \mid f(M_{\bar{o}}) \subset M_{\bar{1}} , f(M_{\bar{1}}) \subset M_{\bar{o}} \}$$

بنابراین : $End_A(M) = [End(M)]_{\bar{o}} \oplus [End(M)]_{\bar{1}}$

نشان‌میدهیم $p(fog) = p(f) + p(g)$

فرض کنید $p(f) = p(g) = o$ دراین‌صورت : $p(f) + p(g) = o$

اما $g(M_o) \subset M_o , \quad fg(M_o) = f(g(M_o)) \subset M_o$

$g(M_1) \subset M_1 , \quad fg(M_1) = f(g(M_1)) \subset M_1$

بنابراین $p(fog) = o$ درنتیجه : $p(fog) = p(f) + p(g)$

اگر $p(f) = o$ و $p(g) = 1$ دراین‌صورت :

$$\left.\begin{array}{l} fog(M_o) = f(g(M_o)) \subset M_1 \\ fog(M_1) = f(g(M_1)) \subset M_o \end{array}\right\} \Rightarrow p(fog)=1 \Rightarrow P(fog)=p(f)+ p(g)$$

اگر $p(f)=p(g)=1$ بااستدلالی‌مشابه‌دوقسمت قبل‌نتیجه‌می شود

$p(fog)=o$ درنتیجه‌دراین‌حالت نیزداریم :

$$o = p(fog)= p(f) + p(g)= 1 + 1= 2= o \mod(2)$$

تعریف ۶ــ۱ A- مدول $M^* = Hom_A(M,A)$ راالحاقی‌یادوگان

M گویند .

ابرماتریـــس (Supermatrix)

تعریف ۷ ـــ۱ یک ساختارماتریسی(Matrix Structure) ، یک آرایش مستطیلی است که عناصرش بوسیله زوجهای مرتبی که نمایشگر شماره سطر و شماره ستون آن عنصـــر می‌باشد ، اندیس گزاری می شوند .

یک ساختار ابرماتریسی (Supermatrix Structure) یک ساختار ماتریســـی است که به هرستون و سطر زوجیت نسبت داده می شود . زوجیت i- امین سطـــر و j- امین ستون را بترتیب با $p_{row}(i)$ و $p_{col}(j)$ نمایش میدهیم .

معمولا" یک ساختار ابرماتریسی را طوری مرتب می کنند که تمام سطرهای زوج و ستونهای زوج اول می آیند وفرد هاد وم می آیند . بنابراین بـرای راحتی می توان آنرا به فرم بلوکی زیرنوشت :

$$X=\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$$

(R و U زوج و S و T فرد هستند .)

اگریک ساختار ابرماتـــــریسی دارای p سطرزوج و q سطرفرد و r ستون زوج و s ستون فرد باشد ، آنرا یک ساختار ماتریسی ازمرتبه $(p,q)\times(r,s)$ گوئیـــم .

یک ساختار $(p,q)\times(p,q)$ ازمرتبه (p,q) می‌باشـــد .

تعریف ۸ـــ۱ فرض کنید ساختار ابرماتریسی X داده شده ، مجموعه $\{X_{ij} \mid X_{ij}\in A\}$ متناظر باعناصر X را یک ماتریس روی A گوئیم .

زوجیت در فضای ماتریس های روی A به طریـــق زیرتعریف می شود :

$$p(X)=\bar{o} \quad \text{اگر} \quad p(X_{ij})+p_{row}(i)+p_{col}(j)=\bar{o} \quad \forall\, i,j$$

$p(X)=\bar{1}$ اگر $p(X_{ij}) + p_{row}(i) + p_{col}(j)=\bar{1} \quad \forall\, i,j$

وقتی‌که‌یک ماتریس به‌فرم بلوکی $X=\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ باشد زوجیت X رامی‌توان‌به طریق زیرد رآورد :

$p(X)=\bar{o}$ اگر $p(R_{ij})=p(U_{ij})=o \quad , \quad p(T_{ij})=p(S_{ij})=1$

$p(X)=\bar{1}$ اگر $p(R_{ij})=p(U_{ij})=1 \quad , \quad p(T_{ij})=(S_{ij})=o$

تعریف ۹ــ۱ ضرب د وماتریس X و Y به‌طریق‌معمول تعریف می شود :

$$(XY)_{ij} = \sum_{K} X_{ik}Y_{kj}$$

امادرحالت اَبَری‌یک چنین‌ضربی‌موقعی‌تعریف می شود که‌ستونهای X همـــان زوجیتی‌راد اشتهباشند که‌سطرهای‌متناظر Y دارند . درحالت خاص یکماتریس ازنوع $(p,q) \times (m,n)$ فقط می‌تواند ازسمت راست دریک ماتـــــــریس $(m,n) \times (r,s)$ ضرب شود .

تحت این شرایط داریم $p(XY)= p(X) + p(y)$. به‌دلیـــل زیر :

حالت اول :

فـرض کنید $X=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$, $p(X)=p(Y)=o$

وماتریسهای X و Y ازنوعی‌باشند که‌ضرب XY تعریف شود دراین‌صورت طبق‌تعریف

$p(E_{ij})= p(H_{ij})= p(A_{ij})= p(D_{ij})= \bar{o}$

$p(F_{ij})= p(G_{ij})= p(B_{ij})= p(C_{ij})= \bar{1}$

بنابراین‌ماتریس XY به‌فرم بلوکی‌به‌صورت زیرد رمی‌آید :

$$XY = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$$

بطوریکه : $p(M_{ij}) = p(Q_{ij}) = \bar{o}$ و $p(N_{ij}) = p(P_{ij}) = \bar{1}$

در نتیجه $p(XY) = o$ ونتیجه اینکه $p(XY) = p(X) + p(Y)$

حالت دوم :

فرض کنید $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ و $Y = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ دو ابرماتریس و $p(X) = \bar{o}$
$p(Y) = \bar{1}$

وضرب XY نیزتعریف شده باشد دراین صورت

$$p(A_{ij}) = p(D_{ij}) = p(F_{ij}) = p(G_{ij}) = \bar{o}$$

$$p(B_{ij}) = p(C_{ij}) = p(E_{ij}) = p(H_{ij}) = \bar{1}$$

دراین صورت XY یک ماتریس فرد خواهد بود در نتیجه $p(XY) = \bar{1}$ بنابراین :
$p(XY) = p(X) = p(Y)$

۱۰ ـ ۱ ابرفضای ماتریس های $(p,q) \times (m,n)$ روی ابرجبرجابجائی A

تبدیل به یک A- مدول می گردد . طبق تعریف زیر :

$$(Xa)_{ij} = (-1)^{p(a)p_{col}(j)} X_{ij}a \qquad (aX_{ij}) = (-1)^{p(a)p_{row}(i)} aX_{ij}$$

تعریف ۱۱ ـ ۱ فرض کنید $X = (X_{ij})$ یک ماتریس ازمرتبه $(p,q) \times (m,n)$

روی A ، باشد . دراین صورت ابرترانهاده (Supertranspose) X که

باعلامت X^{st} نمایش داده می شود یک ماتریس ازنوع $(m,n) \times (p,q)$ می‌ـ

باشد که درآیه‌هایش فرم زیررادارا می باشند .

$$(X^{st})_{ij} = (-1)^{(p_{row}(i) + p_{col}(j))(p(X) + p_{row}(i))} X_{ji}$$
$$= (-1)^{(p_{row}(i) + p_{col}(j))(p(X_{ij}) + p_{col}(j))} X_{ji}$$

جائیکه $p_{row}(i)$ و $p_{col}(j)$ نسبت به X^{st} می باشند . درحالت بلوکی

ابرترانهاده به‌صورت زیراست $X=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

اگر $p(X)=0$ $\qquad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{st} = \begin{pmatrix} A^t & C^t \\ -B^t & D^t \end{pmatrix}$

اگر $p(X)=1$ $\qquad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{st} = \begin{pmatrix} A^t & -C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix}$

با توجه به‌تعریف فوق داریم : $\qquad \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{st} \right)^{st} = \begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix}$

مثال۳: اگر X یک برد ارستونی‌با درایه‌های $(x_1,\dots,x_{m+1},\dots,x_{m+n})$

باشد که m تای‌اول‌زوج وبقیه‌فرد باشند در این‌صورت X^{st} یک برد ارسطری

است با فرم زیر :
$$(x_1,\dots,x_m,-(-1)^{p(x_{m+1})}x_{m+1},\dots,-(-1)^{p(x_{m+n})}x_{m+n})$$

واگر $Y=(y_1,\dots,y_{m+n})$ یک برد ارسطری‌که m تای‌اول‌آن‌زوج وبقیه‌فرد

باشند در این‌صورت Y^{st} یک برد ارستونی‌به‌فرم زیرمی‌باشد :
$$(y_1,\dots,y_m,-(-1)^{p(y_{m+1})}y_{m+1},\dots,(-1)^{p(y_{m+n})}$$

فرمهای‌د وخطی (Bilinear Forms)

تعریف ۱۲ــ۱ فرض‌کنید M و N مدولهائی‌روی‌ابرجبرجابجائی A باشند ۰

نگاشت $B : M \times N \to A$ رایک فرمد وخطی‌گویند اگرنسبت به‌هرد ومولفه‌خطی

باشد وبعلاوه

$$B(ma,n)=B(m,an)$$

$$B(m,na)=B(m,n)a \qquad \begin{matrix} m\in M \\ n\in N \end{matrix},\quad a\in A$$

مثال۴: یاد آوری‌می‌کنیم‌که $M^*=Hom_A(M,A)$ یک A- مدول‌است‌که‌دوگان

M خوانده‌می‌شود ۰ و M^* و M رابوسیله (،) بهم‌ربط مید هیم‌یعنی

(m^*,m) تصویر $m\in M$ تحت‌عمل $m^*\in M^*$ می‌باشد ۰ حال‌اگر

در تعریف فوق $M = N^*$ فرض شود یعنی

$$B : N^* \times N \longrightarrow A$$

$$B(n^*, n) = (n^*, n)$$

یک فرم دوخطی می‌باشد .

۱۳ــ۱ فرض کنید B یک فرم دوخطی باشد یعنی : $B \in Bil_A(M,N)$ ،
در این‌صورت B یک همریخت از M به N^* القاء می‌کند یعنی :

$$B_{M,N^*} : M \longrightarrow N^*$$

$$m \longrightarrow B_{M,N^*}(m)$$

بطوریکه $(B_{M,N^*}(m), n) = B(m,n)$

تناظر $B \longrightarrow B_{M,N^*}$ ، یک تناظر یک به‌یک می‌باشد
$(B \in Bil(M,N), B_{M,N^*} \in Hom(M,N^*))$ بطریق مشابه می‌توان یک ، یکریختی
از $Bil(M,N)$ به $Hom(N,M^*)$ تعریف نمود ، هرفرم B را به عملگر
B_{N,M^*} نسبت دهیم یعنی :

$$B_{N,M^*} : N \longrightarrow M^*$$

$$n \longrightarrow B_{N,M^*}(n)$$

بطوریکه : $(m, B_{N,M^*}(n)) = (-1)^{p(B)p(m)} B(m,n)$

یک فرم دوخطی $B \in Bil(M,N)$ را نابتهگون Non-Degenerate
گوئیم اگروتنها اگر B_{M,N^*} و B_{N,M^*} یکریختی باشد .

اگر M و N ، A- مدول با بعد متناهی با پایه‌های $\{m_i\}$ و $\{n_i\}$ باشد