بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض

ضربگر c-پوچ توان جبرهای لی

توسط :

ملیحه سادات بنی هاشمی

استاد راهنما :

دکتر پیمان نیرومند

استاد مشاور :

دکتر اسداله فرامرزی ثالث

شهریور۱۳۹۳

به نام خدا

ضربگرc- پوچ‌توان جبرهای لی

به وسیله ی:

ملیحه سادات بنی هاشمی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

ازدانشگاه دامغان

ارزیابی وتائیدشده توسط کمیته پایان نامه بادرجه: خوب

دکترپیمان نیرومنداستادیارریاضی محض گرایش جبردانشکده ریاضی وعلوم کامپیوتردانشگاه دامغان(استاد راهنما)

دکتراسدالله فرامرزی ثالث استادیارریاضی محض گرایش جبردانشکده ریاضیوعلوم کامپیوتردانشگاه دامغان (استادمشاور)

دکترمحسن پرویزی استادیارریاضی محض گرایش جبردانشکده دانشگاه فردوسی مشهد (استادداور)

دکترعباس جعفرزاده استادیارریاضی محض گرایش جبردانشکده دانشگاه فردوسی مشهد(استادداور)

دکترالهه ظهوریان استادیارریاضی کاربردی گرایش احتمال دانشکده ریاضی وعلوم کامپیوتردانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریورماه ۱۳۹۳

تقدیم به

پدر گرامی ام که با شرافت زندگی کردن را از او آموختم و همیشه مشوق من در طول زندگی می باشد.

برادرزاده گرامی ام سید سجاد بنی هاشمی که وجودش مایه دلگرمی من است.

پروردگارا حسن عاقبت، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر نما.

سپاسگذاری

پروردگارا، ای هستی بخش وجود، مرا به نعمات بیکرانت توان شکر نیست، الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم نه نردبانی باشد برای فزونی و تکبر، نه دستمایه ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

خداوند منان را شاکر و سپاسگزارم که با استعانت از او و الطاف بی کرانش توانستم این رساله را به پایان برسانم.

همچنین لازم می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، دکتر پیمان نیرومندکه با رهنمودهای ارزشمندشان در طول انجام این پایان نامه همراه من بودند سپاسگزاری نمایم.

چکیده

ضربگر c- پوچ‌توان جبرهای لی

به وسیله‌ی:
ملیحه سادات بنی هاشمی

فرض کنیم L یک جبر لی و F یک جبر لی آزاد با ایده‌آل R باشد. در این صورت ضربگر cـ پوچ‌توان از L برای $c \geqslant ۱$ به صورت زیر است

$$M^{(c)}(L) = (R \cap \gamma_{c+۱}(F))/\gamma_{c+۱}(R, F).$$

در این پایان‌نامه قصد داریم با بررسی بعد ضربگر cـ پوچ‌توان کران‌هایی برای ضربگر cـ پوچ‌توان جبر لی از بعد متناهی را بدست آوریم. سپس به مقایسه‌ی بعد در کران‌های بالای ضربگر cـ پوچ‌توان بپردازیم.

کلمات کلیدی: ضربگر شور، ضربگر cـ پوچ‌توان، جبر لی پوچ‌توان

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

نظریه جبرهای لی برای تحویل مسائل گروه‌های لی به مسائل جبری و استفاده از ابزارهای جبری در حل مسائل مربوط به گروه‌های لی ابداع شده است.

لی در سال ۱۸۲۴ در نروژ متولد شد. تخصص اصلی وی معادلات با مشتقات جزئی بوده است. او رساله دکتری خود را به تبدیلات خطی هندسی با عنوان تبدیلات تماسی[۱] که ابداع خود او بوده است، اختصاص داده است.

او در ضمن بررسی تأثیر روش تبدیلات تماسی بر روی روش ژاکوبی برای به‌دست آوردن دیگر جواب‌های یک معادله دیفرانسیل از روی یک جواب موجود، به ساختاری از مجموعه تبدیلات خطی دست یافت که آن را گروه تبدیلات بینهایت کوچک[۲] نامید. این ساختار در واقع گروه نبود و بعدها به افتخار او جبر لی خوانده شد. در زمستان ۷۴-۱۸۷۳ لی شروع به تکمیل نظریه خود در موضوع گروه‌های تبدیلات خطی پیوسته نمود که بعدها به گروه لی معروف شد. ویلهلم کیلینگ [۳] نیز همزمان و مستقل از لی، جبر لی مربوط به یک گروه لی را بررسی کرد.

کارهای اولیه در جبرهای لی عمدتا بر روی جبرهای لی حقیقی و مختلط متمرکز بوده است. اولین کار اساسی را کیلینگ (۱۸۸۶) انجام داد. هدف اصلی او طبقه‌بندی جبرهای لی ساده بود. او تمام آنها را به چهار رده نامتناهی و تعداد متناهی جبر لی دیگر که امروزه به جبرهای مستثنی[۴] معروفند، طبقه‌بندی کرد. البته او این کار را کامل انجام نداد و فقط شکل‌های ممکن بعد، رتبه و سیستم ریشه‌ها[۵] را بررسی کرد و شش شکل ممکن را به‌دست آورد (که البته دو تا از آنها علی‌رغم تصور خود او یکریخت بودند).

کار او را کارتان [۶] در رساله خود تکمیل کرد.

از جمله کارهایی که خود لی انجام داده بود تعریف جبر لی حل‌پذیر بود. پس از او کیلینگ نشان داد که در هر جبر لی بزرگ‌ترین ایده‌آل حل‌پذیر وجود دارد که رادیکال نامیده می‌شود. او نشان داد که

[1] Contact transformations

[2] Infintiesimal group of transformations

[3] Wilihelm Killing

[4] Exceptional algebras

[5] Root system

[6] Elie Cartan

جبر خارج قسمتی روی این رادیکال دارای رادیکال صفر است. لی جبرهای لی دارای رادیکال صفر را نیم‌ساده[1] نامید و نشان داد که آنها جمع مستقیم جبرهای لی ساده هستند.

کیلینگ نشان داد که جبر مشتق یک جبر لی حل‌پذیر از رتبه صفر است. پس از مدت کوتاهی انگل [2] نشان داد که جبرهای لی از رتبه صفر حل‌پذیر هستند. کارتان نیز در رساله خود آن‌چه را امروزه صورت کیلینگ[3] می‌نامیم صرفی، و دو محک ارائه داد که با استفاده از این مفهوم جبرهای لی حل‌پذیر و جبرهای لی نیم‌ساده را طبقه‌بندی می‌کرد.

کارتان، تمام نمایش‌های تحویل‌ناپذیر جبرهای لی ساده حقیقی یا مختلط را به‌دست آورد. تحویل‌پذیری کامل نمایش‌های خطی جبرهای لی نیم‌ساده توسط ویل [4] در سال ۱۹۲۵ ثابت شد.

بالاخره پوانکاره [5] نشان داد که اگر $\{X_i\}_{1\leq i\leq n}$ پایه‌ای برای یک جبر لی دلخواه باشد، جبر شرکت‌پذیر تولیدشده توسط $\{X_i\}$ها پایه‌ای متشکل از توابع متقارن مشخصی از $\{X_i\}$ها خواهد داشت. ماهیت اثبات در جبری بودن آن بود و منجر به تشکیل ساختار جبر پوششی جهانی[6] شد.

آغازگر مطالعه جبرهای لی روی میدان‌های غیر از R و C، ژاکوبسون [7] است. او نشان داد بیشتر نتایج قبلی در صورتی که میدان مورد نظر از مشخصه صفر باشد، برقرار است.

در این پایان‌نامه قصد داریم که بعد ضربگر cـ پوچ‌توان را به‌دست آوریم و سپس یافتن کران‌هایی برای بعد ضربگر cـ پوچ‌توان جبرهای لی پوچ‌توان از بعد متناهی و هم‌چنین تعمیمی از قضیه‌های شور را مورد بررسی قرار دهیم.

---

[1] Semisimple
[2] Engle
[3] Killing form
[4] H. Weyl
[5] Paincare
[6] Universal enveloping algebra
[7] Jacobson

فصل ۱

پیش‌نیازها

۱ـ۱ تعاریف و مفاهیم اولیه جبر لی

پس از ارائه تاریخچه‌ای مختصر از جبرهای لی اکنون به تعریف مجرد جبر لی روی میدان دلخواه و ارائه مفاهیم مورد نظر پرداخته می‌شود.

تعریف ۱ـ۱ـ۱. فرض کنید F یک میدان باشد و A یک فضای برداری روی این میدان به همراه یک نگاشت دو خطی $\underset{(x,y)\mapsto xy}{A \times A \to A}$ باشد. در این‌صورت A را یک جبر[1] می‌نامیم. به‌طوری‌که برای هر $x, y, z \in A$ و $a, b \in F$ داشته باشیم

$$a(xy) = (ax)y = x(ay)$$

بعد جبر A همان بعد A به‌عنوان فضای برداری است. جبر A با بعد متناهی است اگر A یک فضای برداری با بعد متناهی باشد.

تعریف ۱ـ۱ـ۲. فرض کنید F یک میدان باشد و L یک فضای برداری روی این میدان به همراه یک نگاشت دو خطی(براکت لی) $L \times L \to L$ باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند

۱) $[,]$ دو خطی باشد.

۲) $[x, x] = 0$

[1]Algebra

۳) برای هر $x, y, z \in L$ اتحاد ژاکوبی برقرار باشد یعنی

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = ۰ \,.$$

در این‌صورت L را یک جبر لی[1] می‌نامیم.

مثال ۱ـ۱ـ۳. فرض کنید A جبر شرکت‌پذیر دلخواهی باشد. در این‌صورت به ازای هر $a, b \in A$ حاصل‌ضرب لی a و b را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[a,b] = ab - ba \,.$$

پس A دارای ساختار جبر لی می‌باشد.

مثال ۱ـ۱ـ۴. فرض کنید $M_n(F)$ فضای ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان F باشد. به ازای هر $A, B \in M_n(F)$ حاصل‌ضرب لی را به این‌صورت تعریف می‌کنیم

$$[A,B] = AB - BA \,.$$

بنا به مثال قبل دیده می‌شود که $M_n(F)$ به همراه عمل فوق تشکیل یک جبر لی روی میدان F می‌دهد.

تعریف ۱ـ۱ـ۵. فرض کنید که L یک جبر لی باشد و $A \subseteq L$ به‌طوری‌که برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم $[x,y] \in A$. در این‌صورت A را یک زیرجبر[2] از L می‌نامیم.

مثال ۱ـ۱ـ۶. فرض کنید R یک حلقه و $[x,y] = xy - yx$ باشد. اگر S زیرحلقه‌ای از R باشد آن‌گاه $(S,[\ ,\ ]) \leq (R,[\ ,\ ])$ است.

تعریف ۱ـ۱ـ۷. فرض کنیم L و L' دو جبر لی روی میدان F باشند. در این‌صورت تبدیل خطی $\varphi : L \to L'$ را یک هم‌ریختی گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in L$ داشته باشیم:

$$\varphi[x,y] = [\varphi(x), \varphi(y)] \,.$$

جبرهای لی L و L' را همریخت گوییم هرگاه همریختی[3] $\varphi : L \to L'$ موجود باشد.

تعریف ۱ـ۱ـ۸. همریختی $\varphi : L \to L'$ را یک‌ریختی[4] گوییم. اگر $ker(\varphi) = ۰$ و $Im(\varphi) = L'$.

اگر $X \subseteq L$ آن‌گاه اشتراک تمام زیرجبرهای L را که شامل X هستند، زیرجبر تولیدشده توسط X نامیده و با نماد $\langle X \rangle$ نشان می‌دهیم. در واقع $\langle X \rangle$ کوچک‌ترین زیرجبر L شامل X است. این زیرجبر شامل تمام اعضای L است که با استفاده از دنباله‌ای متناهی از ضرب‌های فضای برداری و

[1] Lie algebra
[2] Subalgebra
[3] Homomorphism
[4] Isomorphism

حاصل‌ضرب‌های لی روی اعضای X به‌دست می‌آیند. لم زیر، مفهوم زیرجبر $\langle X \rangle$ را مشخص می‌کند.
حاصل‌ضرب لی در جبرهای لی را می‌توان به تعداد دلخواهی تعمیم داد.

فرض کنید $x_1, \ldots, x_n \in L$. در این‌صورت

$$[x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$$

حاصل‌ضرب لی از وزن n، می‌باشد. در حالت خاص

$$\underbrace{[x, y, \cdots, y]}_{n-\text{مرتبه}}$$

را با نماد $[x, {}_n y]$ نشان می‌دهیم.

اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n \subseteq L$ آن‌گاه

$$[X_1, \ldots, X_n] = [[X_1, \ldots, X_{n-1}], X_n]$$

۱ـ۲ حل‌پذیری و پوچ‌توانی جبرهای لی

تعریف ۱ـ۲ـ۱. جبر لی L را آبلی گوییم، هرگاه به ازای هر $x, y \in L$، $[x, y] = 0$.

تعریف ۱ـ۲ـ۲. فرض کنید که I یک زیرفضا از جبر لی L باشد. به‌طوری‌که برای هر $x \in I$ و $y \in L$ داشته باشیم $[x, y] \in I$. در این‌صورت I را یک ایده‌آل[1] از L می‌نامیم.

تعریف ۱ـ۲ـ۳. جبر لی L را ساده[2] نامیم. اگر برای هر ایده‌آل I از L داشته باشیم $I = 0$ یا $I = L$.

تعریف ۱ـ۲ـ۴. فرض کنید L یک جبر لی و I یک ایده‌آل از L باشد. در این‌صورت فضای برداری خارج قسمتی $L/I = \{I + x / x \in L\}$ تشکیل یک جبر لی با براکت تعریف شده در زیر می‌دهد

$$\frac{L}{I} \times \frac{L}{I} \to \frac{L}{I}$$
$$(I + x, I + y) \longmapsto I + [x, y] \ .$$

تعریف ۱ـ۲ـ۵. فرض کنید L جبر لی دلخواهی باشد. در این‌صورت قرار می‌دهیم

$$L^1 = L \ ,$$
$$L^{n+1} = [L^n, L] \ , \quad \forall n \geq 1$$

که یک سری از ایده‌آل‌ها به‌صورت زیر حاصل می‌شود

$$L^1 \supseteq L^2 \supseteq \cdots \supseteq L^n \supseteq \cdots$$

و آن را سری مرکزی پایینی[3] L نامند.

[1] Ideal
[2] Simple
[3] Lower central series

تعریف ۱ـ۲ـ۶. فرض کنید L جبر لی دلخواهی باشد. در این‌صورت قرار دهید

$$L^{(\circ)} = L$$
$$L^{(n+1)} = [L^{(n)}, L^{(n)}]\,, \quad \forall n \geq 1$$

که سری زیر به‌دست می‌آید.

$$L^{\circ} \supseteq L^{(1)} \supseteq \cdots \supseteq L^{(n)} \supseteq \cdots$$

و سری مشتق[1] L نامیده می‌شود.

اگر $L^{n+1} = \circ$، آنگاه L را پوچتوان[2] (از رده کمتر یا مساوی n) و یا اگر $L^{(n)} = \circ$ آنگاه L را حل‌پذیر[3] (از طول مشتق کمتر یا مساوی n) نامیم.

تعریف ۱ـ۲ـ۷. فرض کنید $X \subseteq L$، در این‌صورت مرکزساز[4] و ایده‌آل‌ساز[5] X در L به ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$C_L(X) = \{y \in L \big| [x,y] = \circ\,, \quad \forall x \in X\}\,,$$
$$I_L(X) = \{y \in L \big| [x,y] \in X\,, \quad \forall x \in X\}\,.$$

تعریف ۱ـ۲ـ۸. فرض کنید L جبر لی دلخواهی باشد. در این صورت مرکز L که با $Z(L)$ نشان می‌دهیم تعریف می‌کنیم

$$Z(L) = \{x \in L \big| [x,y] = \circ \quad \forall y \in L\}$$

تعریف ۱ـ۲ـ۹. فرض کنید L جبر لی دلخواهی باشد. قرار دهید $Z_\circ(L) = Z(L)$ و $Z_n(L)$ را ایده‌آلی از L در نظر بگیرید به قسمی که $Z\big(L/Z_{n-1}(L)\big) = Z_n(L)/Z_{n-1}(L)$. در این‌صورت

$$Z_1(L) \subseteq Z_2(L) \subseteq \cdots \subseteq Z_n(L) \subseteq \cdots$$

را سری مرکزی بالایی[6] L نامیم.

تعریف ۱ـ۲ـ۱۰. سری متناهی از زیرجبرهای L به‌صورت

$$\circ = L_\circ \leq L_1 \leq \ldots \leq L_n = L$$

به قسمی که $n \in \mathbb{N}$ و $[L_{i+1}, L_i] \subseteq L_i$، یک سری مرکزی[7] نامیده می‌شود.

تعریف ۱ـ۲ـ۱۱. زیرجبر فراتینی از یک جبر دلخواه L، اشتراک تمام زیربرج‌های ماکسیمال L است. و اگر L هیچ زیرجبر ماکسیمالی نداشته باشد، آنگاه زیرگروه فراتینی برابر خود L می‌باشد و

---

[1] Derived series
[2] Nilpotent
[3] Solvable
[4] Centerlizer
[5] Idealizer
[6] Upper central series
[7] Central series

آن را با نماد $\phi(L)$ [1] نشان می‌دهیم.

۱ـ۳ ضربگر cـ پوچ‌توان

فرض کنید $0 \to R \to F \to L \to 0$ یک نمایش آزاد از جبر لی L باشد که در آن F یک جبر لی آزاد است. ضربگر cـ پوچ‌توان اولین بار توسط مهدی ارسخان [2] به‌صورت زیر مطرح شد

$$M^{(c)}(L) = \big(R \cap \gamma_{c+1}(F)\big)/\gamma_{c+1}(R,F)$$

که در آن $\gamma_{c+1}(F)$، $(c+1)$ـامین جمله از سری مرکزی پایینی F است، $\gamma_1(R,F) = R$ و $\gamma_{c+1}(R,F) = [\gamma_c(R,F),F]$. این تعریف مشابه تعریف بئر در گروه‌ها می‌باشد مراجع [۱۶] و [۱۵] و [۱۳] و [۱] را ببینید. در حالتی که $c = 1$ باشد داریم

$$M^{(1)}(L) = M(L) = (R \cap F^2)/[R,F]$$

که مفهوم ضربگر شور می‌باشد و اولین بار توسط شور [3] مطرح شد.

---
[1] Frattini subalgebra
[2] Mehdi Araskhan
[3] Schur

فصل ۲

بعد ضربگر cـ پوچ‌توان

۲ـ۱ مقدمات

تعریف ۲ـ۱ـ۱. فرض کنید X یک مجموعه و L یک جبر لی باشد. در این صورت جبر لی L آزاد روی X گفته می‌شود اگر برای تابع $i : X \to L$ موجود باشد به طوری که برای هر جبر A و هر تابع $f : X \to A$ همریختی یکتایی $g : L \to A$ یافت شود که $goi = f$. (goi نماد ترکیب دو تابع g و i است).

تعریف ۲ـ۱ـ۲. فرض کنید F یک جبر لی آزاد روی مجموعه $\{x_۱, \dots, x_d\}$ باشد. در این‌صورت جابجاگرهای پایه در F به‌طور استقرایی تعریف می‌شود و مولدهای $x_۱, \dots, x_d$ جابجاگرهایی به طول یک هستند و به طریق زیر مرتب می‌شوند

$$x_i < x_j \quad \text{اگر} \quad i < j$$

اگر همه جابجاگرهای پایه c_i از طول کمتر از k که $k > ۱$ و عدد صحیح باشد پایه جابجاگرها به طول k به فرم $[c_i, c_j]$ می‌باشد که مجموع طول c_i و c_j ، k است.

شیرشو[1] در [۸،۹،۲۲] نشان می‌دهد که تعداد پایه جابجاگرها روی X به طول n که با $\ell_d(n)$ نشان داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\ell_d(n) = \frac{۱}{n} \sum_{m|n} \mu_{(m)} d^{n/m}$$

[1] Shirsho

که $\mu_{(m)}$ تابع موبیوس می‌باشد به‌طوری‌که $\mu(1) = 1$ و اگر k بر مربع عددی بزرگ‌تر از یک بخش‌پذیر باشد $\mu(k) = 0$. در غیر این‌صورت $\mu(p_1 \dots p_s) = (-1)^s$ که $p_1, \dots, p_s$ اعداد اول مجزا هستند.

طبق فرضیات و نمادگذاری‌های قبل، $\gamma_n(F)/\gamma_{n+1}(F)$ جبر لی آبلی از بعد $\ell_d(n)$ است و هر عضو به شکل $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}]$ که $x_{i_j} \in X$ و $1 \leq i \leq j$ یک ترکیب خطی روی X به طول n می‌باشد.

لم ۲ـ۱ـ۳. فرض کنید L یک جبر لی از بعد n باشد در این‌صورت $\dim M^{(c)}(L) = \ell_n(c+1)$ و $\dim M(L) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

برهان. فرض کنیم F یک جبر لی آزاد با رتبه n باشد. به وضوح F/F^2 یک جبر لی از بعد n می‌باشد. پس داریم

$$M^{(c)}(L) = \frac{\big(R \cap \gamma_{c+1}(F)\big)}{\gamma_{c+1}(R,F)} .$$

چون $R = F^2 = \gamma_2(F)$ پس

$$M^{(c)}(L) = \frac{\gamma_2(F) \cap \gamma_{c+1}(F)}{\gamma_{c+1}\big(\gamma_2(F), F\big)} .$$

اما می‌دانیم $\gamma_{c+1}\big(\gamma_2(F,F)\big) = \big[\gamma_2(F), \underbrace{F, \dots, F}_{c \text{ تا}}\big] = \gamma_{c+2}(F)$

و در نتیجه

$$M^{(c)}(L) = \frac{\gamma_{c+1}(F)}{\gamma_{c+2}(F)} .$$

برای اثبات رابطه $\dim M(L) = \frac{1}{2}n(n-1)$ داریم

$$\begin{aligned} \ell_n(2) &= \frac{1}{2}\sum_{m \mid 2} \mu(m) n^{2/m} = \frac{1}{2}\big(\mu(1)n^2 + \mu(2)n'\big) \\ &= \frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{2}n(n-1) \end{aligned}$$

$\square$

لم ۲ـ۱ـ۴. فرض کنید L یک جبر لی با نمایش آزاد $0 \to R \to F \to L \to 0$ باشد. اگر S ایده‌الی در F باشد که $N \cong S/R$، در این‌صورت دنباله‌های زیر دقیق هستند.

الف. $0 \to \dfrac{R \cap \gamma_{c+1}(S,F)}{\gamma_{c+1}(R,F)} \xrightarrow{\gamma} M^{(c)}(L) \xrightarrow{\beta} M^{(c)}(L/N) \xrightarrow{\alpha} \dfrac{N \cap \gamma_{c+1}(L)}{\gamma_{c+1}(N,L)} \to 0$

ب. $\big(L/L^2\big)_{ab}{}^{c} \otimes N_{ab} \to M^{(c)}(L) \to M^{(c)}\big(L/N\big) \to N \cap \gamma_{c+1}(L) \to 0$، که N

مرکزی می‌باشد و $N_{ab} = N/[N, N]$ و $M^c \otimes N = \underbrace{M \otimes \cdots \otimes M}_{\text{بار} - c} \otimes N$

برهان. الف. برای اثبات دقیق‌بودن باید نشان دهیم ، $Im\gamma = ker\beta$، $Im\beta = ker\alpha$ و . از آن‌جا که طبق فرضیات $L/N \cong F/S$ و $M^{(c)}(L) = \dfrac{R \cap \gamma_{c+1}(F)}{\gamma_{c+1}(R, F)}$ پس داریم $M^{(c)}(L/N) = \dfrac{S \cap \gamma_{c+1}(F)}{\gamma_{c+1}(S, F)}$. حال نگاشت‌های γ, β, α را تعیین می‌نماییم.

$$\alpha : M^{(c)}(L/N) \to \frac{N \cap \gamma_{c+1}(L)}{\gamma_{c+1}(N, L)}$$

$$x + \gamma_{c+1}(S, F) \longmapsto x + \gamma_{c+1}(S, F) + R \ ,$$

$$\beta : M^{(c)}(L) \to M^{(c)}(L/N)$$

$$x + \gamma_{c+1}(R, F) \longmapsto x + \gamma_{c+1}(S, F)$$

و

$$\gamma : \frac{R \cap \gamma_{c+1}(S, F)}{\gamma_{c+1}(R, F)} \to M^{(c)}(L)$$

$$x + \gamma_{c+1}(R, F) \longmapsto x + \gamma_{c+1}(R, F) \ .$$

نشان می‌دهیم $Im\gamma = ker\beta$. می‌دانیم $Im\gamma = R \cap \gamma_{c+1}(S, F)/\gamma_{c+1}(R, F)$ بنابراین

$$\begin{aligned} ker\beta &= \{x + \gamma_{c+1}(R, F) : \beta\big(x + \gamma_{c+1}(R, F)\big) = \gamma_{c+1}(S, F)\} \\ &= \{x + \gamma_{c+1}(R, F) : x + \gamma_{c+1}(S, F) = \gamma_{c+1}(S, F)\} \end{aligned}$$

و این معادل این است که $x \in \gamma_{c+1}(S, F)$ باشد. پس

$$ker\beta = \frac{R \cap \gamma_{c+1}(F) \cap \gamma_{c+1}(S, F)}{\gamma_{c+1}(R, F)} = \frac{R \cap \gamma_{c+1}(S, F)}{\gamma_{c+1}(R, F)}$$

بنابراین $Im\gamma = ker\beta$. از آن‌جا که

$$\begin{aligned} ker\alpha &= \{x + \gamma_{c+1}(S, F) : \alpha\big(x + \gamma_{c+1}(S, F)\big) = \gamma_{c+1}(S, F) + R\} \\ &= \{x + \gamma_{c+1}(S, F) : x + \gamma_{c+1}(S, F) + R = \gamma_{c+1}(S, F) + R\} \end{aligned}$$

که معادل با $x \in \gamma_{c+1}(S, F) + R$ است. پس

$$ker\alpha = \frac{\big(S \cap \gamma_{c+1}(F)\big) \cap \big(\gamma_{c+1}(S, F) + R\big)}{\gamma_{c+1}(S, F)}$$

و چون $Im\beta = \dfrac{R \cap \gamma_{c+1}(F) + \gamma_{c+1}(S, F)}{\gamma_{c+1}(S, F)}$. واضح است که $ker\alpha = Im\beta$. بنابراین دنباله (الف) دقیق می‌شود.

ب. چون N مرکزی و $[S, F] \subseteq R$ پس روابط زیر را داریم

$$\begin{aligned} \gamma_{c+1}(S, F^2 + R) &\subseteq \gamma_{c+1}(S, R) + \gamma_{c+1}(S, F^2) \\ &\subseteq \gamma_{c+1}(R, F) + \gamma_{c+1}(S, [F, F]) \\ &\subseteq \gamma_{c+1}(R, F) \ . \end{aligned}$$

حال نگاشت دوخطی $\alpha : \frac{F}{F^{2}+R} \times \cdots \times \frac{F}{F^{2}+R} \times \frac{S}{R} \to \frac{R \cap \gamma_{c+1}(F)}{\gamma_{c+1}(R,F)}$ همریختی زیر را القا می‌کند

$$\alpha^{*} = \frac{F}{(F^{2}+R)^{c}} \otimes S/R \to \frac{R \cap \gamma_{c+1}(F)}{\gamma_{c+1}(R,F)}$$

به‌طوری‌که $Im\alpha^{*} = \gamma_{c+1}(S,F)/\gamma_{c+1}(R,F)$. بنابراین طبق قسمت (الف)، حکم اثبات می‌شود.

□

نتیجه ۲ــ۱ــ۵. فرض کنید N یک ایده‌آل از جبر لی L باشد. در این‌صورت

الف)
$$\dim M^{(c)}(L) + \dim \big(N \cap \gamma_{c+1}(L)\big) = \dim M^{(c)}(\frac{L}{N}) + \dim \big(\gamma_{c+1}(N,L)\big) + \dim \big(R \cap \gamma_{c+1}(S,F)/\gamma_{c+1}(R,F)\big)$$

ب)
$$\dim M^{(c)}(L) + \dim(N \cap \gamma_{c+1}(L)\big) = \dim M^{(c)}(\frac{L}{N}) + \dim \frac{\gamma_{c+1}(S,F)}{\gamma_{c+1}(R,F)}$$

ج)
$$\dim M^{(c)}(L) + \dim \big(N \cap \gamma_{c+1}(L)\big) \leq \dim M^{(c)}\frac{L}{N} + \dim \big(\frac{L}{L^{2}}\big)^{c}_{ab} \otimes N_{ab}$$

برهان. الف) بنا به لم ۲ــ۱ــ۴ قسمت (الف) واضح است.

ب) بنا بر لم ۲ــ۱ــ۴، داریم

$$\begin{aligned}\dim M^{(c)}(L) &= \dim ker\beta + \dim Im\beta \\ &= \dim Im\gamma + \dim Im\beta\ .\end{aligned}$$

چون $Im\gamma = \frac{R \cap \gamma_{c+1}(S,F)}{\gamma_{c+1}(R,F)}$ پس خواهیم داشت

$$\dim M^{(c)}(L) = \dim \big(\frac{R \cap \gamma_{c+1}(S,F)}{\gamma_{c+1}(R,F)}\big) + \dim Im\beta \tag{۱}$$

حال چون

$$\begin{aligned}\dim M^{(c)}(L/N) &= \dim ker\alpha + \dim Im\alpha \\ &= \dim Im\beta + \dim \big(\frac{N \cap \gamma_{c+1}(L)}{\gamma_{c+1}(N,L)}\big)\end{aligned} \tag{۲}$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که

$$\dim M^{(c)}(L) - \dim \frac{R \cap \gamma_{c+1}(S,F)}{\gamma_{c+1}(R,F)} = \dim M^{(c)}(\frac{L}{N}) - \dim \big(\frac{N \cap \gamma_{c+1}(L)}{\gamma_{c+1}(N,L)}\big)$$

بنابراین

$$\dim M^{(c)}(L) + \dim N \cap \gamma_{c+1}(L) = \dim M^{(c)}(\frac{L}{N}) + \dim \gamma_{c+1}(N,L) + \dim \frac{R \cap \gamma_{c+1}(S,F)}{\gamma_{c+1}(R,F)}$$

چون $L=F/R$ و $N=S/R$ پس

$$\begin{aligned}\gamma_{c+1}(N,L)&=\gamma_{c+1}(S/R,F/R)\\&=\big(\gamma_{c+1}(S,F)\big)+R/R\end{aligned}$$

که یکریخت با $\dfrac{\gamma_{c+1}(S,F)}{R\cap\gamma_{c+1}(S,F)}$ می‌باشد. بنابراین

$$\dim M^{(c)}(L)+\dim\big(N\cap\gamma_{c+1}(L)\big)=\dim M^{(c)}(\frac{L}{N})+\dim\frac{\gamma_{c+1}(S,F)}{\gamma_{c+1}(R,F)}$$

ج. بنا به لم ۲ـ۱ـ۴ قسمت (ب) واضح است. $\square$

تعریف ۲ـ۱ـ۶. فرض کنید $L=L^1\supset L^2\supset\cdots\supset L^c\supset L^{c+1}=0$ سری مرکزی پایینی از جبر لی پوچ‌توان L باشد. گوییم L از کلاس پوچ‌توانی c است اگر c کوچک‌ترین عددی باشد که $L^{c+1}=0$ بعلاوه اگر $\dim\dfrac{L^j}{L^{j+1}}=1$ برای $j=2,3,\ldots$ و $\dim\dfrac{L}{L^2}=2$ می‌گوییم L از کلاس ماکسیمال است.

نتیجه ۲ـ۱ـ۷. فرض کنید L یک جبر لی پوچ‌توان با بعد متناهی n و کلاس $c+1$ باشد. در این‌صورت

$$\dim M^{(c)}(L)\le\ell_{n-1}(c+1)+2^c-1\,.$$

برهان. طبق [۲۰] قسمت (الف) داریم

$$\dim\big(M^{(c)}(L)\big)+\dim\big(\gamma_{c+1}(L)\big)\le\ell_n(c+1)\,. \tag{۳}$$

و از نتیجه قبل داریم

$$\dim M^{(c)}(L)+\dim\big(N\cap\gamma_{c+1}(L)\big)\le\dim M^{(c)}\big(\frac{L}{N}\big)+\dim\big(\frac{L}{L^2}\big)^c_{ab}\otimes N_{ab}\,. \tag{۴}$$

حال قرار می‌دهیم $N=Z(L)$ پس خواهیم داشت

$$\gamma_{c+1}(L)\le N\,.$$

و رابطه (۴) به‌صورت زیر خواهد بود

$$\dim M^{(c)}(L)+\dim\big(\gamma_{c+1}(L)\big)\le\dim M^{(c)}\big(\frac{L}{Z(L)}\big)+\dim\big(\frac{L}{L^2}\big)^c_{ab}\otimes z(L)\,.$$

اما می‌دانیم $\dim\big(\frac{L}{L^2}\big)^c_{ab}=2$ و $\dim\big(\gamma_{c+1}(L)\big)=\dim Z(L)=1$. بنابراین داریم

$$\dim M^{(c)}(L)\le\dim M^{(c)}\big(\frac{L}{Z(L)}\big)+2^c-1\,.$$

و

$$\dim M^{(c)}\big(\frac{L}{Z(L)}\big)+\dim\gamma_{c+1}\big(\frac{L}{Z(L)}\big)\le\ell_n(c+1)\,.$$

چون $\dim \gamma_{c+1}\big(\frac{L}{Z(L)}\big) = 0$ پس $\dim M^{(c)}(L) \leq \ell_n(c+1) + 2^c - 1$ و برهان قضیه کامل می‌شود. $\square$

۲ـ۲ کران‌هایی برای $\dim M^{(c)}(L)$ براساس فاکتورهای سری مرکزی

لم ۲ـ۲ـ۱. فرض کنید L یک جبر لی از بعد متناهی همراه با ایده‌آل N باشد. فرض کنید $0 \to R \to F \to L \to 0$ نمایش آزادی از L و $N \cong S/R$ برای ایده‌آل S از جبر لی آزاد F باشد. در این‌صورت $\gamma_{c+1}(S,F)/\big(\gamma_{c+1}(R,F) + \gamma_{c+1}([F,S],F) + \gamma_{c+1}(S)\big)$تصویر همریختی از $\big(L/N\big)^c_{ab} \otimes N_{ab}$ است.

برهان. نگاشت θ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\theta : L/\underbrace{(L^2+N) \times \cdots \times L((L^2+N)}_{c-\text{بار}} \times N/N^2 \to \frac{\gamma_{c+1}(S,F)}{\gamma_{c+1}(R,F) + \gamma_{c+1}([F,S],F) + \gamma_{c+1}(S)}$$

$$\theta\big(f_1 + (F^2+S), \ldots, f_c + (F^2+S), x + (S^2+R)\big) \longmapsto [x, f_1, \ldots, f_c] + T$$

که $f_c \in F ,\ldots, T = \big(\gamma_{c+1}(R,F) + \gamma_{c+1}([F,S],F) + \gamma_{c+1}(S)\big)$ و $x \in S$ می‌باشد. توجه داریم که $L/(L^2+N) \times N/N^2 \cong F/(F^2+S) \times S/(S^2+R)$. حال ادعا می‌کنیم که θ خوش‌تعریف است. فرض کنید به ازای هر $i = 1, \ldots, c$، $f'_1 \equiv f_1$ به پیمانه (F^2+S) و $x \equiv x'$(به پیمانه S^2+R). بنابراین به ازای هر $i = 1, \ldots, c$، $f'_c = f_c + g_c + s_c$ و همچنین $x' = x + s' + r$ که در آن $g_i \in F^2$، $s_i \in S$، $r \in R$ و $s' \in S^2$. نتیجه می‌شود که $[x', f'_1, \ldots, f'_c] \equiv [x, f_1, \ldots, f_c]$ به پیمانه $\gamma_{c+1}(R,F) + \gamma_{c+1}\big([F,S],F\big) + \gamma_{c+1}(S)\big)$. پس θ خوش‌تعریف است. بنابراین همریختی منحصر به فرد θ^* به شکل زیر وجود دارد

$$\theta^* : L/\underbrace{(L^2+N) \otimes \cdots \otimes L/(L^2+N)}_{c-\text{بار}} \otimes N/N^2 \to \Big(\frac{\gamma_{c+1}(S,F)}{\gamma_{c+1}(R,F) + \gamma_{c+1}\big([F,S],F\big) + \gamma_{c+1}(S)}\Big)$$

به‌طوری‌که

$$Im\theta^* = \gamma_{c+1}(S,F)/\gamma_{c+1}(R,F) + \gamma_{c+1}\big([F,S],F\big) + \gamma_{c+1}(S)\big)$$

و لم اثبات می شود. $\square$

لم ۲ـ۲ـ۲. فرض کنید N و H ایده‌آل‌هایی از جبر لی L و $\cdots \supseteq N_1 \supseteq N = N_0$ یک زنجیر از ایده‌آل‌های L باشد به‌طوری‌که برای هر $i = 1, 2, \cdots$، $[N_i, L] \subseteq N_{i+1}$. در این‌صورت برای هر