بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده فنی و مهندسی
بخش مهندسی برق

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته مهندسی برق
گرایش کنترل

کنترل بهینه سیستمهای خطی متغیر با زمان با استفاده از توابع متعامد

استادان راهنما:

دکتر محمود سماوات

دکتر محمد علی ولی

مؤلف:

سعید رادهوش

آذر ماه ۱۳۸۹

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد مهندسی برق به

دانشکده فنی و مهندسی

بخش مهندسی برق

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: سعید رادهوش

استادان راهنما: دکتر محمود سماوات- دکتر محمد علی ولی

استاد مشاور:

داور ۱: دکتر علی اکبر قره ویسی

داور ۲: دکتر محسن محمدیان

معاونت پژوهشی و تحصیلات تکمیلی یا نماینده دانشکده: دکتر مسعود رضا حسامی

حق چاپ محفوظ و مخصوص به دانشگاه شهید باهنر کرمان است.

تقدیم به :

این تلاش کوچک خود را تقدیم می‌کنم

به پدرومادر دلسوزم

و

خواهر مهربانم

تقدیر و تشکر:

سپاس خدای مهربان را به خاطر تمامی مهربانی هایش.

از زحمات استادان گرامی جناب آقای دکتر محمود سماوات و جناب آقای دکتر محمد علی ولی که در مدت انجام این پایان نامه با راهنمائیها ومشاوره های راهگشای خود، طی این مسیر را بر بنده هموار نمودند کمال تشکر را دارم و از حضرت حق برای این عزیزان آرزوی سلامتی، موفقیت و بهروزی روز افروزن را دارم. هم چنین از جناب آقای دکتر قره ویسی وجناب آقای دکترمحمدیان که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند تشکر می نمایم.

چکیده:

در سال های اخیر توابع و چند جمله ای های متعامد در حل مسائل مختلف مانند کنترل بهینه، تجزیه و تحلیل سیستم ها، شناسایی سیستم هاو... مورد توجه و استفاده قرار گرفته اند. هدف از استفاده از این توابع و چند جمله ای ها، تبدیل دینامیک سیستمهای مختلف به معادلات جبری می باشد.

در این پایان نامه کنترل بهینه سیستم های خطی متغیر با زمان با استفاده از عملگرهای انتگرال و حاصل ضرب موجک های لژندر و چبیشف انجام شده است.که در آن متغیر های حالت و بردار کنترل توسط موجک های لژندر و چبیشف با ضرایب مجهول بسط داده شده و ازآن برای محاسبه بردار کنترل بهینه و مسیر بهینه سیستم های خطی متغیر با زمان با تابع هزینه درجه ۲ استفاده شده است.

واژگان کلیدی: توابع متعامد، سیستمهای خطی متغیر با زمان،کنترل بهینه، ماتریس عملگر انتگرال، ماتریس عملگر حاصل ضرب، موجک لژندر، موجک چبیشف، تابع هزینه

فهرست مطالب

عنوان	صفحه

فصل ۳: توابع متعامد

فصل ۴:موجک ها

فهرست اشکال

صفحه	شکل

فهرست جداول

جدول	صفحه

فصل۱- مقدمه

۱-۱- مقدمه

کلمه موجک[1] ازلغت فرانسوی آندلیت[2] به معنای موج کوچک گرفته شده وبه نوع خاصی ازتوابع ریاضی اشاره می کندکه به طورخلاصه

- .هموار
- .موضعی
- .نوسانی

هستند.

اولین موجک ها دراواخردهه ۱۹۸۰کشف شدند. بسته به چگونگی تعریف این سه مشخصه اشکال مختلفی ازموجک ها به دست می آیند. به علاوه دربیشتراین موجک هاخواص دیگری مانندتقارن[3]، مشتق پذیری وهم چنین تعامدنیزوجوددارد. این ویژگی آخرخاصیت مهمی است زیراباستفاده ازانقباض وانتقال های مناسب برروی یک موجک می توان یک پایه متعامدی یکه به وجود آورد.

موجک ها تاکنون درزمینه های مختلفی ازعلوم مانندستاره شناسی، زمین شناسی، مهندسی برق، شیمی، پزشکی، زیست شناسی، تصویرشناسی وهیدرولوژی[4] به کارگرفته شده اند.

امروزه مسئله بهینه سازی[5] سیستم های مختلف یکی ازموضوعات مهم وموردتوجه می باشد. مسائلی مانند بیشینه سازی بردیک راکت، بیشینه سازی سودیک کاروکمینه سازی خطادرتخمین مکان یک شئ ازاین نوع هستند. جستجوبرای یافتن روشی که معیارهای موردنظراین سیستم هارا بیشینه یاکمینه کند، مسئله اساسی نظریه بهینه سازی است.

کنترل بهینه، دسته بسیارمهمی از مسائل کنترل هستند. یک مسئله کنترل معمولاًبه کمک دونوع متغیر، یعنی متغیرهای کنترل ومتغیرهای وضعیت بیان می شود. متغیرهای کنترل تکامل سیستم ازیک مرحله به مرحله بعدی راهدایت می کنندومتغیرهای وضعیت رفتارسیستم رادرهرمرحله توصیف می نمایند.

---

[1] Wavelet
[2] Ondelette
[3] Symmetry
[4] Hydrology
[5] Optimization

درعمل سه دسته ازاین نوع مسائل وجوددارد:

۱-تحلیل وبررسی سیستم ها

۲-شناسایی سیستم ها[1]

۳-کنترل بهینه[2] سیستم ها

درمسائلی که به تحلیل وبررسی سیستم ها مربوط می شوند، متغیرهای کنترل به عنوان پارامترهای ورودی درنظر گرفته شده ومتغیرهای وضعیت به دست می آیند.

درمسئله شناسایی سیستم ها، تعیین پارامترهای سیستم وقتی که ورودی وخروجی مشخص باشندموردنظراست.

امادرمسائل کنترل بهینه، متغیرهای کنترل و وضعیت هردومجهول هستندهدف این گونه مسائل تعیین سیگنال های کنترل وبه دنبال مسیرمتناظرباآن ها، به گونه ای است که درمحدودیت ها وقیودفیزیکی موجودصدق کرده ودرضمن تابع معیارموردنظرراحداقل یاحداکثرنماید. یکی ازروش هایی که می تواند برای حل مسائل کنترل بهینه مورداستفاده قرارگیردروش مستقیم است که مسئله کنترل بهینه را به یک مسئله بهینه سازی جبری تبدیل می کند.

ایده اصلی این روش عبارت است ازتبدیل مسئله به یک سیستم ازمعادلات جبری که حل آن به مراتب ساده ترازحل مسئله اصلی است.این روش برپایه تقریب متغیرهای وضعیت کنترل موجوددرمسئله برحسب بردارهای توابع پایه ای،

$$\Phi(t) = [\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}]^T$$

تبدیل معادلات دیفرانسیل به معادلات انتگرالی به واسطه عمل انتگرال گیری وسپس حذف نمودن عملگرهای انتگرال بااستفاده ازماتریس های عملیاتی انتگرال p ،استواراست.

توابع پایه ای $[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}]$ روی بازه معین $[t_0, t_f]$ هستندو p بستگی به انتخاب این توابع پایه دارد.

به طورکلی سه دسته ازمجموعه های توابع متعامدوجوددارندکه اغلب مورداستفاده قرارمی گیرند. اولین مجموعه شامل توابع پایه ای قطعه ای ثابت(PCBF) است(مانندوالش[3] وبلاک پالس[4])

[1] Optimal control
[2] System identification
[3] Walsh
[4] Block-pulse

دومین مجموعه عبارت است ازمجموعه های چندجمله ای متعامد(مانندچندجمله ایهای لاگر[1]،لژاندر[2]وچبیشف[3])

سومین مجموعه که اغلب هم مورداستفاده قرار می گیرد،مجموعه توابع سینوس-کسینوسی وسری های فوریه[4] است.

درحالی که چندجمله ای های متعامدوتوابع سینوسی-کسینوسی هردو یک کلاس از توابع پایه ای پیوسته هستند، توابع پایه ای قطعه ای ثابت دردامنه تعریف خوددارای ناپیوستگی های ذاتی ویابه عبارتی دارای جهش هستند.

شایان ذکر است که اگریک تابع ناپیوسته توسط یک پایه ازتوابع پیوسته تقریب زده شودنتیجه آن یک تابع پیوسته است وبنابراین، این تقریب نمی تواند یک مدل مناسب برای این توابع ناپیوسته باشد. بنابراین استفاده ازتوابع پایه ای قطعه ای ثابت دراین موارد مناسب تر است.

روش مستقیم می تواندبااستفاده ازهریک ازمجموعه های متعامدفوق درحل مسائل مختلف سیستم های دینامیکی به کارگرفته شود.

[1] Laguerre
[2] Legendre
[3] Chebyshev
[4] Fourier series

۱-۲- تاریخچه توابع متعامد

همواره در حل مسائل بزرگ تجزیه آن به قسمت‌های کوچک‌تر امری مطلوب بوده و تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها نیز از این امر مستثنی نبوده است. استفاده از توابع متعامد[1] از سال‌های بسیاردور برای تجزیه سیگنال‌ها رایج بوده است. ایده ی نمایش یک تابع برحسب مجموعه ی کاملی از توابع اولین بار توسط ژوزف فوریه[2]، ریاضیدان و فیزیکدان بین سال های ۱۸۰۶-۱۸۰۲ طی رساله ای در آکادمی علوم راجع به انتشار حرارت، برای نمایش توابع به کار گرفته شد. در واقع برای آنکه یک تابع $f(x)$ به شیوه ای ساده و فشرده نمایش داده شود فوریه اساساً ثابت کرد که می توان از محور هایی استفاده کرد که به کمک مجموعه ایی نامتناهی از توابع سینوس وار ساخته می شوند. به عبارت دیگر فوریه نشان داد که یک تابع $f(x)$ را می توان بوسیله ی حاصل جمع بی نهایت تابع سینوسی و کسینوسی به شکل $\sin(ax)$ و $\cos(ax)$ نمایش داد. پایه های فوریه بصورت ابزار هایی اساسی، با کاربردهای فوق العاده متواتر در علوم در آمده اند، زیرا برای نمایش انواع متعددی از توابع و در نتیجه کمیت های فیزیکی فراوان بکار می روند. با گذشت زمان ضعف پایه های فوریه نمایان شد مثلا دانشمندان پی بردند پایه های فوریه و نمایش توابع سینوس وار در مورد سیگنال های پیچیده نظری تصاویر، نه تنها ایده آل نیستند بلکه از شرایط مطلوب دورند، بعنوان مثال به شکل کارآمدی قادر به نمایش ساختارهای گذرا نظیر مرزهای موجود در تصاویر نیستند. همچنین آنها متوجه شدند تبدیل فوریه فقط برای توابع پایه مورد استفاده قرار می گیرد و برای توابع غیر پایه کار آمد نیست.(البته در سال ۱۹۴۶ با استفاده از توابع پنجره ای، که منجر به تبدیل فوریه ی پنجره ای شداین مشکل حل شد.)اگرچه امروزه شاید عمومی‌ترین روش تجزیه سیگنال‌ها استفاده از سری فوریه است ولیکن روش‌های بسیار مهم دیگری نیز وجود دارند که از جمله آن می‌توان توابع بسیار مفید لژاندر را نام برد که در اواخر قرن ۱۸ میلادی و به وسیله لژاندر ارائه گردیده است.

در واقع هدف استفاده از توابع متعامد ساده کردن مسئله به جزءهای کوچکتر است. بنابراین، این جزءهای کوچک باید شکل ساده‌ای داشته باشند تا نهایتاً حل آنها ساده باشد. نکته مهم دیگر این است که ترکیب این توابع پایه باید بتواند سیگنال مورد نظر را بخوبی پوشش دهد. مثلاً استفاده از توابع گسسته عمود بر هم مثل بلاک پالس سیگنال را تکه تکه تقریب میزند یا استفاده از سری فوریه برای تقریب سیگنالهایی که دارای شکستگی یا ناپیوستگی است، به خاطر متناوب و پیوسته

---

1 Orthogonal Functions
2 Joseph Fourier

بودن پایه هایش، فقط میتواند اختلاف انرژی سیگنال اصلی و سیگنال تقریب را به صفر برساند. بنابر این با توجه به شکل سیگنال اصلی و میزان دقت مورد نیاز و نوع کاربرد میتوان از توابع متعامد متفاوتی استفاده کرد.

تنوع توابع متعامد بسیار زیاد است، بطوری که می‌توان ثابت کرد که هر دسته از توابع مستقل را می‌توان بر هم عمود کرد. شاید بتوان گفت شکل پاسخ مورد انتظار، اساسی ترین موضوع در انتخاب تابع عمود بر هم است. ازاین رو چندجمله‌ای‌های متعامد گوناگونی در قرون ۱۸ و ۱۹ میلادی ارائه شده‌اند که از این دست می‌توان به چندجمله‌ای هرمیت[1] که در قرن ۱۹ توسط چالز هرمیت ارائه شده است اشاره کرد. ادموندلاگر تلاش کرد که یک چندجمله‌ای توانی واگرا را به یک سری توابع پیوسته همگرا بشکند که در این راه چندجمله‌ای متعامدی که امروزه با نام لاگر مشهور است، معرفی گردید.

قبلاً بیان شد که هدف از استفاده از توابع متعامد، تجزیه مسئله به جزءهای کوچکتر است تا حل مسئله ساده‌تر شود، در این راستا سری فوریه معرفی گردید. سری فوریه به دلیل سادگی ساختار پایه‌هایش بیشترین کاربرد را پیدا کرد. اگرچه تحلیل فوریه را به افراد زیادی نسبت میدهند و سابقه آن را به دوران بابلی‌ها نسبت می‌دهند، اما در تاریخچه جدید اولر[2] اولین کسی بود که در سال ۱۷۴۸ برای تحلیل حرکت تار مرتعش به نوعی از مفاهیم سری فوریه استفاده کرد، اگرچه درسال ۱۷۵۳ دی.برنولی[3] استدلال‌هایی فیزیکی کرد که همه حرکت‌های فیزیکی تار را میتوان با ترکیب-های خطی وجوه طبیعی نشان داد اما این استدلال را بر مبنای ریاضی دنبال نکرد. در سال ۱۷۵۹ جی.ال.لاگرانژ[4] استفاده از سری مثلثاتی برای مطالعه تارهای مرتعش را به باد انتقاد گرفت و می گفت سیگنالهای گوشه دار را نمیتوان با ترکیب توابع مثلثاتی نمایش داد. در واقع جی. ال. لاگرانژ همان چیزی را می‌گفت که برای انتخاب نوع تابع متعامد، در مورد آن بحث شد. نیم قرن بعد جوزف فوریه تلاشهایی برای به اثبات رساندن سری فوریه انجام داد و در سال ۱۸۰۷ چهار دانشمند بزرگ دنیا مامور بررسی مقاله او شدند که تنها یکی از این چهار دانشمند یعنی جی.ال.-لاگرانژ باز هم علی‌رغم موافقت سه نفر دیگر (اس.اف لاکرئا، جی.مونژ و پی.اس.لاپلاس[5]) از انتشار این مقاله جلوگیری کرد. فوریه، پس از چند بار تلاش دیگر برای قبولاندن مقاله خود به انستیتو دوفرانس و انتشار آن از سوی این موسسه، به نوشتن روایتی دیگر از مقاله خود اقدام کرد و

---
[1] Hermit
[2] Euler
[3] Bernoulli
[4] Lagrange
[5] Laplace

آن را به صورت کتابی "نظریه تحلیلی گرما" منتشر کرد [۱]. این کتاب ۱۵ سال بعد از اینکـه فوریـه برای اولین بار نتایج خود را به این موسسه ارائه کرده بود ، منتشر شد [۲].

در مسائل مهندسی مجموعه‌ای از توابع حقیقی وجود دارند که به صورت توابع پاره‌پاره پیوسته می‌باشند. خروجی رله‌ها، سیگنال‌های دیجیتال، مبدلهای آنالوگ به دیجیتال و از این قبیل دستگاهها، جزئی از این مجموعه می‌باشند. به منظور تحلیل این توابع، نوع دیگری از توابع متعامد با نام توابع متعامد ثابت قطعه‌ای تعریف شده است [۳]. این توابع در هر زیردورهٔ زمانی دارای مقدار ثابتی بوده که به همین علت این نام بر این نوع از توابع گذارده شده است. اولین تابع از این نوع در سال ۱۹۱۰ توسط هار[1] ارائه گردید که مجموعه‌ای از توابع پریودیک[2] و کامل می‌باشد و امروزه با نام هار معروف است. مجموعه دیگری از این کلاس در سال ۱۹۲۲ توسط رادماخر[3] ارائه گردید که البته این تابع متعامد از توابع متعامد کامل تشکیل نشده است. بنابراین والش در سال ۱۹۲۳ مجموعه کاملی از توابع متعامد را که توسط توابع رادماخر تولید می‌شوند و امروزه با نام توابع والش معروف هستند را ارائه کرد. نوع دیگری از توابع متعامد نیز وجود دارد که امروزه با نام توابع بلاک پالسی معروف می‌باشند. این توابع که استفاده از آنها از سایر توابع متعامد ثابت قطعه‌ای ساده‌تر می‌باشد، در حل بسیاری از مسائل مورد استفاده قرار گرفته‌اند [٤،٥] .

در سال ۱۹۷۳ کارینگتون کار بسیار با ارزشی کرد و نشان داد که معادلات انتگرالی را می‌توان با یک تقریب حداقل مربعات، بصورت معادلات جبری خطی درآورد. وی یک مجموعه از توابع والش را در نظر گرفت و از آنها بصورت تحلیلی انتگرال‌گیری کرد و نتایج را بطور تقریبی بصورت ترم‌هایی از توابع والش بسط داد. او اپراتور انتگرال را برای اولین بار معرفی کرد.

[1] Haar
[2] Periodic
[3] Radmakher

۱-۳- تاریخچه کنترل بهینه

یکی ازریشه دارترین روش های نظری درمهندسی کنترل،کنترل بهینه می باشد. تاریخچه ی آن به اواسط قرن گذشته برمی گرددکه همزمان باورود و پایه گذاری فضای حالت موردتوجه قرارگرفت.

بامطرح کردن مسئله ی کنترل بهینه درسال ۱۹۶۷میلادی ،اولین جرقه های حساب تغییرات[1] وبهینه سازی ریاضی باپاسخ های داده شده به آن مسأله، زده شد.درنیمه اول قرن بیستم، پیشرفتهای چشمگیری درزمینه مهندسی کنترل صورت پذیرفت. درسال۱۹۳۹شخصی به نام بوش[2] مسأله ضدهواپیمارامطرح ساخت. بین سالهای ۱۹۴۰تا۱۹۴۵طی جنگ جهانی دوم، موفقیت های قابل توجهی درزمینه هواپیماوسیستم کنترل آتش هواپیماحاصل شد [۶] .

کالمن[3] درسال ۱۹۶۰مفاهیم اساسی درفضای حالت رابیان کرد. کالمن توانست نشان دهدکه می نیمم کردن شاخص عملکردانتگرالی باتابع هزینه درجه دوم[4] توسط روش حساب تغییرات منجربه فیدبکی خطی ازحالت ها می گردد، به عبارت دیگر وی توانست مسأله رگولاتوردرجه دوم خطی رابافیدبک حالت[5] حل نمایدکه این روش بهLQRمعروف شد. ازدیگردستاوردهای کالمن،طراحی رویتگرها[6]برای تخمین متغیرحالت است که به آنLQEمطرح شد.

دهه ی ۱۹۵۰رادهه ی آغازمطالعات جدی درموردکنترل تطبیقی[7] می نامند، به عبارت دیگرطراحی پارامترهای کنترل کننده برای مقابله باسیستم های دینامیکی که پارامترهای متغیردارندرادراین حوزه موردمطالعه قراردادند [۷].

شبکه های عصبی[8] نیز درسال ۱۹۶۰پایه گذاری شدندودهه ی ۱۹۸۰به بعدبه عنوان کنترل کننده های عصبی به کارگرفته شدند.

درمیان این روشها بایستی به جایگاه ویژه منطق فازی[9] واثرآن بررروندطراحی سیستم های هوشمنداشاره کردو زاده[10] پدیدآورنده منطق فازی دراواخردهه ی ۱۹۵۰ ایده های اساسی

---

1 Calculus of variations
2 Bosch
3 Kalman
4 Quadratic performance
5 State feedback
6 Observer
7 Adaptive control
8 Neural networks
9 Logic fuzzy
10 Zadeh

خودرادرمنطق فازی عرضه کرد. درراستای تکامل و پردازش منطق فازی، تحول عظیم وبنیادی دردرک سیستم های پیچیده به وجودآورد.

دردهه ی ۱۹۹۰مبحث جدیدشناسایی مدل فازی مطرح شدکه براساس ساخت قواعدفازی برای کنترل سیستم هابامشاهده اوپراتورارائه گردید [۸] .

الگوریتم ژنتیک[1] یکی دیگرازروش های بهینه سازی هستندکه براساس نظریه تکامل داروین پایه ریزی شده اند. این روش ها که طی دهه ۱۹۹۰به کارگرفته شده اند،به هرتابع هزینه غیرخطی قابل اعمالند ومدعی اندکه درمینیمم های محلی گیر نمی کنند.

۱-۴-مروری بر کارهای انجام شده در زمینه سیستمهای متغیر با زمان

در زمینه سیستم های متغیر با زمان و با استفاده از توابع متعامد در چند دهه اخیر کارهای زیادی صورت گرفته است. در ادامه به تعدادی از توابع متعامد وکارهائی که با آنهادر زمینه سیستم های متغیر با زمان انجام گرفته است اشاره می گردد.

بلاک پالس [۱۰] ، تیلور [۱۱] ، لاگر [۱۲] ، والش [۱۳،۱۴] ، لژندر [۹،۱۵،۱۶]، چبیشف [۹،۱۷،۱۸،۱۹] ، فوریه [۲۰،۲۱] ، موجک هار [۲۲،۲۳] ، موجک لژندر [۲۴] ، توابع هیبرید[2] [۲۵،۲۶] .

۱-۵- اهداف و ساختار پایان نامه

هدف ، تحلیل وکنترل بهینه سیستمهای متغیربا زمان با استفاده از توابع متعامد است. در این راستا از موجک چبیشف و موجک لژندر استفاده شده است. برای این هدف ماتریسهای عملیاتی انتگرال و ماتریس های عملیاتی حاصلضرب برای این توابع بدست آورده شده است و سپس با جبری کردن معادلات و استفاده از این ماتریسها تحلیل وکنترل بهینه سیستم انجام گرفته است. ساختار فصل های پایان نامه را می توان بدین صورت بیان کرد :

فصل دوم:در این فصل ابتدا مقدمه ای در مورد کنترل بهینه بیان گردیده است، سپس مسئله کنترل بهینه مطرح شده است و سپس به لزومات مورد نیاز برای بیان یک مسئله کنترل بهینه پرداخته شده است.

[1] Genetic algorithm
[2] Hybrid function

فصل سوم: در این فصل توابع متعامد وخصوصیات منحصر بفرد آنها که موجب استفاده گسترده ازآنها شده است مورد بررسی قرار گرفته است. هم چنین طریقه تشکیل یکی از انواع توابع متعامد توضیح داده شده است .

فصل چهارم:در این فصل ابتدا تاریخچه ای از موجکها آورده شده است، سپس به بررسی موجک های لژندر و چبیشف و ماتریس های عملگر انتگرال و عملگر حاصل ضرب آنها پرداخته شده است و دو مثال برای پی بردن به قدرت موجک ها در تخمین توابع غیر خطی زده شده است.

فصل پنجم: در این فصل کنترل بهینه سیستم های خطی متغیر با زمان با استفاده از روش ریکاتی توضیح داده شده است. با استفاده از روش ریکاتی سیستم بر حسب معادلات حالت به یک دسته معادلات جبری خطی تبدیل می گردد که حل آن بسیار ساده تر از حل معادلات دیفرانسیل می باشد و دو مثال هم برای روشن شدن بحث آورده شده است.

فصل ششم: در این فصل آنالیز سیستم های خطی متغیر با زمان شرح داده شده است، سپس کنترل بهینه با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ بیان شده است و دو مثال هم برای روشن شدن بحث آورده شده است.

فصل هفتم:نتیجه گیری و ارائه پیشنهادات