بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

گرایش ریاضی کاربردی

عنوان

مسئله‌ی اشتورم-لیوویل کسری

پژوهشگر

صفورا شاهینی شمس آبادی

استاد راهنما

دکتر علیرضا انصاری

استاد مشاور

دکتر محمدرضا احمدی دارانی

مهر ۱۳۹۳

با سپاس از همه ی عزیزانی که در این راه همراهم بودند، پدر و مادر عزیزم که سرچشمه ی محبت اند و حضور گرمشان بهترین پشتیبان است

و همسر خوبم که با محبت همواره مشوقم بوده است.

این مجموعه را به دختر عزیزم تقدیم می کنم.

ای یزدان پاک تو را سپاس می گویم،
که به حکمت بی انتهایت مرا یاری کردی،
و به رحمت نعمتهایت را بر من تمام کردی،
خانواده ای خوب به من عطا کردی که در هر حال پشتیبانی ام کنند و استادانی سر راهم نهادی تا دانش و علمشان را بی ریا در اختیارم بگذارند.

بر خود لازم می دانم از همه عزیزانی که در جهت به سرانجام رساندن این رساله مرا یاری نمودند، قدردانی نمایم. مراتب قدردانی و سپاس خود را از زحمات بی دریغ استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر علیرضا انصاری ابراز می نمایم. و از آقای دکتر محمدرضا احمدی دارانی مشاور گرانقدر همچنین از آقایان دکتر مهدی قاسمی و دکتر وحدتی که داوری این رساله را بر عهده داشتند، قدردانی می نمایم.

با آرزوی موفقیت برای تمام عزیزان که در این راه یاریم نمودند
صفورا شاهینی
مهر ۱۳۹۳

چکیده

در این رساله ابتدا به معرفی عملگر خود الحاق L می‌پردازیم که به صورت

$$L = \frac{d}{dx}(p(x)\frac{d}{dx}) + r(x),$$

مشخص می‌شود، و مسئله مقدار ویژه

$$Lu + \lambda\rho(x)u = 0, \quad x \in (a, b), \tag{۱}$$

با شرایط مرزی مجزا

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0,$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \quad |\beta_1| + |\beta_2| > 0.$$

را مسئله‌ی اشتورم-لیوویل نامیده و آن را به دو صورت منظم و منفرد مورد بررسی قرار می‌دهیم. ثابت می‌کنیم که اگر مقادیر ویژه از این معادله وجود داشته باشد،حقیقی‌اند و توابع ویژه متناظر با هر مقدار ویژه‌ی حقیقی متعامدند. این مطلب را برای مسائل اشتورم-لیوویل کسری، که در آن از عملگرهای کسری استفاده شده تعمیم می‌دهیم. هم‌چنین تبدیلات انتگرال متناهی را معرفی کرده وتبدیلات انتگرال متناهی اشتورم-لیوویل، فوریه، هنکل و لژاندر را مطرح می‌کنیم و معکوس آن‌ها را با استفاده از نظریه‌ی سری فوریه به‌دست می‌آوریم. لازم به ذکر است که این تبدیلات متناهی در حل مسائل مقدار مرزی بسیار مفید واقع می‌شوند.

کلمات کلیدی : مسئله‌ی اشتورم-لیوویل کسری، تبدیلات متناهی، تبدیل متناهی اشتورم-لیوویل، تبدیل متناهی فوریه، تبدیل متناهی لژاندر، تبدیل متناهی هنکل، معادله لژاندر کسری.

فهرست مطالب

مقدمه ۳

فهرست نمادها ۶

۱ مسائل اشتورم-لیوویل ۸

۱.۱ عملگرخودالحاق ۹

۲.۱ مسئله‌ی اشتورم-لیوویل ۱۰

۳.۱ وجود توابع ویژه ۱۲

۴.۱ مسئله‌ی اشتورم-لیوویل منفرد ۱۶

۲ تبدیل‌های متناهی ۱۹

۱.۲ تبدیل های متناهی اشتورم-لیوویل ۲۰

۲.۲ توسعه تبدیل‌های فوریه‌ی متناهی ۲۴

۳.۲ تبدیل متناهی هنکل ۲۷

۴.۲ تبدیل لژاندر متناهی ۳۵

۳ مسئله اشتورم-لیوویل کسری ۴۱

۱.۳ تعاریف و ویژگی‌ها ۴۲

۲.۳ مسائل اشتورم-لیوویل کسری ۴۵

۳.۳ معادله لژاندر کسری: ۵۷

۴.۳ تبدیل انتگرال لژاندر ۶۱

۵.۳ کاربردی از چند جمله‌ای‌های لژاندر در جواب مسئله‌ی وردشی معین ۶۳

۶.۳ کاربردی از چند جمله‌ای‌های لژاندر و مسئله‌ی انتشار کسری همراه با متغیرهای انتشار ۶۵

۷.۳ بازتاب تقارن مسئله‌ی انتشار کسری با متغیر انتشار ۶۶

مراجع ۶۸

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۶۹

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۷۱

Abstract ۷۴

مقدمه

در این پایان‌نامه مدل کسری مسئله اشتورم-لیوویل با استفاده از عملگرهای مختلف کسری را نشان می‌دهیم. هم‌چنین به تبدیلات انتگرال با دامنه‌ی متناهی مانند تبدیل‌های اشتورم-لیوویل ، فوریه، هنکل و لژاندر متناهی می‌پردازیم. تبدیل‌های انتگرال ابزاری شناخته شده برای حل معادلات دیفرانسیل عادی و جزئی و معادلات انتگرال می‌باشند. تبدیل‌های انتگرال علاوه بر اهمیت نظری فوق العاده‌ی آن برای ریاضیدانان، راهنمای مؤثر و ساده‌ای برای حل طیف گسترده‌تری از مسائل موجود در علوم فیزیک و مهندسی ارائه می‌کند. به‌طور کلی مسئله‌ای که مشتق در بر دارد را می‌توان با اعمال تبدیل انتگرال به مسئله‌ی ساده‌تر که فقط از ضرب چندجمله‌ای‌ها در متغیر تبدیل تشکیل شده، کاهش می‌دهیم سپس مسئله را در دامنه‌ی تبدیل حل می‌کنیم و آن‌گاه تبدیل معکوس آن را می‌یابیم.

فصل اول این پایان‌نامه توضیح مختصری از مسایل اشتورم-لیوویل و عملگر خود الحاق است. در فصل دوم به تبدیلات انتگرال متناهی می‌پردازیم. برای به کار بردن تبدیل‌های انتگرال در مورد مسائلی با دامنه‌ی متناهی لازم است که حدود انتگرال تبدیل متناهی باشد، بنابراین این نوع تبدیل‌ها را انتگرال متناهی می‌نامیم که این تبدیلات در به‌دست آوردن جواب برخی از مسائل مقدار مرزی مفید واقع می‌شود و البته کاربردهای دیگری نیز دارند. برای نمونه مسائل اشتورم-لیوویل روشی مستقیم برای تعیین یک تبدیل انتگرال خطی مناسب، در حل یک مسئله مقدار مرزی داده شده فراهم می کند. تبدیل‌های کسینوسی و سینوسی فوریه‌ی متناهی حالت‌های خاص آن هستند. در چنین مواقعی تبدیل انتگرال، فرم کلی

$$F(n) = \int_a^b r(x)\phi_n(x)f(x)dx, \qquad n = ۱, ۲, \dots,$$

را به خود می‌گیرید که در آن $r(x)$ تابع وزن و $F(n)$ را تبدیل اشتورم-لیوویل تابع $f(x)$ و $k(x,n) = r(x)\phi_n(x)$ را هسته‌ی تبدیل می‌گویند. در مورد دیگر می‌توان به تبدیل‌های فوریه‌ی متناهی تعمیم یافته اشاره کرد که پس از تبدیل فوریه متناهی از پر کاربردترین تبدیل‌ها هستند و این تبدیل‌ها به مسائل اشتورم-لیوویل وابسته می‌باشند.

تبدیل دیگری که به آن اشاره می‌کنیم، تبدیل هنکل متناهی است که شش مورد از موارد خاص آن را بررسی می‌کنیم که این تبدیل در حل مسائل مقدار مرزی فرمول‌بندی شده در مختصات استوانه‌ای به‌طور طبیعی ظاهر می‌شود. این تبدیل در کاربردهای دیگری مانند تعیین نوسانات یک زنجیر آویزان ظاهر می‌گردد. شایان ذکر است که این تبدیل حالت خاصی از تبدیل کلی اشتورم-لیوویل است [۱۷]. در فصل سوم به مسائل اشتورم-لیوویل می‌پردازیم که این مسائل نقش مهمی در بسیاری از عرصه‌های

علمی، مهندسی و ریاضیات ایفا می‌کنند. این مسائل برای اولین بار در حدود ۱۷۰ سال پیش معرفی شدند [۴]. پس از آن مقالات و کتاب‌های زیادی با تمرکز بر این موضوع و موضوعات مرتبط نوشته شده و هنوز هم تحقیقات بسیاری بر روی این رشته انجام می‌شود.

یک شکل استاندارد از معادلات دیفرانسیل اشتورم-لیوویل (به اختصار SL) بدین گونه است:

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y=\lambda w(x)y,$$

که در آن $p(x)$ و $q(x)$ و $w(x)$ توابع خاصی هستند که بر حسب معادلات شرایط اضافه‌تری را نیازمند خواهند شد. بسیاری از معادلات دیفرانسیل مهم از قبیل هرمیت، لاگر، ژاکوبی و لژاندر را می‌توان به یک مسئله SL مانند بالا تبدیل کرد. معادله دیفرانسیل بالا همراه با شرایط مرزی به شکل

$$c_۱y(a)+c_۲y(a)=۰, \qquad (c_۱^۲+c_۲^۲>۰),$$

$$d_۱y(b)+d_۲y(b)=۰, \qquad (d_۱^۲+d_۲^۲>۰),$$

به‌عنوان یک مسئله SL معمولی شناخته می‌شود که $p(x)$، $q(x)$ و $w(x)$ توابع پیوسته در بازه‌ی متناهی $[a,b]$ هستند. λ را برای حالتی که مسئله بالا یک جواب داشته باشد مقدار ویژه و جواب آن را تابع ویژه می‌گویند. یکی از نتایج کلیدی این است که مقدار ویژه مسئله بالا حقیقی است و توابع ویژه مربوط به هر مقدار ویژه، عمود هستند. هنگامی که در $x=a,b$، $p(x)$ صفر باشد یک SLP (مسئله اشتورم-لیوویل) منفرد است. یکی از SLPهای منفرد معادله دیفرانسیل لژاندر است که فرم استاندارد آن به‌صورت زیر است:

$$\frac{d}{dx}\left[(۱-x^۲)\right]+n(n+۱)y=۰.$$

معادله‌ی لژاندر در حل معادلات لاپلاس در یک دستگاه آزاد یا دستگاه‌های دیگر فیزیک به وجود می‌آید [۵]. در ارتباط با توابع لژاندر، مفهوم تبدیل لژاندر ناپیوسته معرفی و تحقیق شد و در جواب برخی از معادلات دیفرانسیل توسط چرچیل [۳] و ترانتر [۱۹] به‌کار گرفته شد. دبناث و هارل [۶] تبدیل لژاندر پیوسته و ویژگی‌های کاربردی آن را معرفی کردند و کاربردهای آن را در حل مسائل مقدار مرزی در قطب کره که با حالت های مرزی دریکله و نیومان در ارتباط است را نشان دادند. در این مورد ویژگی ها و کاربردهایی در [۱۲] آمده است. گوپتا و گوپتا [۱۰، ۱۱] یک اظهار نظر کلی درباره ی تبدیل لژاندر و کاربردهای آن در حل مسائل انتقال گرما در یک قطعه با رسانایی ناپایدار و هم‌چنین تولید گرما در آن را بیان کردند.

باترز و استند و وارنر [۲] یک تبدیل لژاندر کامل معرفی کردند که در آن چندجمله‌ای لژاندر را استاندارد و p_k (k عدد صحیح) با تابع $p_\lambda(x)$ (λ عدد حقیقی) جابه‌جا شدند. دیبا و کوه [۸] حساب دیفرانسیل و انتگرال کاربردی را برای تبدیل لژاندر پیوسته که در [۲] بحث شده بود را بسط دادند. آن‌ها به‌طور اختصار یک سری مشتق گیری و معادله‌ی پیچش معرفی کردند و از آن‌ها برای حل مسائل مقدار مرزی استفاده کردند. در ارجاعاتی که برای مسائل اشتورم-لیوویل، معادلات لژاندر و تبدیل‌های لژاندر ذکر شد، نویسندگان فقط دستور مشتقات صحیح را در نظر گرفتند. هر چند که در سال‌های اخیر مشخص

شده که در بسیاری از کاربردها، مدل مشتق گیری راه حل دقیق‌تری را در دستگاه فراهم می‌آورد. به احتمال زیاد مدل‌های طبیعی در آینده به سمت مسائل اشتورم-لیوویل کسری تمایل پیدا می‌کنند. بنابراین ضروری است که این گونه مسائل مورد بررسی قرار بگیرند.

در فصل ۳ این پایان‌نامه برخی از عملگرهای اشتورم-لیوویل کسری را تعریف می‌کنیم و دو کلاس از مسائل SL کسری را نیز معرفی کرده که به $FSLP$های منفرد و منظم نامگذاری می‌شوند. هم‌چنین ثابت می‌کنیم که مقادیر ویژه عملگرها حقیقی و توابع ویژه متناظر با دو مقدار ویژه‌ی متفاوت متعامدند.

به‌عنوان یک عملگر برای $FSLP$ های منفرد معادله‌ی لژاندر کسری را معرفی می‌کنیم و راه حل آن را مورد بحث قرار می‌دهیم. هم‌چنین نشان می دهیم که چندجمله‌ای‌های لژاندر که از یک معادله لژاندر کسری حاصل می‌شوند شبیه یک معادله لژاندر صحیح به‌دست می‌آید.

تبدیل انتگرال لژاندر را برای عملگر لژاندر کسری به‌طور کامل و دقیق محاسبه می‌کنیم و کاربردهای آن را نشان می دهیم. قابل ذکر است که بسیاری از معادلات دیفرانسیل دیگر مثل هرمیت، لاگر، ژاکوبی و لژاندر می‌توانند به یک معادله اشتورم-لیوویل تغییر شکل دهند.

فهرست نمادها

SL اشتورم-لیوویل ۱۰

I^{α} انتگرال کسری از دستور α ۴۲

$J_{\nu}(.)$ تابع بسل نوع اول از مرتبه γ ۲۷

$Y_{\nu}(.)$ تابع بسل نوع دوم از مرتبه γ ۲۷

$\Gamma(.)$ تابع گاما ۴۲

$G(x,t)$ تابع گرین ۱۲

$T[.]$ تبدیل اشتورم-لیوویل ۲۰

$h_{i,\nu}$ تبدیل هنکل نوع i ۲۷

L_e تبدیل لژاندر زوج ۴۰

L_o تبدیل لژاندر فرد ۴۰

$L_n(x)$ چند جمله‌ای لژاندر کسری ۵۷

W رونسکین ۱۱

S زیرفضای برداری ۵۰

L_z عملگر خطی ۲۰

V فضای برداری ۵۰

$\Re e$ قسمت حقیقی ۴۲

$L^{2}(I)$ فضای انتگرال پذیر لبگ روی بازه‌ی مشخص ۱۰

$\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی ۱۲

L^{1} مجموعه توابع اندازه پذیرلبگ ۲۱

$C^{2}[a,b]$ مجموعه‌ی همه توابع پیوسته با مشتقات اول و دوم روی $[a,b]$ ۹

$C^{1}[a,b]$ مجموعه‌ی همه توابع پیوسته با مشتق اول روی $[a,b]$ ۱۰

$C[a,b]$ مجموعه‌ی همه توابع پیوسته روی$[a,b]$ ۱۰

$FSLP$ مسئله اشتورم-لیوویل کسری ۴۲

$FSLP1$ مسئله اشتورم-لیوویل کسری نوع یک ۴۶

$FSLP2$ مسئله اشتورم-لیوویل کسری نوع دو ۴۹

D^{α} مشتق کسری از دستور α ۴۲
L_e^{-1} معکوس تبدیل لژاندر زوج ۴۰
L_o^{-1} معکوس تبدیل لژاندر فرد ۴۰
F میدان ۹

فصل ۱

مسائل اشتورم-لیوویل

مقدمه فصل

در این فصل ابتدا عملگر خودالحاق و ماتریس خودالحاق را معرفی می‌کنیم. در ادامه به معرفی مسئله اشتورم-لیوویل منظم پرداخته و تعاریف و قضایایی در این زمینه ارائه می‌دهیم. هم‌چنین چگونگی ساخت تابع گرین [1] را شرح داده و در این مورد یک مثال می‌آوریم. توضیح مختصری نیز در مورد مسئله اشتورم-لیوویل منفرد داده و در پایان چند قضیه در زمینه‌ی مسائل اشتورم-لیوویل که کاربرد بیشتری دارد بیان می‌کنیم. مطالب این فصل برگرفته از منابع [۱، ۹] است.

۱.۱ عملگرخودالحاق

با توجه به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم زیر

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \qquad (۱.۱)$$

می‌توان نوشت:

$$Ly = 0,$$

که

$$L = p(x)d^2/dx^2 + q(x)d/dx + r(x), \qquad (۲.۱)$$

رابطه‌ی بالا یک عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی دوم نامیده می‌شود که y در $C^2(I)$ قرار می‌گیرد. L یک عملگرخطی در فضای برداری X است به‌طوری‌که

$$L(ax+by) = aLx + bLy \quad \forall a, b \in F \quad x, y \in X.$$

اگر X یک فضای ضرب داخلی باشد یک الحاق از L عملگری به‌صورت L' است به‌طوری‌که

$$\langle Lx, y\rangle = \langle x, L'y\rangle \quad x, y \in X.$$

اگر $L = L'$ در این صورت L یک عملگر خود الحاق است. چنان‌چه X یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی از C^n باشد، می‌دانیم که هر عملگر خطی را می‌توان به‌وسیله‌ی پایه‌ی متعامد $\{e_i : 1 \le i \le n\}$

1. Green

با ماتریس زیر نشان داد:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

چنان‌چه a یک مقدار ویژه از ماتریس A باشد و بردار غیر صفر $x \in X$ موجود باشد بطوری‌که

$$Ax = ax,$$

در این صورت x بردار ویژه نظیر ماتریس A است که بوسیله‌ی مقدار ویژه‌ی a بیان می‌شود. A یک ماتریس خود الحاق است اگر

۱- مقادیر ویژه حقیقی باشند.

۲- بردارهای ویژه آن متناظر با مقادیر ویژه متفاوت متعامد باشند.

۳- بردارهای ویژه یک پایه برای X باشند.

قضیه ۱.۱.۱. *اگر $L : C^2(a,b) \to L^2(a,b)$ یک عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی دوم تعریف شده به‌وسیله‌ی*

$$Lu = p(x)u'' + q(x)u' + r(x)u, \quad x \in (a,b), \tag{۳.۱}$$

باشد به‌طوری‌که $r \in C(a,b), q \in C^1(a,b), p \in C^2(a,b)$ و L نیز یک عملگر خود الحاق باشد آن‌گاه مقادیر ویژه‌ی معادله‌ی

$$Lu + \lambda u = 0, \tag{۴.۱}$$

حقیقی‌اند و هر جفت تابع ویژه‌ی بیان شده به‌وسیله‌ی مقادر ویژه‌ی متفاوت متعامدند. [۱]

۲.۱ مسئله‌ی اشتورم-لیوویل

اگر L یک عملگر خود الحاق به‌صورت زیر باشد:

$$L = \frac{d}{dx}(p(x)\frac{d}{dx}) + r(x). \tag{۵.۱}$$

در این صورت به مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی

$$Lu + \lambda\rho(x)u = 0, \quad x \in (a,b), \tag{۶.۱}$$

با شرایط مرزی مجزای زیر

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0, \tag{۷.۱}$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \quad |\beta_1| + |\beta_2| > 0. \tag{۸.۱}$$

که ρ تابع پیوسته با مقدار حقیقی و α_i و β_i ثابت های حقیقی هستند، مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی اشتورم-لیوویل یا به اختصار مسئله‌ی SL گفته می‌شود. چون L یک عملگر خودالحاق روی شرایط مرزی است، بنابراین می‌دانیم که اگر مقادیر ویژه از معادله‌ی (۶.۱) وجود داشته باشد حقیقی و توابع ویژه‌ی آن متعامدند.

تعریف ۱.۲.۱. λ_0 یک مقدار ویژه از مسئله‌ی اشتورم-لیوویل است، در این صورت مسئله‌ی SL (۶.۱)-(۸.۱) به ازای $\lambda = \lambda_0$ یک جواب غیر بدیهی $u_0 \neq 0$ دارد که به u_0 تابع ویژه‌ی متناظر با λ_0 گفته می‌شود، هم‌چنین به u_0 و λ_0 جفت ویژه‌ی مسئله‌ی اشتورم-لیوویل می‌گویند.
اگر k یک ثابت مخالف صفر باشد بنابراین ku_0 و λ_0 هم یک جفت ویژه از مسئله‌ی اشتورم-لیوویل هستند که در این صورت به λ_0 مقدار ویژه‌ی ساده‌ی مسئله‌ی اشتورم-لیوویل می‌گوییم و ثابت می‌شود که تنها یک تابع ویژه متناظر با λ_0 وجود دارد.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم u_1, u_2 دو تابع مشتق پذیر روی بازه‌ی I باشند، در این صورت رونسکین آن‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W[u_2, u_1](x) = u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x).$$

قضیه ۳.۲.۱. *(اتحاد لاگرانژ) فرض کنیم u_1, u_2 مشتق پذیر باشند در این صورت*

$$u_2(x)Lu_1(x) - u_1(x)Lu_2(x) = \{u_2(x); u_1(x)\}'.$$

برای $x \in I$ به $W[u_1, u_2]$ براکت لاگرانژ گفته و به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\{u_2(x); u_1(x)\} := p(x)W[u_1, u_2], \qquad x \in I.$$

که $W[u_1, u_2]$ همان رونسکین u_1, u_2 است. [۱]

قضیه ۴.۲.۱. *همه‌ی مقادیر ویژه‌ی مسئله‌ی اشتورم-لیوویل حقیقی‌اند وتوابع ویژه متناظر با مقادیر ویژه‌ی متفاوت، نسبت به تابع وزن ρ روی $[a, b]$ متعامدند.*

برهان. فرض کنیم $\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2$ جفت‌های ویژه از مسئله‌ی اشتورم-لیوویل هستند. طبق اتحاد لاگرانژ و با ضرب طرفین $Lu_1 = -\lambda_1 \rho(x) u_1$ در u_2 و $Lu_2 = -\lambda_2 \rho(x) u_2$ در u_1 وتفاضل آن‌ها داریم:

$$u_1(x)Lu_2(x) - u_2(x)Lu_1(x) = \{p(x)W[u_1, u_2]\}',$$

لذا به ازای $x \in [a, b]$ داریم:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\rho(x)u_1(x)u_2(x) = \{p(x)W[u_1, u_2]\}',$$

با انتگرال‌گیری روی بازه‌ی $[a, b]$ داریم:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle u_1 u_2 \rangle_\rho = \{p(x)W[u_1, u_2]\}_a^b,$$

با توجه به اینکه u_1, u_2 در شرایط مرزی مسئله‌ی اشتورم-لیوویل صدق می‌کنند، ثابت می‌شود:

$$W[u_1(x), u_2(x)](a) = W[u_1(x), u_2(x)](b) = 0.$$

بنابراین

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle u_1(x) u_2(x) \rangle_\rho = 0.$$

با توجه به اینکه $\lambda_۲ \neq \lambda_۱$ پس توابع $u_۲, u_۱$ نسبت به تابع وزن ρ متعامدند.
حال برای اثبات اینکه مقادیر ویژه حقیقی‌اند مانند قبل عمل می‌کنیم، به این صورت که فرض می‌کنیم λ مختلط و $\overline{\lambda}$ مزدوج آن باشد بنابر این داریم:

$$(\lambda - \overline{\lambda})\langle u(x)\overline{u(x)}\rangle_\rho = ۰,$$

و به

$$(\lambda - \overline{\lambda})\int_a^b \rho(x)|u(x)|^۲ dx = ۰,$$

می‌رسیم که

$$\int_a^b \rho(x)|u(x)|^۲ dx \neq ۰,$$

و $\overline{\lambda} = \lambda$. پس λ حقیقی است. □

هرگاه بازه‌ی (a, b) متناهی باشد و p در $[a, b]$ صفر نشود، به سیستم (۶.۱) تا (۸.۱) مسئله‌ی اشتورم-لیوویل منظم (مسئله‌ی SL منظم) گفته می‌شود.در واقع در مسئله‌ی اشتورم-لیوویل منظم ادعا می‌کنیم که در بازه‌ی $[a, b]$ $p(x) > ۰$ است. روشن است که جواب‌های مسئله‌ی SL همان توابع ویژه از عملگر $-L/p$ در $C^۲$ است که در شرایط مرزی (۷.۱)،(۸.۱) صدق می‌کند. می‌توان نشان داد که مسئله‌ی SL منظم نه تنها جواب‌هایی دارد بلکه فضای $L^۲_\rho(a, b)$ رانیز تولید می‌کند. برای سادگی فرض می‌کنیم $\rho(x) = ۱$ است. ابتدا تابع گرین را برای عملگر L روی شرایط مرزی (۷.۱)،(۸.۱) می‌سازیم. از تابع گرین برای رسیدن به انتگرال $L^{-۱}$ (وارون L) استفاده می‌کنیم.

۳.۱ وجود توابع ویژه

تابع گرین برای عملگر خود الحاق

$$L = p\frac{d^۲}{dx^۲} + p'\frac{d}{dx} + r,$$

روی شرایط مرزی

$$\alpha_۱ u(a) + \alpha_۲ u'(a) = ۰, \quad |\alpha_۱| + |\alpha_۲| > ۰,$$

$$\beta_۱ u(b) + \beta_۲ u'(b) = ۰, \quad |\beta_۱| + |\beta_۲| > ۰,$$

تابعی به‌صورت

$$G : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

همراه با ویژگی‌های زیر است:
۱− G یک تابع متقارن است یعنی:

$$G(x, \xi) = G(\xi, x) \quad \forall x, \xi \in [a, b].$$

و G برای هر متغیر x, ξ در شرایط مرزی صدق می‌کند.

۲- G یک تابع پیوسته در $[a,b]\times[a,b]$ از کلاس $C^{۲}$ روی $\{[a,b]\times[a,b] \mid (x,y) : x=y\}$ است که در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$L_x G(x,\xi) = p(x)G_{xx}(x,\xi) + p'(x)G_x(x,\xi) + r(x)G(x,\xi) = \circ.$$

۳- $\frac{\partial G}{\partial x}$ یک نا پیوستگی در $x=\xi$ دارد:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(\xi^+,\xi) - \frac{\partial G}{\partial x}(\xi^-,\xi) = \lim_{\delta\to\circ^+}[\frac{\partial G}{\partial x}(\xi+\delta,\xi) - \frac{\partial G}{\partial x}(\xi-\delta,\xi)] = \frac{۱}{p(\xi)}. \qquad (۹.۱)$$

معادله‌ی همگن $Lu=\circ$، روی شرایط مرزی (۷.۱)،(۸.۱) تنها یک جواب جزئی $u=\circ$ را دارد. فرض کنیم صفر مقدار ویژه‌ی L نیست. و اگر $\overline{\lambda}$ یک عدد حقیقی باشد که مقدار ویژه‌ی L هم نیست، پس می‌توان عملگر زیر را یافت:

$$\overline{L} = L + \overline{\lambda} = p\frac{d^{۲}}{dx^{۲}} + p'\frac{d}{dx} + \overline{r},$$

که در اینجا $\overline{r}(x) = r(x) + \overline{\lambda}$ وحالا

$$Lu + \lambda u = \overline{L}u + (\lambda - \overline{\lambda})u.$$

می‌دانیم که λ یک مقدار ویژه از L وابسته به تابع ویژه u است اگر وتنها اگر $(\lambda-\overline{\lambda})$ یک مقدار ویژه از $\overline{L}$ وابسته به تابع ویژه‌ی u باشد. چون $\overline{\lambda}$ یک مقدار ویژه از L نیست، پس صفرنمی‌تواند یک مقدار ویژه از $\overline{L}$ باشد. بنابراین عددهای طبیعی وجود دارند که مقادیر ویژه‌ی L نیستند.

لم ۱.۳.۱. *مقادیر ویژه L کراندار هستند وبه صورت یک ثابت حقیقی معرفی می‌شوند.* [۱]

اکنون تابع گرین را برای عملگر L روی شرایط مرزی زیر می‌سازیم:

$$\alpha_۱ u(a) + \alpha_۲ u'(a) = \circ \qquad |\alpha_۱| + |\alpha_۲| > \circ,$$

$$\beta_۱ u(b) + \beta_۲ u'(b) = \circ \qquad |\beta_۱| + |\beta_۲| > \circ.$$

طبق قضیه‌ی استاندارد وجودی [۴] ، معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم $Lu=\circ$ دو جواب یکتای (غیر بدیهی) $v_۱$ و $v_۲$ به صورت زیر دارد:

$$v_۱(a) = \alpha_۲, \qquad v_۱'(a) = -\alpha_۱,$$

$$v_۲(b) = \beta_۲, \qquad v_۲'(b) = -\beta_۲.$$

به این صورت که $v_۱$ در $x=a$ در شرط اول مرزی صدق می‌کند:

$$\alpha_۱ v_۱(a) + \alpha_۲ v_۱'(a) = \circ,$$

و $v_۲$ در شرط دوم مرزی در $x=b$ صدق می‌کند:

$$\beta_۱ v_۱(b) + \beta_۲ v_۱'(b) = \circ.$$

واضح است که v_1 و v_2 مستقل خطی‌اند، به عبارت دیگر ریشه‌های آن‌ها در $Lu = 0$ و شرایط مرزی صدق می‌کند، اما این مطلب با فرض این‌که صفر مقدار ویژه‌ی L نیست تناقض دارد.
حال تابع G را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} c^{-1} v_1(\xi) v_2(x), & a \leq \xi \leq x \leq b \\ c^{-1} v_1(x) v_2(\xi), & a \leq x \leq \xi \leq b, \end{cases} \tag{۱۰.۱}$$

در این‌جا c ثابت و مخالف صفر، به‌صورت زیر است:

$$c = p(x)[v_1(x)v_2'(x) - v_1'(x)v_2(x)] = p(x)W(v_1, v_2)(x). \tag{۱۱.۱}$$

W و p روی بازه‌ی $[a,b]$ مخالف صفراند و طبق اتحاد لاگرانژ داریم:

$$[p(v_1 v_2' - v_1' v_2)]' = v_1 L v_2 - v_2 L v_1 = 0. \tag{۱۲.۱}$$

به سادگی می‌توان نشان داد $G(\xi, x)$ در ویژگی‌های گفته شده صادق است. با استفاده از معادله‌ی (۹.۱) و با مشتق گیری از (۱۰.۱) داریم:

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}(x, x+\delta) - \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, x-\delta) = \frac{1}{c}[v_1(x)v_2'(x+\delta) - v_1'(x-\delta)v_2(x)],$$

در اینجا $\delta > 0$ ، حال عملگر T را روی $C([a,b])$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(Tf)(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi. \tag{۱۳.۱}$$

نشان می‌دهیم تابع Tf از کلاس $C^2([a,b])$ و جوابی از معادله دیفرانسیل $Lu = f$ است. رابطه‌ی بالا را باز نویسی کرده و مشتق می‌گیریم:

$$(Tf)(x) = \int_a^x G(x,\xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi,$$

$$(Tf)'(x) = \int_a^x G_x(x,\xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b G_x(x,\xi) f(\xi) d\xi,$$

$$(Tf)''(x) = \int_a^x G_{xx}(x,\xi) f(\xi) d\xi + G_x(x,x^-)f(x^-) + \int_x^b G_{xx}(x,\xi) f(\xi) d\xi - G_x(x,x^+)f(x^+),$$

در این‌جا G و f در $x = \xi$ پیوسته‌اند و

$$G_x(x,x^-) - G_x(x,x^+) = \frac{1}{c}[v_1(x^-)v_2'(x) - v_1'(x)v_2(x^+)] = \frac{1}{p(x)},$$

لذا با استفاده از پیوستگی v_1 و v_2 داریم:

$$(Tf)''(x) = \int_a^x G_{xx}(x,\xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b G_{xx}(x,\xi) f(\xi) d\xi + \frac{f(x)}{p(x)}.$$

و نتیجه می‌گیریم که Tf در $C^2([a,b])$ قرار دارد و در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$L(Tf)(x) = p(x)(Tf)''(x) + p'(x)(Tf)'(x) + r(x)(Tf)(x)$$

$$= \int_a^x L_x G(x,\xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b L_x G(x,\xi) f(\xi) d\xi + f(x) = f(x),$$