بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

(گرایش محض )

پایان نامه کارشناسی ارشد

# نتایجی دربارهٔ فرایند نقطه‌ای پواسون

از

الهام دسترنج بلالمی



استاد راهنما

دکتر اصغر ورسه‌ای

شهریور ۸٦

تقدیم به کسانی که وجودشان سراپا نعمت است، پدر و مادر عزیزم.

# تقدیر و تشکر

شکر و سپاس فراوان، به عدد ستاره‌ی آسمان، و قطره‌ی باران، و ریگ بیابان، و ذره‌های زمین و آسمان، آن خدای را که یگانگی صفت او، و جلال، و عظمت، و مجد و بها خاصیت اوست و از کمال وی هیچ آفریده آگاه نیست، و جز وی هیچ کس را به حقیقت معرفت وی راه نیست.

برخود لازم می‌دانم از زحمات بزرگ مردی که همیشه در نظرم کوهی از ایثار و استقامت است، پدر عزیزم، و از زحمات اسوه‌ی فداکاری، مادر عزیزم، و خواهر و برادرم که همواره مشوق و حامی من بودند قدر دانی نمایم .
همچنین از استاد نخبه و دانشمندم جناب آقای دکتر اصغر ورسه‌ای، بزرگ مردی که در سرتاسر این پایان‌نامه با صبوری، و سعه‌ی صدر، و نبوغ خود مرا یاری دادند، کمال تشکر را دارم. گرچه هیچ‌گاه به خود جرأت نمی‌دهم که بگویم من متعلم خوبی بودم که توانسته از دریای بی‌کران علمش بهره‌ای وافر برده باشد، ولی درک محضر ایشان را همواره یکی از ذخائر گرانبهای عمر خودم که حاضر نیستم با هیچ چیز معاوضه کنم، می‌شمارم. همچنین از استاد ارجمندم جناب آقای حسین صمیمی و دوست عزیزم سرکار خانم مریم حسینی که در کنار آن بزرگوار مرا یاری دادند کمال تشکر را دارم.

از داوران گرامی ، جناب آقای دکتر بیژن ظهوری زنگنه و دکتر بهروز فتحی و ناظر محترم آقای دکترعباس سهله و اساتید محترم گروه ریاضی دانشکدهٔ علوم پایه کمال تشکر را دارم .

# فهرست مندرجات


چکیده فارسی ........ ج
چکیده انگلیسی ........ چ
مقدمه ........ ۱

فصل اول : مفاهیم آنالیز حقیقی ........ ۲
۱–۱ فضای اندازه ........ ۳
۱–۲ انتگرال نسبت به یک اندازه ........ ۹
۱–۳ فضاهای حاصلضربی ........ ۱۳
فصل دوم : مفاهیم نظریه‌ی احتمال ........ ۱۸
۲–۱ متغیر تصادفی ........ ۱۹
۲–۲ توزیع دو جمله‌ای و چند جمله‌ای ........ ۲۱
۲–۳ فرایند تصادفی ........ ۲۲
۲–۴ احتمال شرطی ........ ۲۳
۲–۵ امید ریاضی ........ ۲۳

فصل سوم : تعریف رایج فرایند نقطه‌ای پواسون و بیان مطالبی درباره‌ی آن ........ ۲۵
۳–۱ تعاریف و اصطلاحات ........ ۲۶
۳–۲ متغیر تصادفی پواسون و قضیه جمع پذیری شمارا ........ ۳۱
۳–۳ تعریف رایج فرایند نقطه‌ای پواسون ........ ۳۴
۳–۴ قضیه انطباق ........ ۳۶
۳–۵ قضیه وجودی فرایند نقطه‌ای پواسون ........ ۳۸

فصل چهارم : تعاریفی دیگر از فرایند نقطه‌ای پواسون و اثبات مطالبی درباره‌ی آنها ........ ۳۹

چند نتیجه‌ی مهم ........ ۵۱
واژه‌نامه ........ ۵۲
کتاب نامه ........ ۵۹

# چکیده

نتایجی درباره‌ی فرایند نقطه‌ای پواسون

الهام دسترنج بلالمی

در این پایان نامه پس از بررسی و مطالعه‌ی تعریف رایج فرایند نقطه‌ای پواسون، دو تعریف دیگر از آن را در فضای $\mathbb{R}^۲$ ارائه می‌دهیم و درادامه قضایا و نتایجی را درباره‌ی آن ثابت می‌کنیم.

کلید واژه : اندازه‌ی رادن، زیرمجموعه‌ی به‌طور موضعی متناهی، فرایند نقطه‌ای، فرایند نقطه‌ای پواسون.

## ABSTRACT :

*Title : SOME RESULTS ON POISSON POINT PROCESS*

*ELHAM DASTRANJ BALALAMI*

**In this dessertation, after investigating the common definition of Poisson point process, we will give tow other definitions of and based on them. We will prove some results. For the sake of tangibility we talk the basic space to be $\mathbf{R}^{۲}$,** *with lebesgue measure.*

**KEYWORDS :** RADON MEASURE, LOCALLY FINITE SUBSET, POINT PROCESS, POISSON POINT PROCESS.

## مقدمه

در تعریف رایج فرایند نقطه‌ای پواسون در $\mathbb{R}^2$ در منابع موجود، عموماً دو شرط قرارداد می‌شود. یکی شرط استقلال، بین متغیرهای تصادفی متناظر با مجموعه‌های بورل جدا از هم و دیگری اینکه متغیر تصادفی نظیر هر مجموعه‌بورل کراندار توزیع پواسون داشته باشد.

در تعریفی دیگر از فرایند نقطه‌ای پواسون که در این رساله به آن اشاره می‌شود، ابتدا شرط دوم از تعریف قبل را بدین صورت کاهش می‌دهیم که متغیر تصادفی نظیر هر دو مجموعه‌ی بورل هم‌اندازه، توزیع برابر داشته باشند و باز در تعریفی دیگر از این فرایند به جای بررسی شرایط روی مجموعه‌های بورل، شرایط را به اعضای افرازهایی که در این رساله تعریف می‌کنیم، محدود کرده، و بدین ترتیب با ضعیف تر کردن شرایط، همان نتایج را بدست می آوریم.

مطالب این رساله در ۴ فصل تنظیم شده‌است. فصل اول به مفاهیم و قضایای آنالیز حقیقی اختصاص یافته‌است. در فصل دوم به مفاهیم نظریه احتمال می‌پردازیم. در فصل سوم ابتدا تعاریف واصطلاحاتی آورده و قضایایی درارتباط با آنها بیان و اثبات شده و سپس تعریف رایج فرایند نقطه‌ای پواسون و قضایای مربوط به آن مورد بررسی قرار گرفته می‌شود. در فصل چهارم، دو تعریف دیگر از فرایند نقطه‌ای پواسون ارائه شده و سپس قضایا و نتایجی در ارتباط با آنها ثابت شده‌است.

# فصل ۱

# مفاهیم آنالیز حقیقی

## ۱—۱ فضاهای اندازه

**توجـــه.**

ممکن است تمام آن چه در این بخش می آید در فصل های آتی به کار نرود ، لیکن برای یاد آوری مطالب به خواننده خالی از فایده نیست .

**تعـــریف۱—۱—۱.** فرض می‌کنیم $X$ مجموعه‌ای نا تهی و $\mathcal{C}$ دسته‌ای ناتهی از زیرمجموعه های $X$ باشد.

۱) $\mathcal{C}$ را یک نیم حلقه (semiring) از زیرمجموعه های $X$ (در $X$ ) می گوئیم اگر $\mathcal{C}$ تحت اشتراک های متناهی بسته و تفاضل هر دو عضو $\mathcal{C}$ برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دو به دو مجزای $\mathcal{C}$ باشد.

۲) $\mathcal{C}$ را یک نیم میدان (semifield) می گوئیم اگر $\mathcal{C}$ تحت اشتراک های متناهی بسته و مکمل هر عضو برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دو به دو مجزای $\mathcal{C}$ باشد.

۳) $\mathcal{C}$ را یک $\sigma$ — میدان ($\sigma$ — field) می گوئیم اگر $\mathcal{C}$ تحت اجتماع های شمارش پذیر و مکمل بسته باشد.

**ملاحظات ۱—۱—۱.**

۱) دسته های گوناگون از بازه ها در $\mathbb{R}$ و حاصلضرب های دکارتی آنها در سایر فضاهای اقلیدسی الگوهای مناسبی برای نیم حلقه ها هستند . همچنین دسته های گوناگون از بازه ها وشعاع ها و حاصلضرب های دکارتی آنها و اجتماع های متناهی اینها ، الگوهای مناسبی برای ، به ترتیب ، نیم میدان ها و میدان ها هستند .

۲) اصولاً هر دسته‌ی ناتهی از مجموعه ها زمانی و تنها زمانی دارای کوچکترین عضو (مینیمم) بر حسب رابطه‌ی شمول است که اشتراک دسته ، عضو دسته باشد که در این صورت کوچکترین عضو دسته خواهد بود.

**تعـــریف۱—۱—۲.** تابعی را که دامنه‌ی آن دسته‌ای از مجموعه ها باشد یک « تابع مجموعه‌ای » می نامیم.

تعـــریف۱ــ۱ــ۳. فرض می کنیم $\mathcal{C}$ دسته‌ای ناتهی و دلخواه از مجموعه‌ها باشد.منظور از یک اندازه (measure) روی $\mathcal{C}$ (در $\mathcal{C}$) تابعی مانند $\mu$ با دامنه‌ی $\mathcal{C}$ است ، به طوریکه برای هر $A$ در $\mathcal{C}$، $۰ \leq \mu(A) \leq \infty$ و هرگاه $\{A_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای (متناهی یا نا متناهی) از اعضای دو به دومجزای $\mathcal{C}$ باشد ، به طوریکه $(\cup_{n=۱}^{\infty} A_n) \in \mathcal{C}$، آنگاه

$$\mu(\cup_{n=۱}^{\infty} A_n) = \sum_{n=۱}^{\infty} \mu(A_n) \,.$$

خاصیت اخیر را $\sigma$ ــ جمع پذیری ($\sigma$ ــ additivity) گوئیم.

تعـــــریف۱ــ۱ــ۴. فرض می کنیم $\mathcal{C}$ دسته‌ای دلخواه از زیرمجموعه های $X$ باشد. کوچکترین (برحسب رابطه‌ی شمول ) $\sigma$ــ میدان شامل $\mathcal{C}$ از زیرمجموعه های $X$ را $\sigma$ــ میدان تولید شده توسط $\mathcal{C}$ می‌نامیم و بصورت $\sigma(\mathcal{C})$ نشان می دهیم . توجه می کنیم که $\sigma(\mathcal{C})$ اشتراک تمام $\sigma$ ــ میدان های شامل $\mathcal{C}$ است.

تعـــــریف۱ــ۱ــ۵. فرض می کنیم $X = \mathbb{R}$ (یا $\mathbb{R}^n$) و $\mathcal{C}$ دسته‌ی تمام بازه‌ها باشد. $\sigma$ــ میدان تولید شده توسط $\mathcal{C}$ را بورل می‌گوئیم و با $\mathcal{B}$ نشان می‌دهیم. دسته‌ی تمام بازه‌های به‌صورت [a,b) یا [a,b] یا (a,b] یا (a,b) که درآن a,b اعداد گویا هستند و یا مجموعه‌ی شعاع‌هایی که سر عددی (یا انتهای عددی) آنها گویا باشد، جملگی مولد $\mathcal{B}$اند.

ملاحظه ۱ــ۱ــ۲. به طور کلی در یک فضای توپولوژیک که تعریف آن در فصل ۳ خواهد آمد، $\sigma$ــ میدان تولید شده توسط مجموعه های باز ، $\sigma$ــ میدان بورل نامیده می شود .

تعـــــریف۱ــ۱ــ٦. فرض می کنیم $\mathcal{C}$ سازه ای ( نیم حلقه ، نیم میدان ، $\sigma$ ــ میدان ) از زیرمجموعه‌های $X$ و $\mu$ اندازه ای روی $\mathcal{C}$ باشد. اندازه‌ی $\mu$ را روی $\mathcal{C}$ « متناهی » گوئیم ، هرگاه برای هر $A$ در $\mathcal{C}$ ، $\mu(A) < \infty$ و $\sigma$ ــ متناهی ($\sigma$ ــ finite) می گوئیم ، هرگاه دنباله‌ای مانند $\{A_n, n \geq ۱\}$ از اعضای $\mathcal{C}$ وجود داشته باشد به طوریکه $X = \cup_{n=۱}^{\infty} A_n$ و برای هر $n$ ، $\mu(A_n) < \infty$ .

توجه می کنیم که شرط دو به دو مجزا بودن $A_n$ ها ، $n \geq ۱$ ، تعریفی معادل بدست می دهد .

تعـــــریف۱ــ۱ــ۷. فرض می کنیم $\mathcal{H}$ نیم حلقه ای از زیرمجموعه های $X$ باشد که پوشش شمارش‌پذیری برای $X$ داشته باشد و فرض می کنیم $\mu$ یک اندازه در $\mathcal{H}$ باشد .

برای یک زیرمجموعه ی دلخواه $A$ از $X$ اندازه ی خارجی تعریف می شود :

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i\geq ۱} \mu(A_i) : \text{ پوششی از اعضای دو به دو مجزای } \mathcal{H} \text{ برای } A \text{ است } \{A_i, i \geq ۱\} \right\} .$$

**ملاحظات ۱—۱—۳.**

۱) برای $I \in \mathcal{H}$ ، $\mu^*(I) = \mu(I)$ .

۲) اگر $\{A_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای دلخواه از زیرمجموعه های $X$ باشد ، آنگاه $\mu^*(\cup_{n\geq ۱} A_n) \leq \sum_{n\geq ۱} \mu^*(A_n)$ .

**بــــرهان .** به [۲] رجوع کنید.

**تعـــــریف۱—۱—۸.** زیرمجموعه ی $A$ از $X$ را نسبت به $\mu^*$ ( یا $\mu$ ) اندازه پذیر گوئیم ، اگر برای هر $I$ در $\mathcal{H}$ داشته باشیم :

$$\mu(I) = \mu^*(I \cap A) + \mu^*(I - A) .$$

**ملاحظه ۱—۱—۴.** اگر $A$ اندازه پذیر باشد ، آنگاه برای زیر مجموعه‌ی دلخواه $B$ از $X$ ،

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B - A) .$$

**بــــرهان .** به [۲] رجوع کنید.

**قـضیـــــه ۱—۱—۱ .** با داده‌های تعریف ۱—۱—۸، دسته‌ی مجموعه‌های اندازه‌پذیر نسبت به $\mu$ یک $\sigma-$ میدان در $X$ شامل $\mathcal{H}$ و $\mu^*$ یک اندازه روی این $\sigma-$ میدان است، تحدید $\mu^*$ به $\mathcal{H}$ برابر با $\mu$ است.

**بــــرهان .** به [۲] رجوع کنید.

**قضیـــــه ۱—۱—۲** «قضیه گسترش کاراتئودوری» (Caratheodory Extension Theorem).

اگر $\mathcal{H}$ نیم حلقه ای از زیرمجموعه های $X$ ، $\mu$ یک اندازه در $\mathcal{H}$ باشد به طوریکه تعداد شمارش پذیر از اعضای $\mathcal{H}$ بااندازه‌ی متناهی ، $X$ را بپوشانند ، آنگاه $\mu$ ، گسترشی یگانه به یک اندازه روی $\sigma$ — میدان تولیدشده توسط $\mathcal{H}$ در $X$ دارد .

برهان . به [۲] رجوع کنید.

تعریف ۱—۱—۹. اگر $X=\mathbb{R}$ ( یا $\mathbb{R}^n$ ) و $\mathcal{H}$ مجموعه‌ی بازه ها ( یا جعبه ها ) و $\mu$ تابع طول ( یا تابع حجم ) باشد ، زیرمجموعه های اندازه پذیر $\mathbb{R}$ ( یا $\mathbb{R}^n$ ) نسبت به $\mu^*$ ( بر اساس تعریف ۱—۱—۸ ) اصطلاحاً « اندازه پذیر لبگ » نامیده می شود و دسته‌ی چنین مجموعه هایی را « $\sigma$ — میدان لبگ » می نامیم.

تعریف ۱—۱—۱۰. منظور از یک فضای اندازه پذیر (measurable space) ، یک زوج $(X,\mathcal{A})$ متشکل از یک مجموعه مانند $X$ و $\sigma$ — میدان $\mathcal{A}$ ، از زیرمجموعه های $X$ می باشد. هر عضو $\mathcal{A}$ را یک «مجموعه‌ی اندازه پذیر» می نامیم.

تعریف ۱—۱—۱۱. منظور از یک « فضای اندازه » عبارت است از : سه تایی $(X,\mathcal{A},\mu)$ که $(X,\mathcal{A})$ یک فضای اندازه پذیر و $\mu$ یک اندازه روی $\sigma$ — میدان $\mathcal{A}$ است.

قضیه ۱—۱—۳. اگر $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه و $\{A_n, n\geq ۱\}$ یک دنباله‌ی صعودی از مجموعه های اندازه پذیر باشد ، آنگاه

$$\mu(\cup_{n=۱}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)\ .$$

برهان . به [۲] رجوع کنید.

قضیه ۱—۱—۴. اگر $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه و $\{A_n, n\geq ۱\}$ یک دنباله‌ی نزولی نامتناهی از مجموعه‌های اندازه پذیر باشد به طوریکه $\mu(A_۱)<\infty$ ، در این صورت داریم :

$$\mu(\cap_{n=۱}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)\ .$$

برهان . به [۲] رجوع کنید.

ملاحظه ۱—۱—۴. بدون شرط $\mu(A_۱)<\infty$ در قضیه بالا ، ممکن است حکم برقرار نباشد . به‌طورمثال اگر فضای اندازه ی $(\mathbb{R},\mathcal{B},m)$ که در آن $m$ اندازه‌ی لبگ است را در نظر بگیریم ، در این صورت دنباله‌ی

$\{A_n = [n, \infty), n \geq 1\}$ ، یک دنباله‌ی نزولی از مجموعه‌های اندازه پذیر خواهد بود به طوری که $m(A_1) = \infty$ و خواهیم داشت :

$$0 = m(\phi) = m(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) \neq \lim_{n\to\infty} m(A_n) = \infty.$$

**تعـــریف ۱—۱—۱۲.** فرض می کنیم $(X, \mathcal{A})$ و $(Y, \mathcal{A}')$ فضاهای اندازه‌پذیر باشند و $f\ : X \to Y$ .$f$ را اندازه پذیر(نسبت به $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}'$) گویند، اگر $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ برای $A' \in \mathcal{A}'$.

پس از این هرگاه $\sigma$— میدان های مفروض مشخص باشند و نیاز به تصریح نباشد، به‌طور ساده $f$ را اندازه‌پذیر می گوئیم، هرگاه شرط یاد شده برقرار باشد.

**ملاحظه ۱—۱—۵.** فرض کنید $X$ و $Y$ مجموعه های ناتهی باشند و $f : X \to Y$. اگر $\mathcal{A}$ یک $\sigma$— میدان در $X$ باشد، $f$ به صورت طبیعی متناظر با $\mathcal{A}$، $\sigma$— میدانی در $Y$ القاء می کند:

$$\mathcal{A}' = \{A' \subseteq Y \ ;\ f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}\ .$$

$\mathcal{A}'$ که بدین ترتیب تعریف می شود ، بزرگترین (ظریفترین ) $\sigma$ — میدان در $Y$ است که $f$ را اندازه پذیر می‌کند. همچنین اگر $\mathcal{A}'$ ، $\sigma$ — میدانی در $Y$ باشد ،

$$\mathcal{A} = \{f^{-1}(A')\ : A' \in \mathcal{A}'\}$$

یک $\sigma$ — میدان در $X$ است و کوچکترین ( درشت ترین ) $\sigma$ — میدان در $X$ است که $f$ را اندازه‌پذیر می کند .

**توجه ۱—۱—۱.** فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه ، $(Y, \mathcal{A}')$ یک فضای اندازه پذیر و $f : X \to Y$ تابعی اندازه پذیر باشد . بدین ترتیب به صورتی طبیعی اندازه‌ای در $\mathcal{B}$ توسط $\mu$ و $f$ القاء می شود که اگر آن را $\nu$ بنامیم ، خواهیم داشت :

$$\nu(A') = \mu(f^{-1}(A')) \qquad , \qquad \forall A' \in \mathcal{A}'\ .$$

**تعـــریف ۱—۱—۱۳.** فرض می کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد . $x \in X$ را یک «اتم» می گوئیم هرگاه $\{x\} \in \mathcal{A}$ و $\mu(\{x\}) > 0$ . هم چنین $\mu(\{x\})$ را اندازه ی اتم $\{x\}$ می نامیم.

$\mu$ را گسسته (یا اتمی) گوئیم ، اگر تعدادی شمارش پذیر اتم داشته باشد و توسط مجموعه‌ی اتم هایش حمل شود . یعنی اگر $A$ مجموعه‌ی اتم های $\mu$ باشد ، در این صورت داشته باشیم $\mu(X-A)=0$.

**تعـــریف ۱—۱—۱۴.** فرض می کنیم $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه باشد . $\mu$ را پیوسته می گوئیم ، هرگاه فاقد اتم باشد .

**تعـــریف ۱—۱—۱۵.** فرض می کنیم $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه و $\mu$ و $\nu$ دو اندازه روی $\mathcal{A}$ باشند. می‌گوئیم $\nu$ نسبت به $\mu$ پیوسته‌ی مطلق (absolutely continuous) است و می نویسیم $\nu \ll \mu$ ، اگر برای هر $A$ی اندازه پذیر که $\mu(A)=0$ ، داشته باشیم $\nu(A)=0$ .

**ملاحظه ۱—۱—۶.** هنگامی که $\mathbb{R}$ را به عنوان فضای اندازه‌پذیر معرفی می کنیم ، $\sigma-$ میدان مفروض ، $\sigma-$ میدان بورل خواهد بود مگر اینکه خلاف آن ذکر شود.

**تعـــریف ۱—۱—۱۶.** فرض می کنیم $f$ تابعی از فضای اندازه پذیر $(X,\mathcal{A})$ به $\mathbb{R}$ باشد ، $f$ را تابع بورل گوئیم هرگاه $f$ نسبت به $\mathcal{A}$ و $\sigma-$ میدان بورل اندازه پذیر باشد.

**ملاحظه ۱—۱—۷.** اگر $\mathcal{C}$ دسته‌ای از زیر مجموعه های $\mathbb{R}$ و مولد $\mathcal{B}$ باشد ، تعریف فوق معادل است با اینکه $f^{-1}(B)\in\mathcal{A}$ ، برای هر $B\subseteq\mathbb{R}$ در $\mathcal{C}$ ، ( به عبارت دیگر $f^{-1}(\mathcal{C})\subseteq\mathcal{A}$ ) .

**قـضیـــه ۱—۱—۶.** مجموع ، تفاضل ، حاصلضرب و خارج قسمت دو تابع اندازه پذیر ، در مورد آخر در صورتی که مخرج مخالف صفرباشد ، اندازه پذیرند . در نتیجه توابعی از قبیل چند جمله‌ای اندازه پذیرند .

**بـــرهان .** به [۲] رجوع کنید.

**ملاحظه ۱—۱—۸.** اگر $f$ تابعی حقیقی و پیوسته باشد ، در این صورت $f$ اندازه پذیر خواهد بود .

**بـــرهان .** به [۲] رجوع کنید.

**قـضیـــه ۱—۱—۷.** اگر $\{f_n, n\geq 1\}$ دنباله ای از تابع های حقیقی یا حقیقی گسترش یافته و اندازه پذیر روی فضای اندازه پذیر $(X,\mathcal{A})$ باشد ، آنگاه تابع های $\max_{1\leq n\leq k} f_n$ و $\min_{1\leq n\leq k} f_n$ در صورت متناهی بودن دنباله ، یعنی $k<\infty$ ، و $\sup f_n$ ، $\inf f_n$ ، $\liminf_{n\to\infty} f_n$ و $\limsup_{n\to\infty} f_n$ در صورت نامتناهی بودن دنباله اندازه پذیرند.

بـــرهان . به [۲] رجوع کنید.

ملاحظه۱—۱—۹. می گوئیم خاصیتی که برای تمام اعضای فضای اندازه ی $X$ تعریف شده است ، تقریباً همه جا (almost everywhere or a.e.) برقرار است ، اگر و تنها اگر مجموعه‌ی نقاطی که دارای آن خاصیت نیستند ، اندازه پذیر و دارای اندازه ی صفر باشند.

## ۱—۲ انتگرال نسبت به یک اندازه

تعـــریف۱—۲—۱. اگر $A$ مجموعه ای دلخواه از $\sigma$ — میدان $\mathcal{A}$ باشد ، تابع مشخصه‌ی مجموعه ی $A$ را با عبارت $\chi_A$ یا $I_A$ نشان می دهیم و به صورت $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$ تعریف می کنیم .

تعـــریف۱—۲—۲. تابع ساده (simple function) به تابعی با دامنه‌ی دلخواه و مقادیر حقیقی می گوئیم، که تعدادی متناهی مقدار داشته باشد. فرض می کنیم $\varphi$ تابعی ساده روی فضای اندازه ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ با مقادیر متمایز $a_1, a_2, ..., a_n$ باشد . می توان نوشت $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$ که در آن $A_i = \{x \in X : \varphi(x) = a_i\}$ ، روشن است که $A_i$ هامجزا هستند .

اندازه پذیری $\varphi$ معادل است با اینکه بگوئیم مجموعه های $A_i$ اندازه پذیرند ( متعلق به $\mathcal{A}$ اند ) . مجموع، تفاضل و حاصلضرب توابع ساده ، ساده است . به شرط آنکه $\infty - \infty$ پدید نیاید .

مجموع توابع ساده حقیقی ، با دامنه‌ی مشترک یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است . انتگرال $\varphi$ نسبت به اندازه‌ی $\mu$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i) \ .$$

قرار داد می کنیم $0 \times \infty = 0$ .

تعـــریف۱—۲—۳. فرض می کنیم $\varphi$ تابعی ساده روی فضای اندازه $(X, \mathcal{A}, \mu)$ باشد ( برای $A \in \mathcal{A}$ ، $\varphi\chi_A$ نیز یک تابع ساده می باشد ) . انتگرال $\varphi$ روی $A$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\int_A \varphi d\mu = \int \varphi\chi_A d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i \cap A) \ .$$

تعـــریف۱—۲—۴. فرض می کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و $f$ تابعی اندازه پذیر و نامنفی باشد . انتگرال $f$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\int_A f d\mu = \sup\left\{\int \varphi d\mu : \varphi \leq f \text{ ساده و نامنفی است و } \varphi\right\} .$$

قضییـــه۱—۲—۱«قضیه همگرائی یکنوا» (Monoton Convergenc Theorem).

اگر $f_1, f_2, \cdots$ دنباله‌ای از تابع های اندازه پذیر، نامنفی و صعودی باشند و $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ ، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu .$$

بـــرهان . به [۲] رجوع کنید.

قـضیـــه ۱—۲—۲. فرض می کنیم $f$ ، تابعی اندازه پذیر و نامنفی روی $X$ باشد و $A_1, A_2, \cdots$ دنباله‌ای از اعضاء دو به دو مجزای $\mathcal{A}$ باشد، با فرض $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ خواهیم داشت :

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{A_i} f d\mu .$$

بـــرهان . به [۲] رجوع کنید.

ملاحظه۱—۲—۱. قضییه‌ی فوق در صورت نزولی بودن دنباله یا برداشتن قید نامنفی بودن ، ممکن است درست نباشد . به طور مثال اگر $f_n = \chi_{(n,\infty)}$ ، $n \geq 1$ ، در این صورت $\int f_n d\mu = \infty$ ، برای $n \geq 1$ ، و

$$0 = \int f d\mu \neq \lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu = \infty .$$

تعـــریف۱—۲—۵. یک تابع اندازه پذیر نامنفی $f$ را روی مجموعه ی اندازه پذیر $A$ « انتگرال پذیر » می گوئیم ، هرگاه

$$\int_A f d\mu < \infty .$$

تعـــریف۱ــ۲ــ۶. اگر $a$ عددی حقیقی باشد ، تعریف می کنیم :

$$a^+ = \max\{a, \circ\} \qquad , \qquad a^- = \max\{-a, \circ\}$$
$$a = a^+ - a^- \qquad , \qquad |a| = a^+ + a^- .$$

اگر $f$ تابعی حقیقی با دامنه‌ی دلخواه باشد، متناظر با $f$، تابعهای $f^-$ و $f^+$، برای هر $x$ از دامنه‌ی $f$، را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f^-(x) = max\{-f(x), \circ\} \qquad , \qquad f^+(x) = max\{f(x), \circ\} .$$

$f^+$ ، $f^-$ را به ترتیب جزء مثبت (positive part) و جزء منفی (negative part) $f$ می نامیم . در این صورت $f = f^+ - f^-$ ، یعنی هر تابع اندازه پذیر را می توان به صورت تفاضل دو تابع اندازه پذیر نامنفی نوشت. همچنین داریم: $|f| = f^+ + f^-$ و $(-f)^+ = f^-$. روشن است که اگر $f$ اندازه پذیر باشد، آنگاه $f^+$ و $f^-$، نیز اندازه پذیرند.

تعـــریف۱ــ۲ــ۷. فرض می کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد . تابع اندازه پذیر $f$ را که روی $X$ تعریف شده است انتگرال پذیر می گوئیم ، هرگاه $\int f^+$ یا $\int f^-$ متناهی باشند. ولی بر پایه‌ی رسم متعارف $f$ را انتگرال پذیر تعریف می‌کنیم هرگاه $\int f^+$ یا $\int f^-$ متناهی باشند. در این صورت

$$\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^- d\mu .$$

نماد گذاری.

فرض می کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و $f$ تابعی اندازه پذیر روی $X$ باشد . برای $A \in \mathcal{A}$ داریم :

$$\int_A f d\mu = \int_A f(x) d\mu = \int_A f d\mu(x) = \int_A f(x) d\mu(x) .$$

روشن است که $f$ دارای انتگرال متناهی است اگر و فقط اگر $|f|$ دارای انتگرال متناهی باشد . همچنین

$$|\int f| \leq \int |f| .$$

قضیـــه۱ــ۲ــ۳«قضیه همگرایی تسلطی» (Dominated Convergence Theorem).

اگر $\{f_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر، $g$ تابعی نامنفی و انتگرال‌پذیر روی فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ باشد به‌طوریکه برای هر $n \geq ۱$، $|f_n| \leq g \ a.e.$ و $f_n \to f \ a.e.$ آنگاه $f$ و $f_n$ها انتگرال‌پذیرند و $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

**برهان .** به [۴] رجوع کنید.

**قضیه ۱—۲—۴** «قضیه تغییر متغیر» (Chang Of Variables Theorem).

فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و $(Y, \mathcal{A}')$ یک فضای اندازه پذیر و $f : X \to Y$ تابعی اندازه پذیر نسبت به $\mathcal{A}', \mathcal{A}$ و $\nu$ اندازه القاء شده در $\mathcal{A}'$ توسط $\mu$ و $f$ باشد ( یعنی $\nu(A') = \mu(f^{-۱}(A'))$ ، $A' \in \mathcal{A}'$ ) و $g : Y \to \mathbb{R}$. اگر $g$ اندازه پذیر باشد ، $gof : X \to \mathbb{R}$ نیز اندازه پذیر است . اگر $g$ انتگرال پذیر با انتگرال متناهی باشد ، $gof$ نیز چنین است و

$$\int_Y g(y)\nu(dy) = \int_X g(f(x))\mu(dx) \ .$$

**برهان .** به [۴] رجوع کنید.

**قضیه ۱—۲—۵** «قضیه رادن — نیکودیم» (Radon-Nikodym Theorem).

فرض کنید $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه پذیر باشد و $\nu, \mu$ اندازه‌های $\sigma$ — متناهی روی $\mathcal{A}$ باشند و $\nu \ll \mu$ . در این صورت تابع اندازه پذیر نامنفی $f_\circ$ وجود دارد به طوری که $\int_A f_\circ d\mu = \nu(A)$ برای هر $A$ در $\mathcal{A}$ . اگر $g$ تابع اندازه پذیر نا منفی دیگری با خاصیت مذکور باشد ، آنگاه $g = f_\circ \ , \ \mu - a.e.$ .

**برهان .** به [۴] رجوع کنید.

**تعریف ۱—۲—۸.** هر تابع مانند $f_\circ$ در قضیه‌ی فوق ، را یک مشتق رادن — نیکودیم $\nu$ نسبت به $\mu$ می‌گویند و با نماد عمومی $\frac{d\nu}{d\mu}$ یا $\frac{\nu(dx)}{\mu(dx)}$ نشان می دهند . گاه برای نمایش اینکه $\nu \ll \mu$ و $f_\circ$ یک مشتق رادن— نیکودیم $\nu$ نسبت به $\mu$ است ، از عبارت $\nu(dx) = f_\circ(x)\mu(dx)$ استفاده می شود .

**قضیه ۱—۲—۶.** اگر $f$ تابعی اندازه‌پذیر و نامنفی روی فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ باشد، در این