بسم الله الرحمن الرحيم

پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته‌ی آمار ریاضی

کاربرد مدلهای نیمه مارکف در برآورد تعداد رویداد زمین لرزه

به وسیله‌ی

میثم پاشاپور

استاد راهنما

کاووس خورشیدیان

شهریور ۱۳۹۲

به نام خدا

اظهار نامه

اینجانب میثم پاشاپور (۹۰۰۳۵۹) دانشجوی رشته‌ی آمار ریاضی،دانشکده علوم اظهار می کنم که این پایان نامه حاصل پژوهش خودم بوده و در جاهایی که از منابع دیگران استفاده کرده ام، نشانی دقیق و مشخصات کامل آن را نوشته ام. همچنین اظهار نظر می‌کنم که تحقیق و مضوعات پایان نامه تکراری نیست و تعهد می‌نمایم که بدون مجوز دانشگاه دستاوردهای آن را منتشر ننموده و یا در اختیار غیر قرار ندهم.کلیه حقوق اثر مطابق با آیین نامه مالکیت فکری و معنوی متعلق به دانشگاه شیراز است.

نام و نام خانوادگی: میثم پاشاپور

تاریخ و امضا:

به نام خدا

کاربرد مدلهای نیمه مارکف در برآورد تعداد رویداد زمین لرزه

به وسیله‌ی

میثم پاشاپور

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی
از فعالیت‌های لازم برای اخذ درجه‌ی کارشناسی ارشد
در رشته:

آمار ریاضی

از دانشگاه شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه:

دکتر کاووس خورشیدیان استادیار بخش آمار(رئیس کمیته)....................................

دکتر احمدرضا سلطانی زمانی استاد بخش آمار...

دکتر مرضیه خلیلی استادیار بخش زمین شناسی...

دکتر زهر شیشه‌بردانشیار بخش آمار...

شهریور ۹۲

تقدیم به

آنان که در راه آزادی، آزاده هستند.

سپاس گذاری

سپاس خداوند بزرگ و مهربان را که این بنده‌ی حقیر را یاری نمود تا گامی در عرصه علم و دانش بردارم. وظیفه می‌دانم از تمامی اساتید و بزرگوارانی که در طول دوره‌ی تحقیق، مرا یاری فرموده اند، تشکر و سپاسگذاری نمایم. سپاس و تشکر بی پایان از اساتید فرهیخته، جناب آقای دکتر کاووس خورشیدیان و سرکار خانم دکتر مرضیه خلیلی که با کمال دقت و دلسوزانه و با ارائه نقطه نظرات خود،بنده را در انجام این پایان نامه راهنمایی و ارشاد فرمودند.

همچنین لازم می‌دانم از استاد مشاور گرامی، جناب آقای دکتر احمد رضا سلطانی و استاد داور، سرکار خانم زهره شیشه بر که با دقت نظر خود به این پایان نامه روح علمی بخشیدند، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

چکیده

کاربرد مدلهای نیمه‌مارکف در برآورد تعداد رویداد زمین لرزه

در این پایان‌نامه الگوی رویداد زلزله در منطقه‌ای محدود به عرض جغرافیایی °۲۷ تا °۳۰ و طول جغرافیایی °۵۵تا °۵۸که شامل استان‌های هرمزگان و کرمان است، توسط یک فرآیند نیمه مارکف مدل‌بندی می‌شود. حالت‌های فرآیند نیمه مارکف برای مجموعه داده‌ها بر اساس بزرگی زمین لرزه تعریف می‌گردد و با توجه به وِیژگی‌های توزیع ویبول برای فرآیند زلزله، فرض می‌شود که زمان‌های گذار بین حالت‌های مختلف از این توزیع تبعیت می‌نمایند.ابتدا برآورد پارامتری هسته‌ی نیمه مارکف و میانگین زمان‌های بازگشت محاسبه می‌شوند، سپس برای برآورد میانگین تعداد رویداد زلزله، زمان اصابت قویترین زمین لرزه‌ها و توابع انتقال، از روشی جدید که بر پایه تقریب لاپلاس معکوس است استفاده می‌شود. این روش در نرم افزارهای ریاضی دارای سرعت محاسباتی بسیار بالایی نسبت به روش‌های ارائه شده در مطالعات گذشته برای بدست آوردن این توابع می‌باشد. به منظور ارائه نتایجی جهت پیش بینی، احتمالات وقوع زلزله بعدی با شدت‌های متفاوت در بازه‌های بازه زمانی آینده با دانستن اطلاعات آخرین زمین‌لرزه نیز محاسبه گردیده است. نتایج حاصله تطابق جالبی با زلزله‌ی جدیدی که در منطقه رخ داده است دارد که نشان از اعتبار بالای مدل دارد.

واژه های کلیدی: فرآیند نیمه‌مارکف، پیش‌بینی زلزله، توزیع ویبول، ماتریس تجدید مارکف، توزیع زمان اصابت، نرخ رویداد زلزله

فهرست مطالب

مقدمه ۱

فصل اول: مفاهیم پایه و نماد گذاری ۳

۱-۱ زنجیره مارکف: ۳

۱-۲ فرآیند مارکف زمان پیوسته: ۴

۱-۳ فرآیند تجدید: ۵

تعریف ۱-۳-۱: ۶

۱-۴ قضیه کلیدی تجدید: ۷

قضیه۱-۴-۱: ۷

تعریف ۲-۴-۱ .... ۸

تعریف۳-۴-۱ .... ۹

۱-۵ فرآیند تجدید مارکف: ۱۰

۱-۶ تابع تجدید ۱۲

۱-۷ معادله تجدید مارکف ۱۳

۱-۸ فرآیندهای نیم مارکف ۱۵

۱-۹ زنجیر مارکف نشانیده شده ۱۶

۱-۱۰ تابع توزیع زمان چرخش ۱۶

۱-۱۱ تبدیل لاپلاس ۱۷

۱-۱۲ تبدیل لاپلاس استیلجس ۱۸

۱-۱۲-۱خواص تبدیل لاپلاس استیلجس ۱۸
۱-۱۳ تبدیل لاپلاس در نظریه تجدید ۱۸
۱-۱۳-۱ قضیه ۱۸
۱-۱۴ لاپلاس معکوس ۱۹
۱-۱۴-۱ قضیه (Heaviside Expansion Theorem) ۱۹
۱-۱۴-۲ انتگرال معکوس (Bromwich) ۱۹
۱-۱۵ تابع نرخ خطر ۱۹
۱-۱۶ توزیع ویبول ۲۰
برآوردگرهای هسته فرآیندهای نیم مارکف ۲۱
۲-۱ برآورد جزئی هسته نیم مارکف ۲۱
۲-۲ برآورد ماکزیمم درستنمایی هسته نیم مارکف ۲۶
قضیه۱-۲ .... ۲۷
فصل سوم: برآورد میانگین‌های رویداد زلزله ۳۱
۳-۱ انتخاب و ویرایش داده‌ها ۳۱
۳-۲ انتخاب توزیع و برآورد هسته‌ی نیمه مارکف ۳۵
۳-۳ برآورد توزیع مانای نیمه‌مارکف، میانگین زمان بازگشت ۳۹
۳-۴ برآورد امید تعداد رویداد زلزله، توزیع زمان اصابت زلزله های قوی وتوابع انتقال ۴۰
۳-۵ روش اویلر برای بدست لاپلاس معکوس: ۴۲
۶- ۳ برآورد امید تعداد رویداد زلزله برای حالتهای نیمه‌مارکف ۴۳
۳-۷ توزیع زمان اصابت حالت قوی زمین لرزه ۴۵
۳-۸ برآورد توابع انتقال ۴۸
فصل چهارم: برآورد نرخ های رویداد زلزله ۵۰
فصل پنجم: طبقه بندی جدید با استفاده از ویژگیهای لرزه زمین ساخت منطقه ۵۴
فصل ششم:برنامه نویسی و محاسبات ۶۱
۶-۱ برنامه طبقه بندی حالتهای زلزله و برآوردماتریس **P** و پارامترهای توزیع ویبول و محاسبه‌ی میانگین ها ۶۱

۶-۲ برنامه محاسبه و ترسیم نمودارتابع توزیع چرخش ۶۶

۶-۳ تابع euler_inversion برای محاسبه و تقریب لاپلاس معکوس به روش Euler۶۷

۶-۴ برنامه محاسبه‌ی امید تعداد ملاقات و ترسیم نمودار های۳-۴ و ۴-۴ ....۶۹

۶-۵ برنامه محاسبه‌ی تابع توزیع زمان اصابت و ترسیم نمودارهای ۵-۳ و ۶-۳............... ۷۲

۶-۶ برنامه محاسبه‌ی توابع انتقال و رسم نمودار ۷-۳... ۷۳

۶-۷ برنامه محاسبه‌ی جداول فصل ۴.. ۷۴

۶-۸ برنامه ترسیم نمودار ۱-۴ .... ۷۵

نتیجه گیری و پیش بینی رخداد زلزله بعدی...۷۶

مراجع ۷۸

فهرست نمودارها و شکل‌ها

نمودار۱-۳:مقایسه بین توزیع ناپارامتری و توزیع ویبول برآورد شده..۳۸
نمودار۲-۳:تابع توزیع زمان چرخش..۳۹
نمودار۳-۳: تابع مشتق امید تعداد ملاقات زلزله‌ی...۴۴
نمودار۴-۳: برآورد میانگین تعداد رویداد زلزله...۴۵
نمودار۵-۳:برآورد تابع چگالی احتمال زمان اصابت قویترین زمین لرزه......................................۴۷
نمودار۶-۳:برآورد تابع توزیع احتمال زمان اصابت قویترین زمین لرزه.......................................۴۸
نمودار۷-۳: برآورد توابع انتقال...۴۹
نمودار۱-۴: نرخ رویداد زلزله‌ی حالت سوم..۵۳
شکل۱-۵: تقسیم‌بندی، نام‌گذاری و دسته بندی ناحیه مورد مطالعه...۵۴
نمودار۲-۵: مقدار آماره‌ی Wilks lambada...۵۵
شکل۳-۵: نقشه گسل‌های فعال و اصلی ناحیه..۵۶
نمودار۴-۵: تابع مشتق امید تعداد ملاقات زلزله‌ی..۵۸
نمودار۵-۵: برآورد میانگین تعداد رویداد زلزله...۵۹
نمودار ۶-۵: برآورد توابع انتقال..۵۹
نمودار۷-۵ :برآورد تابع توزیع زمان وقوع اولین زمین‌لرزه در هر یک از زیرنواحی......................۶۰

فهرست جداول

جدول۱-۳: داده‌های زلزله...۳۳
جدول۱-۴: برآورد احتمال وقوع زلزله پس از زلزله‌ی حالت اول..۵۱
جدول۲-۴: برآورد احتمال وقوع زلزله پس از زلزله‌ی حالت دوم...۵۱
جدول۳-۴: برآورد احتمال وقوع زلزله پس از زلزله‌ی حالت سوم..۵۲
جدول۴-۴: برآورد احتمال وقوع زلزله با فرض اینکه ۲۴ ماه از آخرین زلزله گذشته است.......۵۲

مقدمه

به منظور ارائه کردن یک مدل برای رخداد زلزله، مدل‌های تحلیلی متعددی به کار گرفته شده است. بعضی از آنها بر پایه مشاهدات روی رخدادهای قبلی،بعضی دیگر بر پایه مدل‌بندی فیزیکی فرآیند زلزله و دسته سوم بصورت تحلیل آماری زمین‌لرزه می‌باشند. متداول‌ترین تحلیل و روش آماری، استفاده از الگوی فرآیند پواسون می‌باشد که در آن فرض می‌شود زمان های رخداد مستقل می‌باشد. ساده‌ترین مدلی که در آن فرآیند به زمان وابسته می‌باشد، مدل پواسون غیرهمگن می‌باشد، که برای تخمین مخاطره‌ی زمین لرزه در فواصل زمانی بلند مدت مناسب نمی‌باشد، زیرا مخاطره می‌بایست با هر زلزله جدید دوباره بازنگری شود.

مدل نیمه‌مارکف ابتدا توسط Cluff در سال ۱۹۸۰ استفاده شد که در آن شدت و زمان زلزله بصورت غیر تصادفی بوده و در آن از یک روش پارامتری به منظور برآورد دوره بازگشت استفاده شده است. در سال ۲۰۰۵ َAlvarez توزیع وایبول را در هسته‌ی نیمه‌مارکف برای داده‌های زلزله در آناتولی شمالی (ترکیه) به کار برد. در سال۲۰۱۰ این مدل توسط Elsa Garavaglia & Raffaella Pavani بهبود یافت و برخی نتایج پیش‌بینی ارائه گردید.همچنین در سال ۲۰۱۲ برآوردهای ناپارمتری نیمه‌مارکف برای داده‌های زلزله در قستی

از یونان توسط Votsi و همکاران به کار گرفته شد. در این پایان‌نامه حالت‌های نیمه‌مارکف برای رویداد زلزله در استان‌های هرمزگان و کرمان بر اساس طبقه‌بندی روی بزرگی زلزله تعیین می گردد. با توجه به مطالعات گذشته فرض می شود که زمان‌های بین گذار بین حالت ها دارای توزیع وایبول می‌باشد. چون تحلیل یک مدل نیمه‌مارکف نیازمند توابعی مثل امید تعداد ملاقات، توزیع اولین زمان گذار و یا توابع انتقال می‌باشد، این توابع نیز محاسبه می‌شوند. محاسبه چنین توابعی در برخی حالت‌های نیمه‌مارکف بسیار پیچیده می‌باشد، در این رساله روشی جدید برای محاسبه این توابع با استفاده از تقریب تبدیل لاپلاس معکوس ارائه می‌گردد.

ساختار این پایان نامه بدین صورت می‌باشد:

در فصل اول مفاهیم و قضایای اولیه‌ی فرآیندهای تصادفی، فرآیند تجدید مارکف و نیمه مارکف،تابع توزیع زمان چرخش، تابع نرخ خطر، تبدیلات لاپلاس و لاپلاس معکوس وخواص آنها ارائه می‌گردد. در فصل دوم برخی از برآوردگرهای نیمه‌مارکف و تجدید مارکف ارائه شده به بررسی به ویژگی های آن می‌پردازیم. فصل سوم شامل برآورد و محاسبه‌ی میانگین تعداد ملاقات حالت‌های مختلف، تابع توزیع زمان اصابت قویترین زمین‌لرزه و توابع انتقال می‌باشد. در فصل چهارم به منظور ارائه نتایجی برای پیش بینی احتمال وقوع زمین‌لرزه در بازه‌ی زمانی آینده و نرخ وقوع قویترین زمین‌لرزه‌ها محاسبه می‌گردد. در فصل پنجم به منظور ارائه‌ی نتایج ،جهت پیش‌بینی مکانی زمین لرزه، داده‌های لرزه‌ای درپیکربندی منطقه‌ی مطالعه استفاده شده، حالت‌های نیمه مارکف براساس مکان و انرژی آزاد شده‌ی زمین لرزه تعریف می‌گردد. فصل ششم شامل برنامه‌های طراحی شده در زبان برنامه‌نویسی متلب برای محاسبه‌ی برآوردگرهای نیمه‌مارکف میباشد. در آخر برخی نتایج پیش بینی مدل نیمه مارکف، با آخرین رویداد زلزله مقایسه می‌گردد.

فصل اول

مفاهیم پایه و نمادگذاری

۱-۱ زنجیره مارکف:

فرآیند تصادفی $\{J_n\} = \{J_n : n = 0,1,2,...\}$ با فضای وضعیت یا فضای مکان متناهی یا شمارای E را یک زنجیره مارکف گویند هرگاه در تمام وضعیت‌های $j,i,i_0,i_1,\ldots,i_n$ در E داشته باشیم:

$$P\{J_{n+1} = j | J_0 = i_0 \ldots . J_{n-1} = i_{n-1}, J_n = i\} = P\{J_{n+1} = j | J_n = i\} \quad (۱-۱)$$

این برابری که به خاصیت مارکفی معروف است به این معنی است که احتمال شرطی هر پیشامد آتی $\{J_{n+1} = j\}$، با شرط هر پیشامد گذشته $\{J_0 = i_0,\ldots,J_{n-1} = i_{n-1}\}$ و پیشامد حال $\{J_n = i\}$، از پیشامد گذشته مستقل است. اگر احتمال انتقال $P\{J_{n+1} = j | J_n = i\} = P_{ij}$ به ازای هر $i, j \in E$ مستقل از n باشد، آنگاه زنجیره مارکف نسبت به زمان متجانس می‌باشد، یا گفته می‌شود که زنجیره مارکف دارای احتمال انتقال

ایستا نسبت به زمان است. ماتریس $\mathbf{P}=[P_{ij}]$، ماتریس احتمال انتقال زنجیره $\{J_k\}$ گفته می‌شود. وضعیت j را برگشت‌پذیر گویند هرگاه متوسط تعداد ملاقات‌هابی‌نهایت شود. یعنی $\sum_n P_{jj}^{(n)}=\infty$، در غیراین‌صورت آن‌را گذرا می‌نامند. مجموعه‌ای بسته از وضعیت‌هایی که با هم در ارتباط هستند یک کلاس تحویل‌ناپذیر از وضعیت‌ها گفته می‌شود. تمام وضعیت‌های یک کلاس تحویل‌ناپذیر از یک نوع هستند یعنی یا همه گذرا هستند یا همه برگشت‌پذیر می‌باشند. زنجیره مارکف را تحویل‌ناپذیر گوییم اگر تمام وضعیت‌ها با هم در ارتباط باشند به عبارت دیگر فضای وضعیت از یک کلاس تشکیل شده باشد. دوره تناوب وضعیت i عبارت است از بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک تمام اعداد صحیح $n\geq 1$ که به ازای آنها $P_{ii}^{(n)}>0$. اگر هر مکان دارای دوره تناوب یک باشد، زنجیره مارکف را نامتناوب یا نادوره‌ای می‌گویند.

۲-۱ فرآیند مارکف زمان پیوسته:

این فرآیند مشابه زنجیره مارکف بوده با این تفاوت که فضای پارامتر T به صورت متغیر تصادفی پیوسته مورد بررسی قرار می گیرد. فرآیند تصادفی $\{J(t),t\in T\}$ با فضای پارامتر $T=R^+$ و فضای وضعیت Eرا یک زنجیره مارکف زمان پیوسته می‌نامند اگر برای هر $n\geq 1$ و دنباله‌های $\{t_0,t_1,\ldots,t_n,t_{n+1}\}$ و $\{i_0,i_1,\ldots,i_{n+1}\}$ با $t_0<t_1<\ldots<t_{n+1}$ و $t_k\in T$ رابطه زیر برقرار باشد.

$$P\{J(t_{n+1})=i_{n+1}|J(t_0)=i_0,\ldots,J(t_n)=i_n\}=P\{J(t_{n+1})=i_{n+1}\,|J(t_n)=i_n\}$$

(۱-۲)

به ازای هر $t,s\in T$ احتمال شرطی زیر را احتمال تغییر وضعیت زنجیر ازiبه j در بازه زمانی $(s,t]$ می‌نامند.

$$P_{ij}(s,t)=P\{J(t)=j \mid J(s)=i\} \qquad \forall \quad i,j\in Z \qquad s<t \qquad (۱-۳)$$

زنجیره مارکف با فضای پارامتر پیوسته را همگن نامند اگر $P_{ij}(s,t)=P_{ij}(0,t-s)$. یعنی احتمال تغییر وضعیت سیستم فقط به طول بازه زمانی وابسته باشد در این حالت می‌توان نوشت $P_{ij}(t)=P(J(t)=j \mid J(0)=i)$ که در آن $P_{ij}(t)$را تابع احتمال تغییر وضعیت از i به j در لحظه t می نامند. ماتریس تابع احتمال تغییر وضعیت $J(t)$ عبارت است از $\mathbf{P}(t)=[P_{ij}(t)]$. در حالت کلی فرآیند مارکف پیوسته زمان، فرآیندی تصادفی است که از حالتی به حالت دیگر طبق زنجیر مارکف(گسسته زمان) حرکت می‌کند اما به گونه‌ای که مدت زمان ماندن آن در هر وضعیت، قبل از آنکه به وضعیت دیگر برود، دارای توزیع نمایی است. بعلاوه مدت زمانی که فرآیند در وضعیت i می‌گذراند و حالتی که بعد از آن به آنجا خواهد رفت متغیرهای تصادفی مستقلند.

۳-۱فرآیند تجدید:

قبل از معرفی فرآیند تجدید، فرآیند شمارشیرا تعریف می‌کنیم. فرآیند تصادفی $\{N(t),t\geq 0\}$ را فرآیند شمارشی گویند هرگاه $N(t)$ تعداد کل پیشامدهایی باشد که تا زمان t رخ داده‌اند، از این رو فرآیند شمارشی $N(t)$ باید در شرایط زیر صدق کند.

i) $N(t)\geq 0$،

ii) $N(t)$ صحیح مقدار باشد،

iii) اگر s<t، آنگاه $N(s)\leq N(t)$،

iv) برای s<t، $N(t)$-$N(s)$ برابر تعداد پیشامدهایی باشد که در فاصله زمانی $[s,t)$ رخ داده‌اند.

حال فرآیند شمارشی را در نظر بگیرید که در آن زمان‌های بین دو رویداد متوالی، مستقل و همتوزیع با توزیع دلخواه باشند، چنین فرآیند شمارشی را یک فرآیند تجدید می‌نامند. اگر زمان

بین دو رویداد در فرآیند تجدید دارای توزیع نمایی باشد این فرآیند را فرآیند پواسن گویند. به صورت دقیق تر یک پیشامد را در نظر بگیرید، فرض کنید $X_1, X_2, \ldots$ زمان‌های بین رویدادهای پیاپی باشد، دنباله S_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_0 = 0 \qquad S_{n+1} = S_n + X_{n+1} \qquad n \in \mathrm{N}$$

تعریف ۱-۳-۱: دنباله $S = \{S_n ; n \in \mathrm{N}\}$ را یک فرآیند تجدید گویند هرگاه $X_1, X_2, \ldots$ متغیرهای تصادفی غیر منفی، مستقل و همتوزیع باشند. در این صورت S_nها را زمانهای تجدید می نامند.

فرض کنید X_nها دارای توزیع F باشند. تعداد تجدیدها در فاصله $[0,t]$ که با $N(t)$ نشان داده می‌شود بصورت:

$$N\ (t,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{[0,t]}(S_n(\omega)); \quad t \geq 0 \qquad \omega \in \Omega \tag{۱-۴}$$

یا بصورت:

$$N\ (t,\omega) = \inf\ \{n \in \mathrm{N}; S_n(\omega) > t\} \tag{۱-۵}$$

می باشند.

توزیع $N(t)$ را می توان با توجه به برابری پیشامدهای زیر مشخص نمود:

$$\{N(t) \geq n\} \Leftrightarrow \{S_n \leq t\}$$

بنابراین

$$P\{N(t) \geq n\} = P\{S_n \leq t\} = P\{X_1 + \cdots + X_n \leq t\} = F^{(n)}(t)$$

جایی‌که $F^{(n)}(t)$ پیچش n تایی F با خودش می‌باشد. در نتیجه

$$P\{N(t)=n\}=P\{N(t)\geq n\}-P\{N(t)\geq n+1\}=F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t)$$

(۱-۶)

یکی از توابع مهم و مورد علاقه در نظریه تجدید، تابع $\psi(t)$، میانگین تعداد تجدیدها در فاصله $[0,t]$ است که به بصورت زیر حساب می‌شود:

$$\psi(t)=E[N(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}=\sum_{n=0}^{\infty}P\{S_n\leq t\}=\sum_{n=0}^{\infty}F^{(n)}(t) \quad (۱-۷)$$

$\psi(t)$را تابع تجدید متناظر با توزیع F گویند. لازم به ذکر است که $\psi(t)$تمام خواص یک اندازه σ-متناهی را دارد.

۱-۴ قضیه کلیدی تجدید:

تعریف۱-۴-۱ : متغیر تصادفی نامنفی X را مشبکه گویند هرگاه $d\geq 0$ وجود داشته باشد به قسمی که $\sum_{n=0}^{\infty}P(X=nd)=1$. یعنی X مشبکه است اگر و تنها اگر مضارب صحیح یک عدد نامنفی را اختیار کند. بزرگترین d با این خاصیت را دوره X نامند. اگر X مشبکه و F تابع توزیع X باشد آنگاه F مشبکه است.

قضیه زیر به قضیه بلکول معروف است.

قضیه۱-۴-۱:

i) اگر F مشبکه نباشد آنگاه به ازای هر $a\geq 0$

$$\psi(t+a)-\psi(t)\to\frac{a}{m} \quad , \quad m=\int xF(dx) \quad , as \quad t\to\infty$$

ii) اگر F مشبکه با دوره d باشد آنگاه:

E) nd (تعداد تجدیدها در $\to d/m \quad as \;\; n \to \infty$

اثبات:رجوع شود به [10].

این قضیه بیان می‌کند که اگر F مشبکه نباشد، آنگاه امید تعداد تجدیدها در فاصله‌ای به طول a، بسیار دور از مبدأ تقریباً برابر $\frac{a}{m}$ است. این کاملاً شهودی است زیرا هر چقدر که از مبدا دور شویم به نظر می‌رسد که اثرهای اولیه از بین می‌روند و در نتیجه حد بالا باید وجود داشته باشد.

تعریف ۲-۴-۱: فرض کنید f یک تابع حقیقی و کراندار باشد که بر بازه $[a,b]$ تعریف شده است. به ازای هر افراز P از $[a,b]$ قرار می دهیم

$$M_i = \sup f(x) \;,\; x_{i-1} \le x \le x_i$$
$$m_i = \inf \; f(x) \;,\; x_{i-1} \le x \le x_i$$

و

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \,,$$
$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \,,$$

و همچنین داریم

$$\int_a^{b^-} f\,dx = \inf U(P,f) \tag{۱-۸}$$

$$\int_{a^-}^{b} f\,dx = \sup L(P,f) \tag{۱-۹}$$