بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهیدمدنی آذربایجان

پایان‌نامه
جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

حاصل‌ضرب کاراکترها و p- گروه‌های متناهی

استاد راهنما
دکتر قاسم صمدی آغداش

استاد مشاور
دکتر فرضعلی ایزدی

پژوهشگر
خلیل محمدپور

تیرماه ۱۳۹۲
تبریز- ایران

تقدیم به:

پدر و مادر مهربانم، فرزندم نگین و همسر عزیزم شمع های فروزانی که شعله آنها چراغ راهم بود

بسمك القدوس قدسنی منی

الهی...

یکتای بی‌همتایی، قیوم توانایی، بر همه چیز بینایی، در همه حال دانایی، از عیب مصافایی، از شك مبرایی، اصل هر دوایی، داروی دلهایی، شاهنشاه و فرمانروایی، به تو رسد ملك خدایی.

کجا باز یابیم آن روزی که تو ما را بودی و من نبودم، تا باز رسم به آن روزی میان آتش و دودم، اگر بدو کیستی آن روز را یابم پرسودم و ربود خود را یابم به نبود خود خشنودم. از آن چه نخواستی چه آید و آن را که نخواندی کی آید، تلخ را سود اکرش آب خوش در جوار است و خار را چه حاصل از آن که بوی گل در کنار است.

اقرار کردم به مفلسی و هیچ کسی، ای یگانه که از هر لحاظ مقدسی، چه شود که اگر مفلسی را در نفش آخر و در اوج نیاز به فریاد رسی.

به من کمك کن تا قبول کنم، دانسته‌هایم در مقابل دانش لایتناهی تو ندانستنی بیش نیست و بدانم که دانایی تو بیشتر از آنی که من می‌دانم و آن همه را حتی به اندازه‌ی یك قطره جز به یاری تو، دانستن نمی‌توانم.

به تماشا سوگند و به آغاز کلام و به پرواز کبوتر از ذهن

واژه‌ای در قفس است!!!

سپاس گزاری...

سپاس خداوندی را که به من آموخت در لحظه‌های شادی شکرگزار باشم و فراموش نکنم، تمام داشته‌ها و دانسته‌هایم از لطف بی‌منت اوست و آموخت که در لحظه‌های اندوهم صبور باشم که همه‌ی غم‌ها رفتنی است و سربلند کسی است که مطیع تقدیر و حکمت الهی باشد.

اینک به پاس لطف الهی که پایان‌نامه‌ی حاضر، آماده شده است برخود واجب می‌دانم از حمایت‌های بی‌دریغ، بذل توجه و مساعدت‌های استاد راهنمایم جناب آقای دکتر **قاسم صمدی آغداش** سپاس گزاری نمایم.

از جناب آقای دکتر **فرضعلی ایزدی**، که مشاوره و مطالعه این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم. و از آقای دکتر **محمد شهریاری** نیز سپاسگزارم که قبول زحمت فرموده و داوری این تحقیق را برعهده گرفتند.

از دوست عزیزم آقای **میثم ضیایی** به خاطر زحماتی که متحمل شده‌اند، صمیمانه تشکر می‌کنم. و بوسه می‌زنم بر دستان مادر و پدر عزیزم که توانستم زیر سایه مهربانی و صبوری‌هایشان در راه کسب علم و دانش قدم بردارم. هم‌چنین تشکر می‌کنم از فرزندم و همسر عزیزم، به پاس کمک‌های بی‌دریغ و دلگرمی‌های بی‌پایان‌شان، که بهترین پشتیبان من بودند.

خلیل محمدپور

تیرماه ۱۳۹۲

چکیده

به وضوح اگر χ و ψ سرشت‌هایی از گروه G باشند، آن‌گاه $\chi + \psi$ نیز سرشتی از گروه G است. هم‌چنین با تعریف $(\chi\psi)(g) = \chi(g)\psi(g)$ می‌توان یک تابع کلاسی جدید به دست آورد، امّا اثبات این که $\chi\psi$ سرشتی از گروه G است مقداری مشکل و غیر بدیهی است.
از مباحث مقدماتی در نظریه‌ی سرشت‌ها می‌دانیم که می‌توان سرشت‌ها را به صورت ترکیب خطی از سرشت‌های تحویل ناپذیر نوشت. حال چون $\chi\psi$ سرشتی از گروه G است، پس می‌توان آن را به صورت ترکیب خطی از سرشت‌های تحویل‌ناپذیر گروه G نوشت. فرض کنیم $\eta(\chi, \psi)$ تعداد سازنده‌های تحویل‌ناپذیر مجزای $\chi\psi$ باشد، در این پایان‌نامه قصد ما بررسی رابطه بین $\eta(\chi, \psi)$ و سرشت‌های χ و ψ می‌باشد که برای این منظور، مقداری بحث در مورد سرشت‌ها و حاصل‌ضرب‌های آن‌ها انجام داده‌ایم و سپس به این موضوع پرداخته‌ایم.

کلمات کلیدی:
گروه پوچ‌توان، گروه حل‌پذیر، سرشت‌های گروه، حاصل‌ضرب سرشت‌ها، سرشت‌های تحویل‌ناپذیر، سازنده‌ها.

پیشگفتار

نظریه گروه‌ها از مهمترین مباحث در ریاضیات می‌باشد. در این میان نظریه‌ی نمایش و سرشت‌ها، ابزار قدرتمندی برای اثبات برخی قضایا در مورد گروه‌های متناهی می‌باشند. برای ورود به مبحث سرشت‌ها به برخی مقدمات مانند تعریف گروه G، $F[G]-$ مدول‌ها، نمایش گروه‌ها و $\cdots$ نیاز داریم. بحثی که در نظریه سرشت‌ها از اهمیت شایانی برخوردار است، بحث در مورد حاصل‌ضرب دو یا چند سرشت است که به این وسیله می‌توان سرشت‌های جدیدی به دست آورد. هم‌چنان که گفته شد در این پایان‌نامه قصد ما بررسی رابطه بین $\eta(\chi,\psi)$ یعنی سازنده‌های مجزای $\chi\psi$ و سرشت‌های χ و ψ می‌باشد. برای نیل به این هدف از [۵] کمک گرفته‌ایم. که در [۳] حاصل‌ضرب سرشت‌ها با سازنده‌های تحویل‌ناپذیر مورد بررسی قرار گرفته است. در مقاله‌ی یاد شده به بحث راجع به گروه‌های حل‌پذیر که دارای سرشت تحویل‌ناپذیر $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ هستند، به طوری که $\chi\bar{\chi}$ دارای حداکثر دو سازنده‌ی تحویل‌ناپذیر غیر اصلی است مورد مطالعه قرار گرفته است. هم‌چنین لازم به ذکر است که کلیه نمادهای به کار رفته در این پایان‌نامه با نمادهای موجود در [۶] مطابقت دارد. در [۲] ثابت شده است که برای هر گره حل‌پذیر G و هر $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$، ثابت‌های C و D وجود دارند که $dl(G/\ker(\chi)) \leq c\eta(\chi,\bar{\chi}) + C$. هم‌چنین در قضیه B از همین مقاله ثابت شده است که اگر G گروه حل‌پذیر متناهی باشد و $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$، آن‌گاه $\chi(1)$ دارای حداکثر $\eta(\chi)$ مقسوم علیه اول مجزا می‌باشد. در قضیه‌ی A از [۳] گروه‌های حل‌پذیر به مانند G مورد بررسی قرار گرفته‌اند که دارای یک سرشت صادق $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ هستند که

$$\chi\bar{\chi} = 1_G + m\alpha$$

که در آن $\alpha \in \mathrm{Irr}(G)$ و m عدد صحیح مثبت می‌باشد. با شرایط قضیه‌ی A در [۳] و در قضیه B داریم که

$$\chi\bar{\chi} = 1_G + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2$$

که در آن $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{Irr}(G)$ سرشت‌های غیراصلی بوده و m_1 و m_2 صحیح اکیداً مثبت هستند.
این پایان‌نامه بر دو قضیه و یک حدس استوار می‌باشد که صورت قضایا در ذیل آمده و اثبات آن‌ها در فصل (۴) آورده خواهد شد.

قضیه ۱.۱.۴: فرض کنید G یک p- گروه متناهی باشد، جایی که p یک عدد اول است. فرض کنید $\chi, \psi \in \mathrm{Irr}(G)$ سرشت‌های صادق باشند. آن‌گاه $\eta(\chi, \psi) = 1$ یا $2\eta(\chi, \psi) > p$ است.

قضیه ۳.۱.۴: فرض کنید n عدد صحیح مثبت باشد. آن‌گاه یک مجموعه‌ی متناهی S_n از اعداد صحیح مثبت وجود دارد، برای هر گروه پوچ‌توان G و $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ با $\eta(\chi, \bar{\chi}) = n$، ما داریم

$$\chi(1) \in S_n.$$

حدس: فرض کنید G یک p- گروه متناهی باشد، جایی که p یک عدد اول فرد است. فرض کنید $\chi, \psi \in \mathrm{Irr}(G)$ سرشت‌های صادق باشند. اگر $2\eta(\chi, \psi) - 1 > p$، آن‌گاه $\eta(\chi, \psi) \geq p$ است.

در فصل (۱) این پایان‌نامه به بحث راجع به گروه‌ها، گروه‌های حل‌پذیر و $\cdots$، هم‌چنین نمایش یک گروه پرداخته‌ایم. لازم به ذکر است که اگر چه تعریف نمایش گروه G و $F[G]-$ مدول‌ها برای تعریف و بحث در مورد سرشت‌ها ضروری می‌باشد، اما چون هدف این پایان‌نامه بررسی این مباحث نمی‌باشد، لذا به اندک تعاریف و قضایا در مورد این موضوعات در فصل اول بسنده کرده‌ایم.

فصل (۲) این پایان‌نامه به تعاریف سرشت‌ها، حاصل‌ضرب سرشت‌ها، سازنده‌های تحویل‌ناپذیر و $\cdots$، اختصاص دارد. البته نحوه‌ی به دست آوردن و حتی تعریف جدول سرشت‌ها در این فصل خالی از فایده نبوده است ولی چون جدول سرشت‌ها از نیازهای اساسی برای این پایان‌نامه محسوب نمی‌گردد، لذا از آوردن آن در این فصل به دلیل کاهش حجم پایان‌نامه خودداری می‌کنیم.

در فصل (۳) اندکی اختصاصی‌تر در مورد حاصل‌ضرب سرشت‌ها بحث به میان آمده است.

در این فصل برخی ویژگی‌های حاصل‌ضرب سرشت‌های گروه‌های حل‌پذیر و فوق حل‌پذیر و هم‌چنین سرشت‌ها با چه ویژگی به طور خاص روی $G-Z(G)$ صفر می‌شوند، مورد بررسی قرار می‌گیرد و تا جایی که پایان‌نامه از بحث خارج نگردد، اثبات قضایا در این فصل به طور کامل آورده شده است. فصل چهارم نیز که هدف اصلی این پایان‌نامه می‌باشد و از [۵] کمک گرفته شده است. در مورد حاصل‌ضرب سرشت‌های و p- گروه‌های متناهی بحث به میان آمده است.

در کل لازم به ذکر است که اگر چه برای تمامی قضایا و لم‌های موجود در این پایان‌نامه اثبات‌های در خور و مناسبی وجود دارد، امّا به منظور جلوگیری از حجیم شدن پایان‌نامه، فقط در فصل چهارم از این پایان‌نامه اثبات قضایا به طور کامل ارائه گردیده است.

فهرست مطالب

فصل ۱
مفاهیم مقدماتی و تعریف‌ها

۱.۱ مقدمه

مفهوم گروه یکی از مصالح ساختمانی اساسی مبحثی است که امروزه جبر مجرد خوانده می‌شود. درست است که توجه به گروه‌ها در ابتدای کار جبر مجرد مرسوم شده، اما می‌شود برای این انتخاب دلائل طبیعی و متقاعد کننده‌ای هم ارائه داد. اصلاً چون گروه‌ها دستگاه‌هائی هستند با یك عمل، می‌شود آنها را به ساده‌ترین وجه صوری متصف ساخت. در جبر مجرد دستگاه‌هائی در اختیار ماست اساسی، که در تاریخ و گسترش ریاضیات به بالاترین مرتبه‌ی اهمیت رسیده‌اند. در این فصل مفاهیمی از گروه‌های حل‌پذیر و پوچ‌توان، $F[G]-$ مدول‌ها، مثال‌ها و قضایای مربوطه مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۲.۱ گروه‌های حل‌پذیر

گروه‌های حل‌پذیر برای اولین بار در رابطه با حل‌پذیری معادلات به وسیله‌ی رادیکال‌ها مطرح شدند. گالوا [۱] ثابت کرد که اگر معادله‌ای به وسیله‌ی رادیکال‌ها حل‌پذیر باشد آن‌گاه گروه‌های گالوای آن باید گروهی حل‌پذیر باشند. لذا مطالعه‌ی خواص چنین گروه‌هایی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

تعریف ۲.۱.۱ *فرض کنید G یك گروه است. همان طور که می‌دانیم*

[۱] Galois

$G' = \langle [x,y] | x,y \in G \rangle$ زیرگروه مشتق G (یا زیرگروه جابه‌جاگر G) نامیده می‌شود. حال زیرگروه‌های $G^{(i)}$ به ازای هر $i \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ به طور استقرایی چنین تعریف می‌شوند

$$G^{(0)} = G, \ \ G^{(1)} = G, \ \ G^{(i)} = (g^{(i-1)})', \ \ i \geq 2.$$

تعریف ۲.۲.۱ *گروه G را حل‌پذیر می‌نامیم هرگاه عدد صحیح و نامنفی n وجود داشته باشد به طوری که $G^{(n)} = \{1\}$. در غیر این صورت G را گروهی حل‌ناپذیر می‌خوانیم.*

مثال ۲.۳.۱ *اگر G گروهی آبلی باشد. آن‌گاه چون $G' = \{1\}$، لذا گروهی حل‌پذیر است. حال اگر یکی از گروه‌های Q_8 یا D_8 باشد آن‌گاه $|Z(G)| = 2$. پس $G/Z(G)$ گروهی از مرتبه‌ی ۴ و در نتیجه آبلی است، پس $G' \subseteq Z(G)$. از طرف چون G ناآبلی است، پس $|G'| \neq \{1\}$، و در نتیجه باید $|G'| = 2$. یعنی G' گروهی دوری است، که از آن به دست می‌آید $G'' = \{1\}$. بنابراین هر دو گروه D_8 و Q_8 حل‌پذیرند. اگر G گروهی ساده و ناآبلی باشد آن‌گاه چون $G' \trianglelefteq G$ و $G' = \{1\}$ پس $G' = G$ و در نتیجه G گروهی حل‌ناپذیر است. قضیه زیر را که برای اثبات قضیه بعدی لازم است بدون اثبات می‌آوریم.*

قضیه ۲.۴.۱ *فرض کنید G یک گروه و $N \trianglelefteq G$. اگر N و G/N حل‌پذیر باشند آن‌گاه G نیز حل‌پذیر خواهد بود.*

برهان. [۱] $\square$

قضیه ۲.۵.۱ *هر $p-$ گروه متناهی، گروهی حل‌پذیر است.*

برهان. از استقرا روی $|G|$ استفاده می‌کنیم. با توجه به معادله رده‌ای گروه G، $|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} \frac{|G|}{|C_G(x_i)|}$ داریم $p \Big| |G|/|C_G(x_i)|$ و در نتیجه $p \Big| |Z(G)|$. پس داریم $Z(G) \neq \{1\}$. چون $Z(G)$ آبلی است و در نتیجه حل‌پذیر است. چون $|G/Z(G)| < |G|$ پس بنابه فرض استقرا $G/Z(G)$ گروهی حل‌پذیر است و در نتیجه بنابه قضیه ۲.۴.۱ گروه G حل‌پذیر است. $\square$

۳.۱ گروه‌های پوچ‌توان

تعریف ۳.۱.۱ *یک سری مرکزی برای G عبارت است از سری نرمال*

$$\{1\} = G_0 G_1 ... G_n = G$$

به طوری که $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$ ، $0 \leq i \leq n-1$. اگر گروه G دارای سری مرکزی باشد آن را پوچ توان می‌نامیم. طول کوتاه‌ترین سری مرکزی گروه پوچ توان G رده‌ی پوچ توانی G نامیده می‌شود. چون سری فوق نرمال فرض شده، لذا هر کدام از G_iها زیرگروه نرمالی از G است.

مثال ۳.۲.۱ *گروه بدیهی $\{1\}$ گروهی پوچ توان و از رده‌ی صفر است. حال فرض کنید G گروه آبلی و غیربدیهی است، آن‌گاه $\{1\} = G_0 \leq G_1 = G$ یک سری مرکزی برای G است، زیرا دارای کوتاه‌ترین طول است و بنابراین G گروهی پوچ توان و از رده‌ی پوچ توانی ۱ می‌باشد.*

تعریف ۳.۳.۱ *فرض کنید G یک گروه و H و K زیرمجموعه‌هایی ناتهی از G هستند. جابه‌جاگر H و K را چنین تعریف می‌کنیم*

$$[H, K] = \langle [h, k] | h \in H, k \in K \rangle$$

واضح است که $[H, K]$ زیرگروهی از G بوده و $[H, K] = [K, H]$.

تعریف ۳.۴.۱ *برای گروه دلخواه G زیرگروه‌های $L_i(G)$ را به طور استقرایی چنین تعریف می‌کنیم*

$$L_1(G) = G, L_i(G) = [L_{i-1}(G), G], i \geq 2.$$

لم‌های ۳.۵.۱ و ۳.۶.۱ که برای اثبات لم ۳.۷.۱ لازم است بدون اثبات بیان می‌کنیم.

لم ۳.۵.۱ *فرض کنید G یک گروه و L, K, H زیر مجموعه‌های ناتهی G هستند. اگر H زیرمجموعه‌ی K باشد آن‌گاه*

$$[H, L] \leq [K, L].$$

لم ۳.۶.۱ *فرض کنید G یک گروه و N و H زیرگروه‌های آن هستند. اگر $N \trianglelefteq G$*

$$[HN, G] \leq [G, H]N.$$

لم ۳.۷.۱ *اگر G یک گروه و $N \trianglelefteq G$، آن‌گاه به ازای تمام $i \in N$ داریم*

$$L_i(G/N) = L_i(G)N/N.$$

برهان. از استقرا روی i استفاده می‌کنیم. برای $i = ۱$ داریم

$$L_۱(G/N) = G/N = GN/N = L_۱(G)N/N$$

پس فرض کنید $L_n(\frac{G}{N}) = \frac{L_n(G)N}{N}$. در این صورت می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} L_{n+۱}(G/N) &= [L_n(G/N), G/N] = [L_n(G)N/N, G/N] \\ &= [L_n(GN), G]N/N. \end{aligned}$$

حال از یک طرف بنابه لم ۳.۵.۱ داریم $[L_n(G)N, G] \geq [L_n(G), G] = L_{n+۱}$، و از طرف دیگر بنابه لم ۳.۶.۱ می‌توان نوشت $[L_n(G)N, G] \leq [L_n(G), G] = L_{n+۱}(G)$. به این ترتیب نتیجه می‌شود $L_{n+۱}(G/N) = L_{n+۱}(G)N/N$. □

لم ۳.۸.۱ *فرض کنید G یک گروه و $H \leq G$، در این صورت به ازای تمام $i \in \mathbb{N}$ داریم*

$$L_i(H) \leq L_i(G).$$

برهان. از استقرا روی i استفاده می‌کنیم. به ازای $i = ۱$ داریم

$$L_۱(H) = H \leq G = L_۱(G).$$

فرض می‌کنیم $L_i(H) \leq L_i(G)$. با استفاده از لم ۵.۶.۱ می‌توان نوشت

$$L_{i+۱}(H) = [L_i(H), H] \leq [L_i(G), H] \leq [L_i(G), G] = L_{i+۱}(G)$$

و به این ترتیب لم ثابت می‌شود. □

قضیه ۳.۹.۱ *هر $p-$ گروه متناهی پوچ توان است.*

برهان. از استقرا روی $|G|$ استفاده می‌کنیم. با توجه به معادله رده‌ای گروه G داریم $Z(G) \neq \{۱\}$. اگر G آبلی باشد آن G پوچ توان است. بنابراین $Z(G)$ پوچ توان است. حال چون $|G/Z(G)| < |G|$ پس بنا بر فرض استقرا $G/Z(G)$ پوچ توان است. بنابراین عدد $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $L_m(G/Z(G) = Z(G)$. اکنون با استفاده از لم ۳.۷.۱ می‌توان نوشت

$$L_m(G/Z(G)) = L_m(G)Z(G)/Z(G) = Z(G)$$

در نتیجه به دست می‌آید $L_m(G) \leq Z(G)$. چون $Z(G)$ آبلی است، با استفاده از لم ۳.۸.۱ می‌توان نوشت

$$L_{m+۱}(G) = [L_m(G), G] \leq [Z(G), G] = \{۱\}$$

در نتیجه $L_{m+۱}(G) = \{۱\}$، یعنی G پوچ توان است. □

۴.۱ نمایش‌ها و $F[G]-$ مدول‌ها

گیریم G یك گروه و F، میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد. $GL_n(F)$ گروه ماتریس‌های $n \times n$ وارون‌پذیر با درایه‌هایی در F را مشخص می‌کند.

تعریف ۴.۱.۱ *یك نمایش از G روی F یك هم‌ریختی ρ از G به $GL_n(F)$، برای بعضی n است.*
درجه ρ عدد n است.
بنابراین اگر ρ یك تابع از G به $GL_n(F)$ است، آن‌گاه ρ یك نمایش است اگر و فقط اگر برای تمام $g, h \in G$

$$\rho(gh) = (\rho g)(\rho h)$$

چون یك نمایش یك هم‌ریختی است، در نتیجه برای هر نمایش $p : G \mapsto GL_n(F)$، ما داریم

$$\rho 1 = I_n,$$

برای تمام $g \in G$

$$\rho g^{-1} = (\rho g)^{-1}$$

که در آن I_n ماتریس $n \times n$ را مشخص می‌کند.

مثال ۴.۲.۱ فرض کنید G گروه دو وجهی $D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$ باشد. ماتریس‌های A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

می‌توان بررسی کرد که

$$A^4 = B^2 = I, B^{-1}AB = A^{-1}$$

در نتیجه تابع $\rho : G \mapsto GL_n(F)$ به صورت زیر داده می‌شود

$$p : a^i b^j \mapsto A^i B^j \quad (0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 1)$$

یك نمایش از D_8 روی F است. درجه ρ، ۲ است.

ماتریس ρg برای g در D_8 در جدول زیر داده شده است.

جدول ۱.۱: نمایش D_8

g	1	a	a^2	a^3
ρg	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

g	b	ab	a^2b	a^3b
ρg	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

۱.۴.۱ نمایش‌های هم‌ارز

گیریم $\rho : G \mapsto GL_n(F)$ یك نمایش، T یك ماتریس وارون‌پذیر $n \times n$ روی F باشد. برای تمام ماتریس‌های $n \times n$ A و B، ما داریم

$$(T^{-1}AT)(T^{-1}BT) = T^{-1}(AB)T$$

ما از این مطلب می‌توانیم برای تولید یك نمایش جدید σ از ρ استفاده کنیم؛ ما به طور ساده تعریف می‌کنیم

$$\sigma g = T^{-1}(\rho g)T، \quad g \in G \text{ برای تمام}$$

آن‌گاه برای تمام $g, h \in G$

$$\begin{aligned} \sigma(gh) &= T^{-1}\rho(gh)T \\ &= T^{-1}((\rho g)(\rho h))T \\ &= T^{-1}(\rho g)T.T^{-1}(\rho h)T \\ &= (\rho g)(\sigma h) \end{aligned}$$

و هم‌چنین σ، بدون تردید یك نمایش است.

تعریف ۴.۳.۱ فرض کنید $\rho : G \mapsto GL_n(F)$ و $\sigma : G \mapsto GL_n(F)$ نمایش‌هایی از G روی F باشند. ما می‌گوییم ρ با σ هم‌ارز است اگر $n = m$ و ماتریس $n \times n$ وارون‌پذیر T برای تمام $g \in G$ وجود دارد،

$$\sigma g = T^{-۱}(\rho g)T.$$

هم‌ارزی نمایش‌ها با توجه به تعریف یك رابطه‌هم‌ارزی است.

مثال ۴.۴.۱ فرض کنید $G = D_۸ = \langle a, b : a^۴ = b^۲ = ۱, b^{-۱}ab = a^{-۱} \rangle$، نمایش p را که در مثال ۲.۷.۱ رخ داده است در نظر بگیرید $\rho a = A$ و $\rho b = B$، جایی که

$$A = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

فرض کنید $F = \mathbb{C}$. تعریف می‌کنیم

$$T = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ i & -i \end{pmatrix}$$

آن‌گاه

$$T^{-۱} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{pmatrix} ۱ & -i \\ ۱ & i \end{pmatrix}$$

در حقیقت، T به نحوی ساخته شده است که $T^{-۱}AT$ قطری است؛ ما داریم

$$T^{-۱}AT = \begin{pmatrix} i & ۰ \\ ۰ & -i \end{pmatrix} \ , \ T^{-۱}BT = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

و هم‌چنین ما یك نمایش σ از $D_۸$ به دست می‌آوریم به طوری که

$$\sigma a = \begin{pmatrix} i & ۰ \\ ۰ & -i \end{pmatrix}, \sigma b = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

نمایش‌های σ, ρ هم‌ارز هستند.

در دو موقعیت نمایش ρ با خودش هم‌ارز است؛ وقتی که ρ از درجه ۱ است و وقتی که برای تمام $g \in G$، $\rho g = I_n$.

۵.۱ هسته نمایش‌ها

فرض کنید H, G گروه‌هایی باشند که $\vartheta : G \mapsto H$ یك هم‌ریختی است. هسته‌ی ϑ را تعریف می‌کنیم به وسیله‌ی

$$\mathrm{Ker}\vartheta = \{g \in G : \vartheta g = ۱\}.$$

حال فرض کنید $\rho : G \mapsto GL_n(F)$ یك نمایش باشد. با توجه به تعریف بالا ما داریم

$$\mathrm{Ker}\rho = \{g \in G : \rho g = I_n\}.$$

توجه می‌کنیم که ρ یك زیرگروه نرمال گروه G است.

تعریف ۵.۱.۱ *نمایش $p : G \mapsto GL_۱(F)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود.*

$$\rho g = (۱) \quad , \ g \in G \text{برای تمام}$$

نمایش بدیهی از G نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱ *نمایش $\rho : G \mapsto GL_n(F)$ اگر $\mathrm{Ker}\rho = \{۱\}$ صادق نامیده می‌شود؛ اگر عنصر همانی از G فقط g باشد به صورتی که $\rho g = I_n$*

گزاره ۵.۳.۱ *یك نمایش ρ از گروه متناهی G صادق است اگر و فقط اگر $\mathrm{Im}\rho$ با G یك‌ریخت باشد.*

برهان. ما می‌دانیم $\mathrm{Ker}\rho \trianglelefteq G$ و با توجه به قضیه اول یك ریختی داریم که $G/\mathrm{Ker}\rho$ با $\mathrm{Im}\rho$ یك ریخت است. بنابراین اگر $\mathrm{Ker}\rho = \{۱\}$ آن‌گاه $G \cong \mathrm{Im}\rho$. برعکس، اگر $G \cong \mathrm{Im}\rho$، آن‌گاه این دو گروه مرتبه (متناهی) یکسان دارند. بنابراین $|\mathrm{Ker}\rho| = ۱$؛ یعنی ρ صادق است. $\square$