بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی (آنالیز)

الحاقهای عملگرهای ترکیبی کسری خطی روی فضای دیریکله

توسط :

غلامرضا بازیار

استاد راهنما :

دکتر بهرام خانی رباطی

خرداد ۱۳۸۷

به نام خدا

الحاقهای عملگرهای ترکیبی کسری خطی روی فضای دیریکله

به وسیله‌ی :

غلامرضا بازیار

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی

از فعالیتهای تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

ریاضی-آنالیز

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: .... بسیار خوب ....

دکتر بهرام خانی رباطی،دانشیار بخش ریاضی (رئیس کمیته)..

دکتر بهمن طباطبایی، دانشیار بخش ریاضی..

دکتر کریم هدایتیان، دانشیار بخش ریاضی ....

خرداد ۱۳۸۷

تقدیم به:

پدر و مادر دلسوز و زحمتکشم.

سپاسگزاری

اینک که به یاری خداوند بزرگ و مهربان مرحله دیگری از تحصیل و زندگی را با موفقیت به پایان می‌رسانم لازم است که از استاد بزرگوار و ارجمند دکتر بهرام خانی رباطی که از راهنمایی‌ها و همکاریهای مشفقانه‌ی ایشان در مراحل مختلف تهیه این پایان نامه بهره بردم صمیمانه تشکر و قدردانی کنم همچنین از اساتید محترم دکتر بهمن طباطبایی و دکتر کریم هدایتیان که زحمت مطالعه این پایان نامه را به عهده گرفتند تشکر می کنم.

چکیده

الحاقهای عملگرهای ترکیبی کسری خطی روی فضای دیریکله

به وسیله‌ی:

غلامرضا بازیار

هدف ما در این پایان نامه پیدا کردن الحاقهای عملگرهای ترکیبی کسری خطی روی فضای دیریکله است، فصل اول شامل تعاریف و قضایای مقدماتی است که در فصلهای بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند در فصل دوم نشان می دهیم که نرم یک عملگر ترکیبی روی فضای کلاسیک هاردی را نمی توان تنها با به کار بردن مجموعه توابع هسته روی فضای هاردی محاسبه کردکه پاسخ سوال مطرح شده به وسیله‌ی کاون و مک‌کلوئر است،در فصل سوم نشان می دهیم که الحاق یک عملگر ترکیبی کسری خطی روی فضای کلاسیک دیریکله یک عملگر ترکیبی کسری خطی دیگر به علاوه‌ی یک عملگر از رتبه دو است، همچنین نرم هر عملگر ترکیبی کسری خطی روی فضای دیریکلهی به پیمانه توابع ثابت درفصل سوم محاسبه شده اند.

فهرست

عنوان | صفحه

فصل اول

مقدمات

مقدمات

تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف (۱-۱): قرص یکه باز با D نشان داده می‌شود، یعنی $\mathrm{D}=\{z:|z|<1\}$.

تعریف (۱-۲): فضای همه توابع تحلیلی روی قرص یکه باز با $H(\mathrm{D})$ نمایش داده می‌شود.

تعریف (۱-۳): فرض کنید T یک عملگر خطی کراندار از فضای هیلبرت H به خودش باشد، نرم T اندازه‌ای است که مشخص می‌کند دیسک واحد چه مقدار به وسیله T کش داده شده است.

و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tf\|:\|f\|\le 1\}\\ &= \sup\{\|T^{*}f\|:\|f\|\le 1\}\end{aligned}$$

در اینجا نرم سمت راست تساوی به وسیله ضرب داخلی روی H تولید شده است و T^{*} همان الحاق $T(adjo\,\mathrm{int})$ است.

تعریف (۱-۴): فرض کنید $H(\mathrm{D})$ فضای همه توابع تحلیلی روی قرص یکه باز باشد، هر تابع $\varphi\in H(\mathrm{D})$ که $\varphi(\mathrm{D})\subset\mathrm{D}$ یک عملگر ترکیب خطی C_{φ} روی $H(\mathrm{D})$ تولید می‌کند که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C_{\varphi}f=f\circ\varphi$$

قضیه (۱-۵): اصل تبعیت لیتلود (Littlewood's subordination principle):

فرض کنید φ یک خود نگاشت (self- map) تحلیلی از D باشد، که $\varphi(0)=0$، آنگاه برای هر $f\in H^{2}$، $\|C_{\varphi}f\|\le\|f\|$, $C_{\varphi}f\in H^{2}$.

برای اثبات به منبع [۲۱] صفحه ۱۳ رجوع شود.

تعریف (۱-۶): فضای هاردی H^2 عبارت است از همه توابع تحلیلی روی D به طوریکه مجموع مجذورهای ضرایب آن در بسط تیلور حول نقطه صفر متناهی باشد.

تعریف (۱-۷): فرض کنید $f: \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ باشد، در این صورت گوییم f در $e^{i\theta}$ دارای حد شعاعی α است هرگاه:

$$\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) = \alpha$$

تعریف (۱-۸): در فضای هاردی ضرب درونی توابع $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$< f,g >= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b}_n$$

و لذا نرم f به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\|f\|^2 = \langle f,f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{a}_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$$

همچنین نرم f به صورت زیر هم تعریف می شود:

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f^*(e^{i\theta})\right|^2 d\theta$$

که f^* حد شعاعی تابع f را نشان می‌دهد.

تعریف (۱-۹): تابع هسته (reproducing kernel) برای H^2:

برای یک $\alpha \in \mathrm{D}$ ،تابع هسته در α که با k_α نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می-شود:

$$k_\alpha(z) = \frac{1}{1-\overline{\alpha}z}$$

لم (۱-۱۰): برای هر $f \in H^2$, $f(\alpha) =< f,k_\alpha >$

اثبات: فرض کنید $f \in H^2 , f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ که $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$

$$k_\alpha(z) = \frac{1}{1-\overline{\alpha}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\alpha}^n z^n$$

و لذا داریم

$$< f,k_\alpha >= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\overline{\overline{\alpha}})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\overline{\overline{\alpha}^n})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n = f(\alpha)$$

قضیه(۱-۱۱): هر عملگر ترکیبی از H^2 به H^2 کراندار است.

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم که به ازای هر $P \in D$، عملگر C_{α_p} (کـه $\alpha_p(z)=\dfrac{p-z}{1-\bar{p}z}$ یک خودریختی است که D را به D می‌برد. و p را بـا مبـدأ جابـه‌جـا مـی‌کنـد و همچنـین معکوس خودش می‌باشد) روی H^2 کراندار است. بعلاوه $\left\|C_{\alpha_p}\right\| \le \left(\dfrac{1+|p|}{1-|p|}\right)^{\frac{1}{2}}$

فرض کنید f در یک همسایگی از قرص یکه بسته تحلیلـی باشـد، بنـابراین در رابطـه $\|f\|^2=\lim\limits_{r\to 1^-}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta$ حد می‌تواند از علامت انتگرال عبور کند(با استفاده از همگرایـی یکنواخـت بـسط مـک لـوران f.) پـس

بنابراین: $\|f\|^2=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta$ $\quad \left\|C_{\alpha_p}f\right\|^2=\left\|fo\alpha_p\right\|^2=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(\alpha_p\left(e^{i\theta}\right)\right)\right|^2 d\theta$

حال با تغییر متغیر $\alpha_p\left(e^{i\theta}\right)=e^{it}$ رابطه اخیر برابر است با

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(e^{it}\right)\right|^2\left|\alpha_p'\left(e^{it}\right)\right|dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(e^{it}\right)\right|^2\frac{1-|p|^2}{\left|1-\bar{p}e^{it}\right|^2}dt\le\frac{1-|p|^2}{(1-|p|)^2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(e^{it}\right)\right|^2dt\right)=\frac{1+|p|}{1-|p|}\|f\|^2$$

چون این نامساوی برای هر تابع تحلیلی در یک همسایگی از قرص یکه بسته برقرار است برای هر تابع تحلیلی در یک همسایگی از Dاز جمله برای چندجمله ایها برقرار است و چون چند جمله ایها در H^2 چگالندپس برای سایر توابع نیز درست است و لذا

$$\|C_\alpha\|^2\le\frac{1+|p|}{1-|p|}$$

پس

$$\|C_\alpha\|\le\left(\frac{1+|p|}{1-|p|}\right)^{\frac{1}{2}}$$

اکنون نشان می‌دهیم که اگر φ یک خودنگاشت تحلیلی از D باشد، آنگاه C_φ یک عملگر کراندار روی H^2 است و $\|C_\varphi\|\le\sqrt{\dfrac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}$.

قرار دهید $\psi=\alpha_p o\varphi$ که ψ، D را به خودش می‌برد و چون $p=\varphi(0)$، ψ مبدأ را ثابت نگه می‌دارد و از آنجا که α_p معکوس خودش می‌باشد بنابراین $\varphi=\alpha_p o\varphi$ و لذا $C_\varphi=C_\psi C_{\alpha_p}$،

اصل تبعیت لیتلوود نشان می‌دهد C_ψ کراندار است، از طرفی گفتیم که C_{α_p} هم کراندار است و چون C_φ برابر حاصلضرب دو عملگر کراندار است، پس خود C_φ هم کراندار است و داریم:

$$\|C_\varphi\| \le \|C_\psi\| \|C_{\alpha_p}\| \le \sqrt{\frac{1+|p|}{1-|p|}}$$

چون $p=\varphi(0)$ پس

$$\|C_\varphi\| \le \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}.$$

قضیه (۱-۱۲): فرض کنید φ قرص D را به صورت تحلیلی در D بنگارد، آنگاه

$$C_\varphi^*(k_\alpha) = k_{\varphi(\alpha)}$$

اثبات: برای یک $f \in H^2$ دلخواه داریم

$$< f, C_\varphi^* k_\alpha > = < C_\varphi f, k_\alpha > = < f \circ \varphi, k_\alpha >$$

طبق لم (۱-۱۰)

$$= (f \circ \varphi)(\alpha)$$

$$= f(\varphi(\alpha)) = < f, k_{\varphi(\alpha)} >$$

پس

$$< f, C_\varphi^* k_\alpha > - < f, k_{\varphi(\alpha)} > = 0$$

یا

$$< f, C_\varphi^* k_\alpha - k_{\varphi(\alpha)} > = 0$$

چون رابطه فوق برای هر $f \in H^2$ دلخواه برقرار است با انتخاب $f = C_\varphi^* k_\alpha - k_{\varphi(\alpha)}$ داریم:

$$< C_\varphi^* k_\alpha - k_{\varphi(\alpha)}, C_\varphi^* k_\alpha - k_{\varphi(\alpha)} > = 0$$

یعنی

$$\|C_\varphi^* k_\alpha - k_{\varphi(\alpha)}\|^2 = 0$$

در نتیجه

$$\|C_\varphi^* k_\alpha - k_{\varphi(\alpha)}\| = 0$$

طبق تعریف نرم پس:

$$C_\varphi^* k_\alpha - k_{\varphi(\alpha)} = 0$$

لذا

$$C_\varphi^* k_\alpha = k_{\varphi(\alpha)}$$

لم (۱-۱۳): اگر φ نمایش دهنده یک تابع تحلیلی از D به D باشد و C_φ نمایش دهنده عملگر ترکیبی متناظر با آن روی فضای هاردی H^2 باشد، یک تقریب پایین برای نرم C_φ به صورت زیر به دست می آید.

$$\|C_\varphi\|^2 \geq \|C_\varphi^* k_0\|^2 = \frac{1}{1-|\varphi(0)|^2}$$

اثبات: با توجه به اینکه اگر $\|f\| = 1$ آنگاه $\|C_\varphi\| = \|C_\varphi^*\| \geq \|C_\varphi^* f\|$ و اینکه $\|k_0\| = 1$

پس

$$\|C_\varphi\| \geq \|C_\varphi^* k_0\|$$

لذا

$$\|C_\varphi\|^2 \geq \|C_\varphi^* k_0\|^2$$

از طرفی طبق قضیه (۱-۱۲) و لم (۱-۱۰)

$$\|C_\varphi^* k_0\|^2 = \|k_{\varphi(0)}\|^2 = \langle k_{\varphi(0)}, k_{\varphi(0)} \rangle$$
$$= k_{\varphi(0)}(\varphi(0)) = \frac{1}{1-\varphi(0)\overline{\varphi(0)}} = \frac{1}{1-|\varphi(0)|^2}$$

پس قسمت تساوی رابطه بالا هم بر قرار است.

قضیه (۱-۱۴): فرض کنید φ، D را به صورت تحلیلی به درون خودش بنگارد، آنگاه:

$$\frac{1}{1-|\varphi(0)|^2} \leqslant \|C_\varphi\|^2 \leqslant \frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}$$

نامساوی اول در لم (۱-۱۳) ثابت شده برای اثبات طرف دیگر به منبع [۶] صفحه ۱۲۳ مراجعه شود.

قضیه (۱-۱۵): اگر $\varphi(z) = sz + t$ برای $|s| + |t| \leq 1$، آنگاه:

$$\|C_\varphi\| = \sqrt{\frac{2}{1+|s|^2-|t|^2+\sqrt{(1-|s|^2+|t|^2)^2-4|t|^2}}}$$

برای اثبات به منبع [۵] صفحه ۱۵۴ مراجعه شود.

تعریف (۱-۱۶): تابع تحلیلی φ از D به D را داخلی (inner function) گوئیم، اگر $\lim_{r\to 1}|\varphi(re^{i\theta})| = 1$ برای تقریباً تمام θهای متعلق به $[0,2\pi)$.

قضیه (۱-۱۷): فرض کنید φ یک نگاشت داخلی باشد، آنگاه:

$$\|C_\varphi\|^2 = \frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}$$

برای اثبات به منبع [۲۰] صفحه ۳۸۲ مراجعه شود.

تعریف (۱-۱۸): تابع φ را تک ارز (univalent) می‌گوئیم اگر تابع تحلیلی φ از D به D یک به یک باشد .

قضیه (۱-۱۹): یک دنباله در فضای با ناخ تابعی انعکاسی به صورت ضعیف همگرا است اگر و تنها اگر این دنباله کراندر و به صورت نقطه‌ای همگرا باشد.

برای اثبات به منبع [۶] صفحه ۳ مراجعه شود.

تعریف (۱-۲۰): اندازه مساحت نرمال روی D را با dA نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود. $dA = \frac{1}{\pi} r dr d\theta$ یا $dA = \frac{1}{\pi} dx dy$

تعریف (۱-۲۱): فرض کنید D دیسک واحدیکه از صفحه مختلط و $dA(z)$ نمایش اندازه مساحت لبگ نرمال شده از دیسک واحد باشد، فضای دیریکله D عبارت است از فضای هیلبرت متشکل از توابع تحلیلی f روی D به طوریکه نرم:

$$\|f\|_D^2 = |f(0)|^2 + \int_{\mathrm{D}} |f'(z)|^2 \, dA(z)$$

متناهی باشد.

ملاحظه می‌شود که انتگرال بالا در واقع مساحت تصویر D تحت f، با احتساب چندگانگی می‌باشد و عبارت $|f(0)|^2$ از اینکه نرم توابع ثابت صفر شوند، جلوگیری می‌کند.

تعریف (۱-۲۲): فضای دیریکله یک فضای هیلبرت تحت ضرب داخلی طبیعی زیرمی‌باشد.

$$< f,g >= f(0)\overline{g(0)} + \int f'(z)\overline{g'(z)}\, dA(z)$$

تعریف (۱-۲۳): تابع هسته (reproducing kernel) برای D

برای یک $w \in \mathbb{D}$، تابع هسته در w که با K_w نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k_w(z) = 1 + Log\left(\frac{1}{1-\overline{w}z}\right)$$

به علاوه برای هر f متعلق به D، $<f, k_w> = f(w)$ همچنین داریم:

$$\|k_w\|_D^2 = <k_w, k_w> = k_w(w) = 1 + Log\left(\frac{1}{1-|w|^2}\right)$$

تعریف (۱-۲۴): فضای دیریکله به پیمانه توابع ثابت

فرض کنید D_0 فضای متشکل از توابعی از فضای دیریکله D به پیمانه توابع ثابت باشد. در این حالت

$$\|f\|_{D_0}^2 = \int_D |f'(z)|^2 \, dA(z)$$

نرم در D_0 است. همچنین می‌توان D_0 را به عنوان زیر فضایی از توابع دیریکله که مقدارشان در صفر، صفر باشددرنظرگرفت.

با توجه به اینکه توابع ثابت تحت هر عملگر ترکیبی کراندار C_φ روی D پایاست،عملگر

$$\widetilde{C}_\varphi f = C_\varphi f - (C_\varphi f(0))$$

D_0 را به طور کراندار به خودش می‌برد. چون امکان اشتباه وجود ندارد، ما همچنان $\widetilde{C}_\varphi$ را با C_φ نشان می‌دهیم.

تعریف (۱-۲۵): صفحه مختلط توسیع یافته را با C^∞ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

تعریف (۱-۲۶): نگاشتهای کسری خطی (linear fractional maps)

اگر c, b, a و d اعداد مختلط باشند و $ad - bc \neq 0$، آنگاه نگاشت کسری خطی

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

یک نگاشت یک به یک و پوشا ازصفحه مختلط توسیع یافته به خودش می‌باشد، درواقع کافی است تعریف کنیم: اگر $c \neq 0$، $\varphi(\infty) = \frac{a}{c}$ و اگر $c = 0$، $\varphi(\infty) = \infty$.

تبصره (۱-۲۷): درتعریف نگاشت کسری خطی $ad-bc\neq 0$ شرط لازم و کافی برای غیر ثابت بودن نگاشت است.

تعریف (۱-۲۸): مجموعه همه نگاشتهای کسری خطی را با $LFT(\mathbb{C}^{\infty})$ نمایش می‌دهیم.

تعریف (۱-۲۹): اگر در نگاشت کسری خطی $\varphi(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ داشته باشیم $ad-bc=1$ گوئیم φ در فرم استاندارد است.

تعریف (۱-۳۰): رد (Trace) یک نگاشت کسری خطی:

اگر $\varphi(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ درفرم استاندارد باشد، دراین صورت رد φ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tau=\pm(a+d)$$

تبصره(۱-۳۱): نقاط ثابت (fixed points): نگاشت کسری خطی $\dfrac{az+b}{cz+d}$ نقطه ∞ را ثابت نگه می‌دارد اگر وتنها اگر $c=0$، دراین حالت ∞ تنها نقطه ثابت این نگاشت است اگر وتنها اگر $b\neq 0, a=d$. در غیر این صورت معادله نقاط ثابت ازدرجه دو است و نقاط ثابت از رابطه زیر به دست می‌آیند.

$$\alpha,\beta=\frac{(a-d)+\left[(a-d)^2+4bc\right]^{\frac{1}{2}}}{2c}$$

به منبع [۲۱] صفحه ۲ مراجعه شود.

لم (۱-۳۲): یک نگاشت کسری خطی که همانی نباشد یک یا دو نقطه ثابت (fixed point) در صفحه مختلط توسیع یافته دارد.

دو نگاشت کسری خطی ψ,φ رامزدوج (conjugate) گویند، اگر یک نگاشت کسری خطی دیگری مانند T وجود داشته باشد به طوریکه $\varphi=T^{-1}\psi T$.

اگر φ دارای دو نقطه ثابت αو β باشد، آنگاه تحت $T_z=\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ با $\psi(z)=\mu z$ مزدوج است. دراین حالت نگاشت کسری φ خطی را بیضوی (elliptic) گوییم اگر $|\mu|=1$ و هذلولوی (hyperbolic) گوئیم اگر $\mu>0$ و در غیر این صورت آن را ثابت زاویه‌ای (Loxodromic) گوئیم.

قضیه (۱-۳۳): (نقاط ثابت و مشتق‌ها): فرض کنید $\varphi \in LFT(\mathbb{C}^{\infty})$، آنگاه عبارات زیر معادلند.

(۱) $|\tau| = 2$

(۲) $\varphi' = 1$ ، در یک نقطه ثابت φ.

(۳) φ تنها یک نقطه ثابت روی $\mathbb{C}^{\infty}$ دارد.

اگر φ دارای دو نقطه ثابت مجزا باشد، آنگاه مشتق آن در این نقاط ثابت معکوس یکدیگرند و مجموع آنها برابر $\tau^2 - 2$ است.

برای اثبات به منبع [۲۱] صفحه ۳ مراجعه شود.

قضیه (۱-۳۴): (طبقه‌بندی بر اساس رد نگاشتهای کسری خطی)

فرض کنید φ یک نگاشت کسری خطی غیر همانی باشد، آنگاه φ را ثابت زاویه‌ای (Loxodromic) گویند اگر و تنها اگر τ حقیقی نباشد، اگر τ حقیقی باشد، آنگاه φ

(۱) هذلولوی (hyperbolic) است اگر و تنها اگر $|\tau| > 2$

(۲) سهموی(parabolic) است اگر و تنها اگر $|\tau| = 2$

(۳) بیضوی (elliptic) است اگر و تنها اگر $|\tau| < 2$

به منبع [۲۱] صفحه۵ مراجعه شود.

قضیه (۱-۳۵): قضیه دنجوی ولف (Denjoy-wolff Theorem)

اگر φ یک نگاشت تحلیلی از قرص یکه به خودش باشدکه همانی وخودریختی بیضوی از D نباشد، آنگاه یک نقطه a در $\overline{D}$ وجود دارد به طوری که φ_n به طور یکنواخت روی زیر مجموعه‌های فشرده D به سمت a میل می کند . که در اینجا $\varphi_n = \varphi o \varphi o \ldots o \varphi$ (n مرتبه)

برای دیدن اثبات به منبع [۶] صفحه۵۸ مراجعه شود.

تعریف (۱-۳۶): نقطه دنجوی ولف (Denjoy- wolff point)

نقطه حدی a در قضیه قبل را نقطه دنجوی ولف یا (attractive point) φ می‌نامند.

تبصره(۱-۳۷): یک شرط لازم برای اینکه C_φ تعریف شده باشد، این است که φ, D را به خودش ببرد، این شرط محدودیتهایی را در مورد موقعیت نقاط ثابت φ اعمال می‌کند. اگر $\varphi(D) \subset D$، آنگاه:

(۱) اگر φ سهموی باشد ،آنگاه نقطه ثابت φ روی ∂D واقع است.

(۲) اگر φ هذلولوی باشد، دراین صورت نقطه جذاب(attractive point) درون $\overline{D}$ و نقطه ثابت دیگر خارج D واقع است. و هر دونقطه ثابت روی ∂D واقع است اگر و تنها اگر φ یک خود ریختی از D باشد.

(۳) اگر φ ثابت زاویه‌ای یا بیضوی باشد یک نقطه ثابت درون D و نقطه ثابت دیگر خارج از $\overline{D}$ واقع است، اگر φ بیضوی باشد، آنگاه φ یک خودریختی از D است. اگر φ ثابت زاویه‌ای باشد، نقطه ثابت جذاب باید درون D واقع باشد.

برای اثبات به منبع [۲۱] صفحه ۵ مراجعه شود.

تعریف (۱-۳۸): اگر B,A عملگرهای کراندر روی فضای هیلبرت K,H باشند، آنگاه B,A را (unitarily equivalent یا unitarily similar) گویند اگر یک یکریختی $U:H \to K$ وجود داشته باشد به طوریکه $UAU^{-1}=B$.

تعریف (۱-۳۹): اگر $A \in B(H)$، آنگاه

(۱) A خود الحاق یا (self adjoint یا hermitian) گویند اگر $A^*=A$.

(۲) A را نرمال گویند اگر $AA^*=A^*A$.

تعریف (۱-۴۰): A در $B(H)$ معکوس‌پذیر (invertible) است یعنی این که عملگر A^{-1} در $B(H)$ وجود داشته باشد به طوریکه $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

قضیه (۱-۴۱): اگر $U \in B(H,K)$، آنگاه U یک یکریختی است، اگر و تنها اگر U معکوس‌پذیر باشد و $U^{-1}=U^*$

برای اثبات به منبع [۳]صفحه ۳۲ مراجعه شود.

قضیه (۱-۴۲): اگر $A \in B(H)$ گزاره های زیر معادلند.

(۱) $AA^*=A^*A=I$

(۲) A یکانی (unitary) است.

(۳) A نرمال یکمتری است.

برای دیدن اثبات به منبع [۳] صفحه ۳۵ مراجعه شود.

تعریف (۱-۴۳): اگر T یک تبدیل خطی کراندار از فضای هیلبرت H به خودش باشد، اسکالر α را یک مقدار ویژه T گویند اگر $Ker(T-\alpha)\neq(0)$. اگر h یک بردار ناصفر در $Ker(T-\alpha)$ باشد، h را یک بردار ویژه برای α گویند.

تعریف (۱-۴۴): اگر $\mathbf{A}$ یک جبر باناخ با عضو همانی باشد و $a\in\mathbf{A}$ طیف (Spectrum) a که با $\sigma(a)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می شود.

$$\sigma(a)=\{\alpha\in\mathbb{C}: a-\alpha \text{ معکوسپذیر نباشد } \}$$

تعریف (۱-۴۵): طیف اساسی یک عملگر T عبارت است از مجموعه همه اعداد مختلط λ که $T-\lambda$ به پیمانه عملگرهای فشرده، معکوس‌پذیر نباشد و با $\sigma_e(T)$ نشان داده می‌شود.

تعریف (۱-۴۶): دو عملگر A و B متشابه (Similar) هستند، اگر یک عملگر معکوسپذیر P وجود داشته باشد به طوریکه $P^{-1}AP=B$.

قضیه (۱-۴۷): مجموعه همه دنباله های کراندار از اعداد مختلط یک جبر هستند با (دنباله واحد $\alpha_n=1$ برای هر n) و مزدوج ($\{\alpha_n\}\to\{\alpha_n^*\}=\{\overline{\alpha}_n\}$) و با نرم $\|\{\alpha_n\}\|=\sup_n|\alpha_n|$، یک دنباله $\{\alpha_n\}$ را معکوس پذیر گویند اگر یک دنباله کراندار $\{\beta_n\}$ وجود داشته باشد به طوری که $\alpha_n\beta_n=1$ برای همه nها ، یک عملگر قطری با عناصر قطر $\{\alpha_n\}$ یک عملگر معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر دنباله $\{\alpha_n\}$ معکوس‌پذیر باشد. در نتیجه طیف یک عملگر قطری برابر بستار جملات قطر آن است.

برای اثبات به منبع [۹] صفحه ۳۴ مسأله ۶۳ مراجعه شود.

تعریف (۱-۴۸): برد اساسی (Essential-range)

فرض کنید (X,Ω,μ) یک فضای اندازه $\sigma-$ متناهی باشد، برای یک نگاشت ϕ در $L^\infty(\mu)=L^\infty(X,\Omega,\mu)$ برد اساسی ϕ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ess-ran(\phi)=\cap\{cl(\phi(\Delta)):\Delta\in\Omega,\mu(X\setminus\Delta)=0\}$$

قضیه (۱-۴۹): طیف عملگرهای ضربی

فرض کنید (X,Ω,μ) یک فضای اندازه باشد مجموعه همه توابع کراندار اندازه پذیر یک جبر هستندبا(واحد $\varphi(x)=1$ برای x و مزدوج($\varphi\to\varphi^*$)و با نرم ($\|\varphi\|_\infty$)، یک تابع اندازه پذیر φ معکوس پذیر است اگر یک تابع کراندار اندازه پذیر ψ وجود داشته باشد به طوری که $\varphi(x)\psi(x)=1$ برای تقریبا همه xها. یک عملگر ضربی روی L^2 (برای یک اندازه σ- متناهی) با سمبل φ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر φ یک تابع معکوس‌پذیر باشد، در نتیجه طیف یک عملگر ضربی برابر برد اساسی سمبل آن است.

برای اثبات به منبع [۹] صفحه ۳۶ مسأله ۶۷ مراجعه شود.

تعریف (۱-۵۰): شعاع طیفی (Spectral radius)

شعاع طیفی عملگر A که با $r(A)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$r(A)=\sup\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(A)\}$$

قضیه (۱-۵۱): فرض کنید $\{e_n\}$ یک پایه طبیعی برای l^2 باشد و $\{\alpha_n\}$ یک دنباله از اسکالرها باشد. یک عملگر کراندار A روی l^2 وجود دارد به طوریکه $Ae_n=\alpha_n e_n$ ، $\forall n$، اگر و تنها اگر $\{\alpha_n\}$ به طور یکنواخت کراندار باشد. در چنین حالتی $\|A\|=\sup\{|\alpha_n|:n\geq 1\}$. این نوع عملگرها را عملگرهای قطری (Diagonal operator) می‌نامیم.

برای اثبات به منبع [۳] صفحه ۳۰ سؤال ۸ مراجعه شود.

تعریف (۱-۵۲): عملگرخطی $T:H\to K$ را فشرده نامند اگر $T(ball\,H)$ دارای بستار فشرده در K باشد.مجموعه همه عملگرهای فشرده از H به K با $B_0(H,K)$ نشان داده می شود.

تعریف (۱-۵۳): فرض کنید (X,μ) یک فضای اندازه باشد و $L^2(X,\mu)$ فضای همه توابع مختلط مقدار اندازه‌پذیر روی X باشد که مربع قدر مطلق آنها انتگرال‌پذیر است. به ازای هر تابع اندازه‌پذیر مختلط مقدار ϕ در $L^\infty(X,\mu)$ روی X عملگر ضربی $M_\phi:L^2(X,\mu)\to L^2(X,\mu)$ با ضرب نقطه‌ای به صورت $M_\phi(f)=\phi f$ تعریف می‌شود.