دانشگاه تربیت معلم تهران

دانشکدهٔ علوم ریاضی ومهندسی کامپیوتر

پایان نامهٔ کارشناسی‌ارشد ریاضی محض

(شاخهٔ آنالیز)

عنوان:

قاب‌های تنگ یکنواخت با پاک‌کننده‌ها

استادراهنما:

دکتر امیر خسروی

تدوین:

رحمت زارع

شهریور ۱۳۸۷

چکیده

بحث اصلی در این پایان‌نامه قاب‌های تنگ یکنواخت (نرم‌ـ مساوی) است. نشان داده می‌شود که این نوع قاب برای استحکام داده‌های انتقال مفید بوده و قابلیت زیادی دارند.

اختلالات در شبکه همان پاک کننده‌های ضرایب قاب انتقال داده شده است و ما این پاک‌کننده‌ها را برای این نوع قاب بررسی می‌کنیم.

ما نخست مطالعه اصولی و منظم از طبقه‌بندی کردن قابهای تنگ یکنواخت و خواص آنها ارائه می‌دهیم سپس ترکیب مؤثر و کارآمد از این نوع قاب را جستجو می‌کنیم.

با معرفی قاب هارمونیک (HF) و قاب هارمونیک کلی (GHF) و قضایای مربوط به آنها و ارائه این قضیه که خانواده $\{\varphi_i\}_{i=1}^{m-1}$ در H_N یک قاب هارمونیک کلی است اگر و فقط اگر برای هر $0 \leq i, j \leq m-1$ داشته باشیم $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \langle \varphi_{i+1}, \varphi_{j+1} \rangle$ جایی که $\varphi_m = \varphi_0$ و با ارائه این نکته که فقط قابهای تنگ یکنواخت با ساختار گروهی و یک یا دو مولد توسط قابهای هارمونیک تولید می‌شوند این بحش به پایان می‌رسد.

قابهای تنگ یکنواخت را با یک مولد بررسی کرده و این قضیه مشهور که اگر u یک عملگر یکانی بر روی H_N بوده و $\varphi_0 \in H_N$ و فرض کنید $\{u^k \varphi_0\}_{k=0}^{m-1}$ یک قاب تنگ نرمال یکنواخت (UNTF) باشد در این صورت $u^m = cI$ برای $|c| = 1$ و $\{u^k \varphi_0\}_{k=0}^{m-1}$ یک قاب هارمونیک کلی است. یعنی قابهای هارمونیک کلی فقط قابهای تنگ نرمال یکنواخت با یک گروه از عملگرهای یکانی با یک مولد منحصر به فرد هستند، بیان می‌کنیم.

در بخش آخر یک طبقه‌بندی کلی از قابها نسبت به استحکامشان به پاک کننده‌ها ارائه می‌دهیم. ابتدا قابهای مقاوم به یک پاک کننده، سپس قابهای مقاوم به هر پاک کننده را معرفی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: قاب، قاب هارمونیک، قاب هارمونیک کلی، تصویر متعامدیکه، پاک کننده.

فهرست مطالب

پیشگفتار

در سال‌های قبل از ۱۹۴۶ میلادی تجزیهٔ پیام‌های مخابراتی به وسیلهٔ سریهای فوریه انجام می‌گرفت. به این صورت که ابتدا پیام به وسیلهٔ سری فوریه به یک سری تبدیل می‌شد و ضرایب این سری ارسال می‌گردید، در محل مقصد سری مجدداً به پیام برگردانده می‌شد. در طی این تبدیلات پیام، اطلاعات مربوط به ابتدا و انتهای پیام پنهان می‌ماند و همچنین اگر اختلالی در بین ارسال پیش می‌آمد، در برگرداندن پیام از سریهای فوریه، این نقصان‌ها قابل رفع شدن نبود. دلیل این محدودیت را منحصر به فردی ضرایب، در تجزیه به روش فوریه بیان می‌کردند. بالاخره در سال ۱۹۴۶ میلادی، گابور شیوه‌ای برای تجزیهٔ سیگنال‌ها، به سیگنال‌های مقدماتی ارائه داد، که مشکلات و محدودیت‌های بیان شده در شیوهٔ قبل رفع گردید(به خاطر این موفقیت گابور به دریافت جایزهٔ نوبل در سال ۱۹۷۱ شد.) ۵ سال بعد یعنی در سال ۱۹۵۰ میلادی، زمانی که در نظریهٔ سریهای فوریه غیرهارمونیک به مسائل مشکل

برخورد کردند و به وسیلهٔ اطلاعات گذشته مسائل قابل حل شدن نبود، رافین و شیفر، روش گابور را به کار برد و علیرغم انتظار همگان، مسائل با این راه حل شد، با این ایده و انگیزه رافین و شیفر آنچه که گابور طرح کرده بود به صورت مجرد و انتزاعی بر فضای هیلبرت، باعنوان قاب بیان کردند، نتیجهٔ این تلاش رسیدن به دنباله‌هایی وسیع‌تر از پایهٔ متعامد بود با این ویژگی که هر عضو فضای هیلبرت بر حسب این دنباله قابل تجزیه بود.

البته در این حالت بر خلاف تجزیه بر اساس پایهٔ متعامد، ضرایب منحصر به فرد نیست و همین ویژگی، باعث ترجیح قاب بر پایهٔ متعامد شد.

در سال‌های بعد در ادامهٔ تحقیقات با توجه به بازتابی بودن فضای هیلبرت $(H^* = H)$ قابها برای فضاهای باناخ نیز تعریف گردید. البته بحث قاب در فضای باناخ کمی متفاوت با قاب در فضای هیلبرت است چون تعریف قاب در فضای هیلبرت بر پایهٔ ضرب این فضاست حال آنکه فضای باناخ ضرب ندارد.

قاب‌های گابور که اغلب بانام قاب‌های ویل ـ هایزنبرگ نیز شناخته می‌شوند زمینه‌ای برای آغاز آنالیز طیفی نیز به حساب می‌آید. اکنون از این نوع قاب در هر قسمت که به تجزیهٔ سیگنالها مرتبط است استفاده می‌شود. به عنوان مثال در مخابرات، اپتیک، پردازش تصویر، بانکهای جداساز و . . . .

مقالات زیادی در ارتباط با کاربردهای قاب و انواع آن در قانونهای فیزیکی و زمینه‌های دیگر نوشته شده است.

در این پایان‌نامه با قاب‌های هارمونیک ـ قاب‌های هارمونیک کلی ـ طبقه‌بندی قاب‌های تنگ نرمالیز شدهٔ یکنواخت به منظور آسان کردن جستجو برای خانواده‌های مفید ـ قاب‌های تولید شده با یک گروه از عملگرها یکانی شامل یک بردار ثابت ـ جستجو برای قاب‌های مقاوم به تعدادی خاص پاک کننده و استحکام قاب‌های یکنواخت به پاک کننده‌های مختلف آشنا می‌شویم.

برای ارائه این مفاهیم از مقالهٔ زیر به عنوان مقالهٔ اصلی استفاده شده است.

P. Casazza and J. Kovacevic, Equal-norm tights frame with erasures, Adv. Comput. Math. 18(2003)-387-430.

از مقالات زیر به عنوان مقاله فرعی استفاده شده است.

i) C. Heil and D. Walnut. Continuous and discrete wavelet transforms.Siam Rer, 31:628-666,1989.

ii) D. Han and D. R. Larson, Frames, bases and group representations. In Memories AMS, Poridence, RI. 2000.

iii) V. K Goyal and J. Kavacer. C. Optimal multiple description transform coding of Gaussian Vectors. In por. Data compr. conf. pages 388- 397, snowbird, ut, March 1998.

در فصل اول تعاریف و مفاهیم اولیه و قضایای مربوط به فضای هیلبرت و عملگرهای مختلف و قضایای مهم در آن بیان شده است.

در فصل دوم، قاب‌ها و مفاهیم اولیه آنها از جمله عملگرهای تحلیلی و ترکیب و عملگر قاب و پایه‌های ریتس، دنباله‌های بسل، قاب‌های دوگان متناوب و قاب‌های دقیق و شرایط هم‌ارزی این قاب‌ها با پایه‌های شرطی غیرکراندار و . . .بیان شده است.

در فصل سوم، قاب‌های هارمونیک و یک ردهٔ کلی از این قاب‌ها، قاب‌های هارمونیک کلی (GHF). را تعریف می‌کنیم شرابط هم‌ارزی را روی قاب‌های هارمونیک و همچنین شرایط هم‌ارزی ساده روی قاب‌های هارمونیک کلی را بیان و ثابت می‌کنیم. همچنین مقدار ویژه و ارتباط آن با قاب را ذکر می‌کنیم. در آخر نیز قاب‌های گابور را معرفی می‌کنیم.

در فصل چهارم، قاب‌های تنگ نرمالیز شدهٔ یکنواخت را طبقه‌بندی می‌کنیم. در این فصل قاب‌های تنگ نرمال و قاب‌های تنگ نرمالیز شدهٔ یکنواخت را با فراهم کردن تطابق با زیرفضاهای، فضای هیلبرت اصلی طبقه‌بندی می‌کنیم. این قضایا با گفت‌وگو و مذاکره بین P. Casazza و V. Paulsen فراهم شده است همچنین قاب‌های دوگان یکنواخت را به منظور طبقه‌بندی قاب‌های تنگ یکنواخت معرفی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که دوگان متفاوت تنگ نرمال برای قاب تنگ نرمالیز شدهٔ خودِ قاب است.

در فصل پنجم، قاب‌هایی را با یک گروه از عملگرهای یکانی شامل یک بردار ثابت در فضای هیلبرت تولید می‌شود را بررسی و استفاده آن که در قاب‌های گابور و در Signal processing است البته با دو مولد بیان می‌کنیم.

در فصل ششم، که مهمترین فصل در بین فصول است و در Wavelet کاربرد بسیاری دارد و ما را برآن داشته بود که به بررسی قاب‌های تنگ یکنواخت بپردازیم استحکام این قاب‌ها به انتقال اطلاعات بوده است.

ما قاب‌های مقاوم به تعداد خاص از پاک کننده‌ها را جستجو می‌کنیم و استحکام به پاک کننده‌ها را در دو حالت مختلف که یک بار وقتی که بعد PH بزرگ (هم اندازهٔ بعد H) است و بار دیگر وقتی که بعد PH کوچک است. در حالت اول با $\{(I-P)e_i\}_{i=1}^{M}, (I-P)H$ و در حالت دوم با PH و $\{Pe_i\}_{i=1}^{M}$ کار می‌کنیم.

یادگیری مطالب این پایان نامه برای کسانی که می‌خواهند در این زمینه کارکنند ضروری است و امیدوارم این پایان‌نامه برای کسانی که در نظریهٔ قاب‌ها تحقیق می‌کنند مفید واقع گردد.

فصل اول

پیشنیازها و نمادها

در این فصل سعی کرده‌ایم که نمادها، تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصول بعدی را بیان نماییم.
مجموعه اعداد طبیعی و صحیح را به ترتیب با نمادهای $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ نمایش می‌دهیم و J، همواره مجموعه‌ای شمارش‌پذیر است.

۱.۱ تعریف.

i) اگر X یک فضای توپولوژیک و f تابعی با مقادیر مختلط روی X باشد. محمل f که بانماد $\text{Supp}(f)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\text{Supp}(f) : \overline{\{x \in X : f(x) \neq \circ\}}$$

ii) دلتای کرونکر به ازای هر α, β که با نماد $\delta_{\alpha,\beta}$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_{\alpha,\beta} := \begin{cases} ۱ & \alpha = \beta \\ ۰ & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

iii) اگر (X, m, μ) یک فضای اندازه باشد به ازای $۱ \leq p < \infty$ فضای $L^p(X)$ عبارت است از

$$L^p(X,\mu) := \{f : X \longrightarrow C \text{ و } f \text{اندازه‌پذیر است}, \|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{۱}{p}} < \infty\}$$

$$l^۲(J) := \{x = (x_j)_{j\in J} : \|x\|_۲ = (\sum_{j\in J} |x_j|^۲)^{\frac{۱}{۲}} < \infty\}$$

iv) فرض کنیم V یک فضای برداری و $A \subseteq V$، $\mathrm{Span}(A)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Span}(A) = \begin{cases} \{۰\} & A = \phi \\ \text{مجموعه تمام ترکیبات خطی متناهی اعضای } A & A \neq \phi \end{cases}$$

که $\mathrm{Span}(A)$ کوچکترین زیرفضای برداری V است که شامل A است و آن را زیرفضای تولید شده توسط A می‌نامند.

۲.۱ فضاهای نرمدار

۱.۲.۱ تعریف. فرض کنیم که X یک فضای برداری مختلط باشد، نگاشت $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک نرم روی X می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in X$ و برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$،

i) $\|x\| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(iii $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

و فضای برداری X را همراه با نرم $\|\cdot\|$ یک فضای بردار نرمدار (فضای نرمدار) می‌نامند.

۲.۲.۱ قضیه. فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد آنگاه:

(i نگاشت $\|x\| \longrightarrow x$ پیوسته است.

(ii اگر X یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه

$$\|x\| = \sup\{|\langle x, y\rangle| : y \in X, \|y\| = 1\}$$

ر.ک. [۳۰]

۳.۲.۱ تعریف. فرض کنیم که X یک فضای نرمدار و $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای در X باشد.

(i می‌گوییم $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ به $x \in X$ **همگراست** هرگاه $\lim \|x_n - x\| = 0$ یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$، یک $N_{(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ موجود باشد که برای هر $n \geq N_{(\varepsilon)}$، $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

(ii می‌گوییم $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ در X **کوشی** است هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ یک $N_{(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ موجود باشد که به ازای هر $m, n \geq N(\varepsilon)$، $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

۴.۲.۱ نتیجه. در فضای نرمدار X، هر دنباله همگرا، کوشی است.

۵.۲.۱ تعریف . فضای نرمدار X را فضای باناخ (کامل) می‌نامند، هرگاه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

۶.۲.۱ مثال.

i) $\mathbb{C}$ و $\mathbb{N}$ همراه با نرم قدرمطلق، فضاهای باناخ هستند.

ii) اگر $(X, m\mu)$ یک فضای اندازه باشد آنگاه برای $۱ \leq P < \infty$، $L^P(X, \mu)$ بانرم $\|\cdot\|_P$ یک فضای باناخ است.

iii)

$X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای ازاعداد مختلط از مرحله‌ای به بعد صفر است، $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$

یک فضای برداری است که با نرم زیر باناخ نیست.

$$\|x\| = (\sum_{n=۱}^{\infty} |x_n|^۲)^{\frac{۱}{۲}} \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

۷.۲.۱ تعریف. دو نرم $\|\cdot\|_۱$ و $\|\cdot\|_۲$ در فضای نرمدار X را هم ارز (معادل) می‌نامند هرگاه اعداد ثابت و مثبت M و K موجود باشند که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$K\|x\|_۱ \leq \|x\|_۲ \leq M\|x\|_۱$$

۸.۲.۱ قضیه. فرض کنیم $\|\cdot\|_۱$ و $\|\cdot\|_۲$ دو نرم هم‌ارز روی فضای برداری X باشد آنگاه X با $\|\cdot\|_۱$ باناخ است اگر وتنها اگر X با $\|\cdot\|_۲$ باناخ باشد.

ر. ک. [۲]

۹.۲.۱ قضیه. در هر فضای نرمدار با بعد متناهی هر دو نرم دلخواه هم‌ارزند.

ر. ک. [۲]

۱۰.۲.۱ قضیه. هر زیرفضای با بعد متناهی فضای برداری نرمدار، با توپولوژی حاصل از نرم بسته است.

ر. ک. [۲]

۱۱.۲.۱ قضیه. یک فضای نرمدار با توپولوژی حاصل از نرم موضعاً فشرده است اگرو تنها اگر با بعد متناهی باشد.

ر. ک. [۲]

۳.۱ عملگرهای خطی روی فضاهای نرمدار

۱.۳.۱ تعریف. فرض کنیم X و Y دو فضای برداری باشند، عملگر $T : X \longrightarrow Y$ را خطی می‌نامند. هرگاه به ازای هر $\alpha \notin \mathbb{C}, x, y \in X$ داشته باشیم:

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$$

زیرفضاهای $N(T) := \{x \in X, T(x) = \circ\}$ و $R(T) := \{T(x), x \in X\}$ به ترتیب از Y, X را فضاهای پوچ و برد T می‌نامند.

عملگر همانی روی X را با نماد I_X یا به طور خلاصه با I نشان می‌دهیم.

۲.۳.۱ تعریف. فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار باشند و $T : X \longrightarrow Y$ عملگری خطی باشد، آنگاه نرم عملگر T را با $\|T\|$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|T\| := \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq \circ\}$$

عملگر T را کراندار می‌نامند هرگاه $\|T\| < \infty$ و آن را بیکران می‌نامند هرگاه $\|T\| = \infty$

تمام عملگرهای خطی وکراندار از X به Y را بانماد $B(X, Y)$ نشان می‌دهند. اگر $Y = X$ یا $Y = \mathbb{C}$ به ترتیب می‌نویسند $B(X)$ یا X^* و هر یک از اعضای X^* را یک تابعک خطی می‌نامند.

۳.۳.۱ گزاره.

i) فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ عملگری خطی باشد آنگاه:

$$\|T\| = \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|, x \in X \quad \text{به ازای هر}\}$$

ii)

$$\|T\| = \sup\{|y^*(Tx)| : x \in X, y^* \in Y^*, \|x\| \leq 1, \|y^*\| \leq 1\}$$

ر. ک. [۳۰]

۴.۳.۱ قضیه. فرض کنیم X و Y دو فضای نرم دار و $T : X \longrightarrow Y$ عملگری خطی باشد آنگاه گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

i) T کراندار است.

ii) عددی ثابت مانند M موجود است برای هر $x \in X$، $\|Tx\| \leq M\|x\|$

iii) T در صفر با توپولوژی نرم پیوسته است

iv) T با توپولوژی نرم پیوسته است.

ر. ک. [۲]

۵.۳.۱ تعریف. فرض کنیم که X و Y دو فضای نرمدار باشند:

i) زیرمجموعه A از X را نرم- کراندار می‌نامند هرگاه ثابتی مثبت مانند M موجود باشد که برای هر $x \in A$، $\|x\| \leq M$.

ii) زیرمجموعه A از $B(X, Y)$ را نقطه‌ای کراندار می‌نامند هرگاه برای هر $x \in X$، زیرمجموعهٔ $A(x) := \{T(x) | T \in A\}$ از Y نرم- کراندار باشد.

۶.۳.۱ تعریف. دو فضای نرمدار X و Y را ایزومرفیسم (یکریخت) می‌نامند هرگاه عملگری خطی مانند $T \in B(X, Y)$ موجود باشد که یک به یک، پوشا و ایزومتری (به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $\|Tx\| = \|x\|$) باشد و می‌نویسند $X \cong Y$.

۷.۳.۱ تعریف. فضای نرمدار X را

i) بازتابی می‌نامند هرگاه $X \cong X^*$

۴.۱ الحاقیها

۱.۴.۱ قضیه. فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند و $T \in B(X, Y)$ در این صورت متناظر T عملگر خطی منحصر به فرد می‌نامند $T^* \in B(Y^*, X^*)$ موجود است به طوری که به ازای هر $y^* \in Y^*$ داریم:

$$T^*(y^*) = y^* \circ T$$

به علاوه $\|T^*\| = \|T\|$. عملگر T^* را الحاقی T نامند.

ر. ک. [۳۱]

۲.۴.۱ قضیه. فرض کنیم Z, Y, X فضاهای نرمدار باشند و $T \in B(X,Y)$ و $S \in T(Y,Z)$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ دراین صورت احکام زیر برقرار است:

(i $(\alpha T + u)^* = \bar{\alpha} T^* + u^*$

(ii $(ST)^* = T^* S^*$

(iii $I_X^* = I_{X^*}$

(iv اگر T وارونپذیر باشد آنگاه T^* نیز وارونپذیر است و $(T^*)^{-۱} = (T^{-۱})^*$

ر. ک. [۳۰]

۵.۱ فضای هیلبرت

۱.۵.۱ تعریف. فضای برداری مختلط H را یک فضای ضرب داخلی می‌نامند هرگاه نگاشت

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : \begin{array}{l} H \times H \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,y) \mapsto \langle x, y \rangle \end{array}$$

موجود باشد که به ازای هر $x, y, z \in H$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

(i $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$

(ii $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

(iii $\langle x, x \rangle \geq ۰$

iv) $\langle x,x\rangle = \circ$ اگر و تنهااگر $x=\circ$

عدد مختلط $\langle x,y\rangle$ را ضرب داخلی y,x و نگاشت فوق را ضرب داخلی (یکه‌ای) می‌نامند.

۲.۵.۱ نتیجه. فرض کنیم H یک فضای ضرب داخلی باشد در این صورت احکام زیر برقرارند:

i) به ازای هر $y\in H$، $\langle \circ, y\rangle = \circ$

ii) به ازای هر $y\in H$ نگاشت $x \longrightarrow \langle x,y\rangle$ تابعکی خطی کراندار بر H است.

iii) به ازای هر $x,y,z\in H$ و $\alpha\in\mathbb{C}$ آنگاه:

$$\langle z, \alpha x + y\rangle = \bar{\alpha}\langle z,x\rangle + \langle z,y\rangle$$

iv) نگاشت $\|\cdot\| : H \longrightarrow \mathbb{R}$ که به ازای هر $x\in X$ با ضابطهٔ $\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ تعریف شده یک نرم روی H است که آن را نرم القا شده توسط ضرب داخلی می‌نامند.

v) به ازای هر $x,y\in H$ داریم:

$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\| \qquad \text{(نامساوی کوشی- شوارتز)}$$

$$\|x+y\|^{۲} + \|x-y\|^{۲} = ۲(\|x\|^{۲} + \|y\|^{۲}) \qquad \text{(اتحاد متوازی الاضلاع)}$$

ر.ک. [۳۱]

۳.۵.۱ تعریف. فضای برداری مختلط H را همراه با صفر داخلی $\langle \circ,\circ\rangle$ یک فضای هیلبرت می‌نامند، هرگاه همراه با نرم القا شده توسط ضرب داخلی $\langle \circ,\circ\rangle$ باناخ باشد.

۴.۵.۱ مثال.

i) هرگاه $n \in \mathbb{N}$، آنگاه $\mathbb{C}^n$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است.

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i \qquad x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{C}^n$$

ii) اگر (X, M, μ) یک فضای اندازه باشد آنگاه $L^2(X, \mu)$ همراه با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است.

$$\langle f, y\rangle = \int_X f\bar{g}dM \qquad f, g \in L^2(X, \mu)$$

تذکر. از این به بعد H به منزله فضای هیلبرت H است.

۵.۵.۱ قضیه. در فضای هیلبرت H، برای هر $y \in H$، نگاشتهای $x \longrightarrow \langle x, y\rangle$ و $\langle y, x\rangle \longrightarrow x$ به ترتیب خطی کراندار و مزدوج خطی کراندارند. (اگر X و Y دو فضای برداری مختلط باشند آنگاه $T : X \longrightarrow Y$ را مزدوج خطی می‌نامند هرگاه به ازای هر $x, y \in H$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

$$T(\alpha x + y) = \bar{\alpha}T(x) + T(y)$$

ر.ک. [۳۰]

۶.۵.۱ تعریف. زیرفضای بسته H، زیرفضایی برداری از H است که با توپولوژی حاصل از نرم در H بسته باشد.