دانشگاه سمنان

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر)

شناسایی حلقه های ماتریسی

توسط:

خدیجه غیبی نژاد

استاد راهنما:

دکتر رحمان بهمنی سنگسری

استاد مشاور:

دکتر علی معدن شکاف

بهمن ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به :

روح پدر فداکارم

مادر دلسوزم

همسر مهربانم

و

فرزند دلبندم

تقدیر و تشکر :

در این جا بر خود لازم می‌دانم از استاد گرامی و بزرگوار جناب آقای دکتر رحمان بهمنی سنگسری که حضور شان همه امید و کلامشان آرامش بخش وجود من بود و مرا در نگارش این پا یان نامه یاری رسانده اند کمال تشکر و سپاس گزاری را داشته باشم. بی شک بدون راهنمایی ارزشمند و حمایت های ایشان، تکمیل این پایان نامه امکان پذیر نبود. از خداوند توانا، سلامت، سعادت و موفقیت روز افزون ایشان را خواستارم.

از سرکار خانم دکتر ناهید اشرفی و جناب آقای دکتر علی معدنشکاف و همچنین سرکار خانم دکتر راضیه محجوب نیز به جهت خواندن این رساله و داوری کمال تشکر را دارم و از خدای مهربان سلامتی و توفیق ایشان را خواستارم.

همچنین از تمامی اساتید بزرگوار که در طول دوره ی تحصیلی کارشناسی ارشد، مرا در تحصیل علم و معرفت و فضائل اخلاقی یاری نموده اند تقدیر و تشکر می‌نمایم.

خدیجه غیبی نژاد

۱۳۹۱

چکیده

در این پایان نامه نشان می‌دهیم:

(۱) یک حلقه، یک حلقه کامل ماتریس های $n \times n$ است اگر و تنها اگر شامل عناصری مانند f، $a_1, a_2, \cdots, a_n$ باشد به طوری که $f^n = 0$ و

$$1 = a_1 f^{n-1} + f a_2 f^{n-2} + \cdots + f^{n-1} a_n$$

(۲) شرایط زیر روی یک حلقه R معادل‌اند:

i) R یک حلقه ماتریسی کامل $n \times n$ است.

ii) R یک مجموعه کامل از واحد های ماتریسی $n \times n$، است.

iii) R جمع مستقیمی از n ایدال راست دو به دو یکریخت است.

(۳) اگر K حلقه ای غیر جابه جایی و i, j, m, n اعداد صحیح مثبت باشند، R، K ـ جبر آزاد تولید شده با عناصر b و f و روابط $b^i f^m + f^n b^j = 1$ و $f^{m+n} = 0$ و $\frac{i}{m} = \frac{j}{n}$ آنگاه R یک حلقه ماتریس های $(m+n) \times (m+n)$ غیر بدیهی است.

واژه‌های کلیدی: حلقه های ماتریسی، واحد های ماتریسی ، حلقه ماتریسی کامل، K ـ جبر آزاد.

فهرست مندرجات

فهرست علایم و اختصارات

a، b را می‌شمارد	$a\|b$
مشخصه یک حلقه	$char(R)$
ماتریسی که درایه (i,j) ـ ام آن ۱ و بقیه درایه های آن صفر است.	E_{ij}, e_{ij}
درون ریختی R ـ خطی یک مدول M	$End_R(M)$
هسته همریختی f	$ker f$
مجموعه ماتریس های $n \times n$ روی حلقه R	$M_n(R)$
بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد m و n	(m,n)
m و n نسبت به هم اولند	$(m,n) = ۱$
جمع مستقیم ایدال ها	$\oplus \sum_{i=۱}^{n} I_i$
خانواده‌ای نا تهی از زیر مدول‌های M	$\{M_i \| \ i \in I\}$
I ایدال R است	$I \lhd R$
ضریب دو جمله ای	$\binom{n}{i}$
زیر حلقه تولید شده توسط A	(A)
مرکز یک حلقه R	$C(R)$

مجموعه اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
حلقه خارج قسمتی R بر I	$\frac{R}{I}$
ایدال تولید شده توسط X	$\langle x\rangle$
مجموعه اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$
مجموعه اعداد صحیح به پیمانه n، خارج قسمتی از $\mathbb{Z}$ به پیمانه $n\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_n = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$
مجموعه چهار گان های اعداد صحیح	$\mathbb{Z}[i,j,k]$
یکریختی حلقه های R و S	$R \simeq S$
عضو a همنهشت با b به پیمانه d	$a \equiv b(mod\ d)$
نگاشت α از A به B	$\alpha : A \to B$
عضو همانی ضربی R، نگاشت همانی بر حلقه R	۱_R
ماتریس همانی	I_n, I
دلتای کرونکر	δ_{ij}
حلقه آزاد روی k تولید شده توسط $\{x_i;\ i\in I\}$	$k\langle x_i; i\in I\rangle$
حلقه عملگر های مشتق پذیر	$R[t,\delta]$
حلقه خارج قسمتی $R[t,\delta]$ بر (t^{p^n})	$\frac{R[t,\delta]}{(t^{p^n})}$
مشتق	δ
حلقه چهار گانی حقیقی	$H(R)$

پیشگفتار

سوال چترز [1] در مورد اینکه چه وقت یک حلقه می‌تواند به صورت حلقه ماتریس های کامل بیان شود انگیزه بررسی معیار هایی برای شناسایی حلقه هایی که حلقه ماتریس های کامل باشد ایجاد کرد. در سال ۱۹۸۸ ایشان مثالی از حلقه‌ای به صورت $T = \begin{pmatrix} H & pH \\ H & H \end{pmatrix}$ ارائه کرد که در آن H حلقه چهارتایی ها [2] روی اعداد صحیح موضعی سازی شده در p (p عددی اول) می‌باشد، و نشان داد که $T \cong M_۲(W)$ که W زیر حلقه ای از H می‌باشد در حالی که اگر H حلقه چهار تایی ها روی اعداد صحیح در نظر گرفته شود T حلقه ماتریس های کامل نیست.

در سال ۱۹۹۰ حلقهٔ دیگری به صورت $T(n) = \begin{pmatrix} H & nH \\ H & H \end{pmatrix}$ معرفی کرد که H حلقه چهارتایی ها روی اعداد صحیح و n عدد صحیح می‌باشد و سوال خود را به صورت زیر بیان کرد.

آیا $T(۳) \cong M_۲(W)$ و اگر چنین است حلقه W چه حلقه ای است؟

در مرجع [۴] ایشان به این سوال به صورت زیر پاسخ داد، $T(n)$ یک حلقه ماتریس های کامل است اگر و تنها اگر n عدد صحیح فرد باشد.

در سال ۱۹۹۱ رابسن [3] در مرجع [۱۱] نشان دادکه یک حلقه، حلقه ماتریس های کامل $n \times n$ می‌باشد اگر و تنها اگر f و $a_۱, \cdots, a_n$ از حلقه R چنان باشند که $f^n = ۰$ و

$$۱ = a_۱ f^{n-۱} + f a_۲ f^{n-۲} + \cdots + f^{n-۱} a_n$$

[1] Chatters
[2] quaternions
[3] Robson

این پایان نامه مشتمل بر چهار فصل است:

در فصل اول قضایا و تعاریف مقدماتی از حلقه ها و حلقه های ماتریسی کامل آورده شده است.

در فصل دوم محک هایی برای حلقه ماتریس کامل بودن آورده و ثابت شده است.

در فصل سوم حلقه های ماتریسی آزاد را معرفی کرده و به بیان چندین قضیه می‌پردازیم، و در فصل چهارم به بررسی حلقه ماتریس کامل بودن با استفاده از روابط دو عنصری و سه عنصری می‌پردازیم.

در این پایان نامه مراجع [۷] و [۱۱] به طور کامل مورد بررسی قرار گرفته اند.

فصل ۱

پیش نیاز ها و مفاهیم اولیه

در این فصل با تعاریف و قضایایی آشنا می‌شویم که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می گیرند. اثبات قضایایی که کاربرد فراوان دارند ارائه می گردد و از اثبات سایر قضایا صرف نظر می‌شود و آن ها را به منابع مورد استفاده ارجاع می‌دهیم همچنین اکثر تعاریف و مفاهیم اولیه از مراجع [۶]، [۹]، [۱۴]، [۱۶]، [۱۸]، [۱۹]، [۲۰]، [۲۱] و [۲۲] بدست آمده اند. در سراسر این پایان نامه R حلقه یکدار و شرکت پذیر و همریختی حلقه ها حافظ یک حلقه و مدول ها، مدول های یکانی می‌باشند.

۱.۱ تعاریف و قضایای اولیه

در این بخش به بیان و اثبات تعاریف و قضایایی می‌پردازیم که ما را در درک و فهم بهتر مطالب یاری رسانده و برای اثبات قضایای فصل های بعد مورد نیاز هستند.

تعریف ۱.۱.۱ عنصر $a \in R$ را پوچتوان گوییم اگر عدد صحیح مثبت n موجود باشد به قسمی که $a^n = 0$، جایی که a^n یعنی $a.a.\cdots.a$ (n عامل).

(عنصر 0 در هر حلقه R پوچتوان بوده و به آن عنصر پوچتوان بدیهی کوییم)

تعریف ۲.۱.۱ عنصر $a \in R$ را خود توان گوییم اگر $a^{۲} = a$ باشد.

قضیه ۳.۱.۱ (قضیه دو جمله ای): فرض کنیم R یک حلقه $a, b \in R$ دو عضو جابه جایی پذیر از آن باشند. در این‌صورت داریم:

$$(a+b)^n = \sum_{i=\circ}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

که در آن n عددی طبیعی است و $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

برهان: به قضیه ۲.۲.۱، فصل یک از مرجع [۱۹] مراجعه کنید. □

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه و A زیر مجموعه ای از آن باشد. در این صورت زیر حلقه تولید شده توسط A را با نماد (A) نشان می‌دهیم و عبارت است از اشتراک همه زیر حلقه های R که شامل A هستند.

به عبارت دیگر (A) کوچکترین زیر حلقه R است که شامل A است.

قضیه ۵.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه و A یک زیر مجموعه نا تهی آن است در این صورت داریم:

$$(A) = \{\sum_{i=۱}^{n} m_i X_{i۱} X_{i۲} \cdots X_{ik_i} |\ k_i, n \in \mathbb{N},\ m_i \in \mathbb{Z}, X_{i۱}, X_{i۲}, \cdots, X_{ik_i} \in A\}$$

برهان: به قضیه ۱۶.۱.۳، فصل سه از مرجع [۱۹] مراجعه کنید. □

قضیه ۶.۱.۱ (قضیه دیریکله): اگر a و b اعدادی نسبت به هم اول باشند بی نهایت عدد اول به شکل $a + nb$ وجو دارند که در آن n عدد صحیح است.

برهان: به قضیه ۱۵ صفحه ۱۱ از مرجع [۹] مراجعه کنید. □

قضیه ۷.۱.۱ (قضیه دو مجذوری): هر گاه P عددی اول باشد به طوری که $P \equiv ۱ \ (mod\ ۴)$ آن گاه اعداد طبیعی مثل z و y موجود است که $P = z^۲ + y^۲$.

برهان: به صفحه ۳ از مرجع [٦] مراجعه کنید. □

قضیه ۸.۱.۱ (قضیه ویلسون): اگر P یک عدد اول فرد باشد آن گاه $(P-۱)! \equiv -۱ \ (mod\ P)$

برهان: به صفحه ۲۵۹ از مرجع [١٦] مراجعه کنید. □

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم $H_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$، فضای برداری ۴ ـ بعدی حقیقی باشد. عناصر $H_{\mathbb{R}}$ را چهار گان های حقیقی گوییم. جمع و ضرب را در $H_{\mathbb{R}}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

جمع: جمع مولفه به مولفه است.

ضرب: فرض کنیم $(۱,۰,۰,۰) = ۱$ و $i = (۰,۱,۰,۰)$ و $j = (۰,۰,۱,۰)$ و $k = (۰,۰,۰,۱)$ بردارهای یکه $\mathbb{R}^۴$ در امتداد محورهای مختصات باشند. آن گاه هر عنصر $(x_۱,x_۲,x_۳,x_۴) \in \mathbb{R}^۴$ را می‌توان به شکل منحصر به فرد $x_۱ + x_۲ i + x_۳ j + x_۴ k$، $x_i \in \mathbb{R}$ نوشت فرض کنید.

$$v = a + bi + cj + dk$$

$$w = x + yi + zj + tk$$

به طوری که $a,b,c,d,x,y,z,t \in \mathbb{R}$ باشند. آن گاه ضرب v,w را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} v.w &= (a+bi+cj+dk).(x+yi+zj+tk) \\ &= (ax-by-cz-dt) + (ay+bx+ct-dz)i \\ &+ (az+cx+dy-bt)j + (at+dx+bz-cy)k \end{aligned}$$

جدول ضرب برای k,j,i، که در شکل (۱.۱) آمده است.

0	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

شکل ۱.۱: جدول (۱)

چهارگان های حقیقی نسبت به این جمع و ضرب تشکیل یک حلقه نا جابه جایی می‌دهند زیرا $ij = k = -ji$ است.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنیم $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح و k وj و i متغییر هایی باشند که در شرایط زیر صدق کنند:

$$i^۲ = j^۲ = k^۲ = ۱, \qquad ij = -ji = k, \qquad ki = -ik = j, \qquad jk = -kj = i$$

در این صورت مجموعه

$$\mathbb{Z}[i,j,k] = \{\alpha i + \beta j + \gamma k + \theta |\ \alpha, \beta, \gamma, \theta \in \mathbb{Z}\}$$

را مجموعه چهارتایی اعداد صحیح یا چهار گان اعداد صحیح می‌نامند.

تذکر ۱۱.۱.۱ فرض کنیم S و R دو حلقه باشند و $f : R \to S$ یک همریختی حلقه ای باشد. اگر M یک S مدول باشد آنگاه عمل ضرب $. : R \times M \to M$ را با ضابطه $r.x = f(r)x$ به M ساختار R ـ مدولی می‌دهد.

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنیم M یک R ـ مدول باشد. یک زیر مجموعه B از M را روی R مستقل خطی گوییم اگر برای هر زیر مجموعه متناهی $\{b_1, b_2, \cdots, b_r\} \subseteq B$،

$$\sum_{i=1}^{r} a_i b_i = 0; \qquad (a_i \in R) \Rightarrow a_i = 0, \forall i$$

تعریف ۱۳.۱.۱ R ـ مدول M را آزاد گوییم اگر M دارای یک پایه B باشد یعنی، B یک زیر مجموعه مستقل خطی از M باشد به قسمی که M به وسیله B روی R تولید شود. به عبارت دیگر، هر $x \in M$ را بتوان به طور منحصر به فرد به صورت $x = \sum_{b \in B} \lambda_b . b$ نوشت که $\lambda_b \in R$ و به جز تعدادی متناهی از b_i ها، $\lambda_b = 0$ باشد یعنی x ترکیب خطی از عناصر B می‌باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد مرکز حلقه R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$cent\ R = \{r \in R | \ \forall s \in R \qquad rs = sr\}$$

اگر R یکدار باشد آن گاه $centR \neq \emptyset$.

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنیم R حلقه جابه جایی و A یک حلقه دلخواه باشد منظور از یک R ـ جبر یک همریختی حلقه ایی از R به مرکز A است.

تعریف ۱۶.۱.۱ فرض کنیم K یک حلقه یکدار باشد، حلقه ی R را یک K ـ جبر نامیم هر گاه $(R, +)$ یک K ـ مدول چپ باشد و برای هر $a, b \in R$ و $k \in K$ داشته باشیم:

$$k(ab) = (ka)b = a(kb)$$

تعریف و نمادگذاری ۱۷.۱.۱ فرض کنیم R حلقه ای یکدار و شرکت پذیر باشد گوییم حلقه R از مشخصه عدد اول P است هر گاه به ازای هر $r \in R$،

$$\underbrace{Pr = r + r + \cdots + r}_{P \text{ جمله}} = 0_R$$

مشخصه یک حلقه را با $char\ (R)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۸.۱.۱ اگر R و S دو حلقه باشند آنگاه یک $(R-S)$ دو مدول، یک گروه آبلی M است به طوری که:

۱) M یک R مدول چپ و S مدول راست است.

۲) برای هر $r \in R$ و $s, m \in M$؛ $(rm)s = r(ms)$؛

تعریف ۱۹.۱.۱ فرض کنیم A و B و R حلقه های دلخواه، $\alpha : R \to A$ و $\beta : R \to B$ همریختی حلقه ها، و M یک (A, B) ـ دو مدول باشد. یک (α, β) ـ مشتق از R به M نگاشتی مانند $\delta : R \to M$ است به طوری که δ حافظ جمع باشد و در خاصیت زیر صدق کند.

۱) برای هر $x, y \in R$، $\delta(xy) = \alpha(x)\delta(y) + \delta(x)\beta(y)$.به ویژه،

اگر $A = R$ و $\alpha = id_R$ یک β ـ مشتق به صورت زیر تعریف می‌شود

۲) $\delta(xy) = x(\delta y) + (\delta x)\beta(y)$.

در حالت خاص، اگر $A = B = R$ و $\alpha = \beta = id_R$، δ را یک مشتق روی R نامیم و داریم:

۳) $\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y$.

تعریف ۲۰.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه و δ یک مشتق روی R باشد. منظور از حلقه $S = R[x;\ \delta]$ یعنی:

۱) S حلقه ای است که R را به عنوان زیر حلقه در بر دارد.

۲) x یک عضوی از S است.

۳) S یک R ـ مدول چپ آزاد با پایه $\{۱, x, x^۲, \cdots\}$ می‌باشد.

۴) برای هر $r \in R$ داریم $xr = rx + \delta(r)$.

تعریف ۲۱.۱.۱ فرض کنیم $K[x]$ حلقه چند جمله ای ها روی حلقه K باشد. فرض کنیم $\frac{d}{dx}$ مشتق معمولی روی $K[x]$ باشد. حال حلقه $K[x][t, \frac{d}{dx}]$ را یک جبر ویل روی K نامیم و با $A_1(K)$ نشان می‌دهیم. جبر ویل $A_1(K)$ توسط اعضای K، x و t به طوری که x و t با اعضای K جا به جا می‌شوند و در رابطه $xt = tx + 1$ صدق می‌کنند.

۲.۱ معرفی حلقه های ماتریسی کامل

فرض کنیم R یک حلقه و $n \geq 1$ عدد صحیح باشد. فرض کنید

$$S = M_n(R) = \{(a_{ij})|\ a_{ij} \in R,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n\}$$

مجموعه همه ماتریس های $n \times n$ با درایه‌های در R باشد، جایی که

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

جمع و ضرب S را دقیقاً مشابه جمع و ضرب ماتریس های روی R به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})\ , \qquad (a_{ij}).(b_{ij}) = (c_{ij})$$

وقتی که

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\ , \forall i, j, 1 \leq i, j \leq n.$$

طبق قضیه ۱ فصل ۷ از مرجع [۲۱] به سادگی می‌توان ثابت کرد که S یک حلقه است. این حلقه ماتریسی از مرتبه n روی R نامیده می‌شود. این حلقه یکدار است اگر وتنها اگر R یکدار باشد. اگر R

دارای عنصر یک باشد، آنگاه

$$۱ = ۱_S = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

عنصر یک S بوده و آنرا ماتریس همانی $n \times n$ نامیده و با $I_{n\times n}$ یا ساده تر I_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱ (دلتای کرونکر): تابع یا نماد δ_{ij} وابسته به اندیس های i و j که معمولاً اعداد صحیح هستند مقدار آن ۱ است اگر $i = j$، و صفر است اگر $i \neq j$.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. گوییم R حلقه ماتریس های کامل است هر گاه برای حلقه ای مانند S و عدد طبیعی مانند n، حلقه R با حلقه $M_n(S)$ یکریخت باشد.

تعریف ۳.۲.۱ مجموعه‌ای از عناصر $E = \{e_{ij} : ۱ \leq i, j \leq n\}$ در یک حلقه R یک مجموعه از واحد های ماتریسی است اگر برای هر $۱ \leq i, j, k, l \leq n$، $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$ و به علاوه مجموعه E یک مجموعه کامل از واحد ها ی ماتریسی است هرگاه $e_{۱۱} + e_{۲۲} + \cdots + e_{nn} = ۱$.

نمادگذاری ۴.۲.۱ فرض کنیم R یک حلقه یکدار و همچنین فرض کنیم n یک عدد طبیعی و $۱ \leq i, j \leq n$، E_{ij} عنصری از $M_n(R)$ باشد به قسمی که درایه (i, j) ـ ام آن ۱ و بقیه درایه های دیگر آن صفر باشد. برای $E_{kl} \in M_n(R)$ و E_{ij} حاصل ضرب زیر را داریم:

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il} & j = k \\ ۰ & j \neq k \end{cases}$$

همچنین برای $(a_{ij}) \in M_n(R)$، تساوی زیر را داریم:

$$(a_{ij}) = \sum_{i,j=۱}^{n} a_{ij}E_{ij}$$

تذکر ۵.۲.۱ برای حلقه R و برای عدد طبیعی $n \geq ۲$، حلقه $M_n(R)$ حلقه ای تعویض ناپذیر است.

قضیه ۶.۲.۱ برای یک حلقه R و عدد صحیح $n \geq ۱$ شرایط زیر معادلند.

۱) حلقه ای مانند S موجود است که $R \cong M_n(S)$؛

۲) R دارای یک مجموعه کامل از واحد های ماتریسی $\{e_{ij},\ ۱ \leq i,j \leq n\}$ است؛

۳) $R = I_۱ \oplus I_۲ \oplus \cdots \oplus I_n$ برای ایدال های مناسب I_j که دو به دو به عنوان R ـ مدول یکریخت اند.

برهان: به قضیه ۵، فصل ۷ از مرجع [۱۸] مراجعه کنید. □

قضیه ۷.۲.۱ فرض کنیم M، R ـ مدول باشد، $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده ای ناتهی از زیر مدول های M، در این صورت شرایط زیر معادل اند:

۱) $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده ای مستقل است، یعنی به ازای هر $n \geq ۱$، هر عضو از I مثل i_k و هر عضو از M_{i_k} مثل x_{i_k} از $\sum_{k=۱}^{n} x_{i_k} = ۰$ نتیجه می‌شود که به ازای هر k، $۱ \leq k \leq n$، $x_{i_k} = ۰$؛

۲) به ازای هر عضو از I مثل j، $M_j \cap (\sum_{i\in I-\{j\}} M_i) = ۰$؛

۳) هر عضو $\sum_{i\in I} M_i$ نمایش منحصر به فرد بر حسب مجموعه متناهی از اعضای M_i ها دارد.

برهان: به قضیه ۲، فصل اول از مرجع [۲۲] مراجعه کنید. □