وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه علوم پایهٔ دامغان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه ارائه شده به تحصیلات تکمیلی

به عنوان بخشی از فعالیت‌های لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

کلاس های هموکلینیک C^1 ـ پایدار انبساطی

استاد راهنما

دکتر عباس فخاری

استاد مشاور

دکتر نرگس تولایی

نگارش

لیلی نصیرزاده

تابستان ۱۳۸۸

چکیده

کلاس های هموکلینیک C^1 ـ پایدار انبساطی

به وسیله ی

لیلی نصیرزاده

واژه های کلیدی: C^1ـ پایدار انبساطی، کلاس های هموکلینیک، تجزیه تسلطی، هذلولوی

فرض کنید M یک منیفلد بسته با بعد متناهی، همراه با متر ریمانی d بوده، همچنین $f : M \to M$ یک C^1 ـ دیفیومورفیسم و p یک نقطه متناوب هذلولوی برای f باشد. آنچه در این پایان نامه ثابت می کنیم، این است که هرگاه کلاس هموکلینیک $H(p, f)$، C^1 ـ پایدار انبساطی باشد، در این صورت دارای یک تجزیه تسلطی مانند $E \oplus F$ است که $\dim(E) = \mathrm{index}(p)$. علاوه براین نشان می دهیم اگر کلاس هموکلینیک فوق انبساطی پایه ای نیز باشد، هذلولوی است.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

پیشگفتار

دردهه اخیریک مسئله مهم در سیستم‌های دیفرانسیل پذیر درک تاثیر خاصیت دینامیکی پایدار روی رفتار نگاشت مماسی سیستم بوده است. برای مثال منیه [1] در [۱۶] ثابت کرده است که اگر M یک منیفلد فشرده و $f : M \to M$ دیفیومورفیسمی باشد که تمام C^1 ـ دیفیومورفیسم های نزدیک آن انبساطی باشند، در این صورت f شبه آناسوف و به خصوص هذلولوی است. در این متن به مطالعه کلاس های هموکلینیکی که پایدار انبساطی می باشند، می پردازیم و نتایجی را که در [۲۰] به دست آمده را مورد بررسی قرار می دهیم. مطالب ارایه شده بر گرفته از مقاله [۲۳] می باشد.

این متن به ۴ فصل تقسیم می شود:

فصل اول : مقدماتی از مجموعه های هذلولوی، تجزیه تسلطی، کلاس های هموکلینیک و انبساطی را بیان می کنیم.

فصل دوم : ابتدا عدم وجود مماس های هموکلینیک را برای دیفیومورفیسم‌هایی که روی کلاس های هموکلینیک، C^1 ـ پایدار انبساطی هستند، ثابت می‌کنیم. همچنین، به عنوان نتیجه‌ای از این مطلب نشان می دهیم، زاویه بین E و F که به ترتیب زیرفضاهای مماس بر خمینه‌های پایدار و ناپایدار در نقطه هموکلینیک (قاطع) x می باشند، دور از صفر است. در انتهای این فصل با تکرار مباحث [۱۷] و [۲۱] به بیان وجود یک تجزیه تسلطی مانند $E \oplus F$ که $\mathrm{index}(p) = \mathrm{dim}E$ روی کلاس هموکلینیک می پردازیم.

فصل سوم : با استفاده از تعاریفی چون مقادیر ویژه نرمال شده و نقاط مرزی غیر ss به بیان گزاره ای می پردازیم که نقشی مهم در اثبات قضیه اساسی این فصل دارد. سپس با استفاده از مفهوم انشعاب هاپف اثبات قضیه اساسی این فصل را کامل می کنیم.

فصل چهارم : بااستفاده از قضیه اساسی فصل ۳ و خاصیت انبساطی پایه‌ای $H(p, f)$ نشان می دهیم برای هر $p \sim x$ $W^{cs}_\epsilon(x)$ و$W^{cu}_\epsilon(x)$ به ترتیب $W^s(x)$ و $W^u(x)$ هستند. بعلاوه، ثابت می کنیم $H(p, f)$ در خاصیت سایه‌زنی صدق کرده و همچنین تمام نقاط متناوب در $H(p, f)$ دارای اندیس یکسان با اندیس p هستند. در آخر به طور جامع به اثبات هذلولوی بودن کلاس هموکلینیک فوق می پردازیم.

---

[1] Mañé

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ پیش نیازها

تعریف ۱.۱.۱.

*فرض کنید X یک فضای فشرده همراه با متر d باشد، در این صورت **متر هاسدورف** d_H روی 2^X که مجموعه تمام زیر مجموعه های بسته X می باشد، به صورت زیر تعریف می شود*

$$d_H(Y,Z)=\inf\{\epsilon>0\ :\ Y\subseteq N_\epsilon(Z)\ ,\ Z\subseteq N_\epsilon(Y)\}$$

که $N_\epsilon(A)=\{x\in X : d(x,A)<\epsilon\}$ هرگاه $A\subseteq X$.

تعریف ۲.۱.۱.

فرض کنید M یک منیفلد فشرده باشد. برای $r\geq 0$ قرار می دهیم

$$C^r(M,\mathbb{R}^s)=\{f:M\xrightarrow{C^r}\mathbb{R}^s\}$$

دراین صورت، یک پوشش متناهی از همسایگی های باز $V_1,\ldots,V_n$ برای M چنان موجود است، که هر V_i در دامنه یک همسایگی مختصاتی (U_i,ϕ_i) قرار داشته باشد و

$$\phi_i(U_i)=B_2(0)\quad,\quad \phi_i(V_i)=B_1(0)$$

که $B_\epsilon(x)$ گویی به شعاع ϵ و مرکز x است.

اکنون به ازای هر $f\in C^r(M,\mathbb{R}^s)$ تعریف می کنیم

$$f_i=f\circ\phi_i^{-1}:B_2(0)\to\mathbb{R}^s$$

و

$$\|f\|_r=\max_{i=1,\ldots,k}\sup\{\ \|f_i(u)\|,\|Df_i(u)\|,\ldots,\|D^rf_i(u)\|\ :\ u\in B_1(0)\ \}.$$

*حال توپولوژی تعریف شده توسط این نرم را **C^r ـ توپولوژی** گوییم.*

توجه شود این متریک به انتخاب V_i ها وابسته نیست (به مرجع [۱۹] رجوع کنید).

تعریف ۳.۱.۱.

متر ریمانی *روی M یک ضرب داخلی روی هر فضای مماسی به صورت*

$$< , >_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

است که برای هر $u_p, v_p, w_p \in T_pM$

۱. $< v_p, v_p >_p \geq 0$ ، در حالت خاص $< v_p, v_p >_p = 0$ اگر و تنها اگر $v_p = 0$:

۲. $< v_p, u_p >_p = < u_p, v_p >_p$:

۳. $< \alpha u_p + \beta v_p, w_p >_p = \alpha < u_p, w_p >_p + \beta < v_p, w_p >_p$

از این رو یک نرم ریمانی را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\|v_p\| = \sqrt{< v_p, v_p >_p}.$$

در این متن، M ، همواره یک C^r ـ منیفلد فشرده با بعد متناهی، $r \geq 0$ ،و $Diff^r(M)$ ، فضای تمام C^r ـ دیفیومورفیسم های روی M همراه با C^r ـ توپولوژی می باشند.

تعریف ۴.۱.۱.

فرض کنید $\phi : M \times G \to M$ نگاشت پیوسته ایست، که

۱. $G = \mathbb{R}$ یا $G = \mathbb{Z}$

۲. $\phi(x, 0) = x$

۳. برای $x \in M$ و $s, t \in G$ $\phi(\phi(x, s), t) = \phi(x, s + t)$

اگر $G = \mathbb{Z}$ آن گاه ϕ یک ***سیستم دینامیکی گسسته*** *و اگر $G = \mathbb{R}$ آن گاه ϕ یک* ***سیستم دینامیکی پیوسته*** *روی M نامیده می شود.*

تبصره ۵.۱.۱. *با وجود آنکه در سراسر این متن برای $r \geq 0$ ، $f \in Diff^r(M)$ فرض شده است، اما برخی از تعاریف برای یک نگاشت پیوسته نیز درست است.*

تعریف ۶.۱.۱.

برای هر $f \in Diff^1(M)$ ، مجموعه های زیر را به ترتیب ***مدارهای مثبت*** *و* ***منفی x*** *از M می نامیم*

$$\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) \; : \; n \in \mathbb{Z}^+\} \quad , \quad \mathcal{O}^-(x) = \{f^{-n}(x) \; : \; n \in \mathbb{Z}^-\}.$$

همچنین،

$$\mathcal{O}(x)=\{f^n(x)\ :\ n\in\mathbb{Z}\}$$

را ***مدار x*** گوییم.

تعریف ۷.۱.۱.

برای $\delta>0$ داده شده، دنباله ی $\{x_i\}_{i=a}^{b}$ در M را یک ***δ ـ شبه مدار*** برای f گوییم، هر گاه

$$d(f(x_i),x_{i+1})<\delta \qquad a\leq i\leq b-1.$$

تعریف ۸.۱.۱.

به ازای هر $x\in M$

۱. x را یک ***نقطه ثابت*** برای f گوییم، هرگاه $f(x)=x$ لذا $\mathcal{O}(x)=\{x\}$.

۲. x را یک ***نقطه متناوب*** برای f گوییم، هرگاه **عدد طبیعی** n **وجود داشته باشد**، به طوری که $f^n(x)=x$ لذا

$$\mathcal{O}(x)=\{x,f(x),f^2(x),\dots,f^{n-1}(x)\}$$

به کوچکترین عددی که در رابطه فوق صدق می کند، تناوب x می گوییم و مجموعه این نقاط را با $Per(f)$ نشان می دهیم.

۳. x را یک ***نقطه ناسرگردان*** برای f گوییم، هرگاه برای هر همسایگی U از x **عدد طبیعی** n **وجود داشته باشد**، به طوری که

$$f^n(U)\cap U\neq\emptyset.$$

مجموعه این نقاط را با $\Omega(f)$ نشان می دهیم.

۴. x رایک نقطه ***زنجیر بازگشتی*** برای f گوییم، هر گاه برای هر $\delta>0$، یک δـ شبه مدار مانند $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ برای f **وجود داشته باشد**، به طوری که $x_0=x_n=x$. مجموعه این نقاط رابا $CR(f)$ نشان می دهیم.

تعریف ۹.۱.۱.

به ازای هر $x\in M$

۱. مجموعه های ***ω ـ حدی*** و ***α ـ حدی*** برای x را به ترتیب با $\omega_f(x)$ و $\alpha_f(x)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\omega_f(x)=\{y\in M\ :\ \exists\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}\ \ :\ \ \lim_{n_k\to+\infty}f^{n_k}(x)=y\}$$

$$\alpha_f(x)=\{y\in M\ :\ \exists\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}\ \ :\ \ \lim_{n_k\to-\infty}f^{n_k}(x)=y\}$$

۲. قرار می دهیم

$$L_+(f) = \overline{\bigcup_{x\in M} \omega_f(x)}\ ,\ \ L_-(f) = \overline{\bigcup_{x\in M} \alpha_f(x)}$$

همچنین،

$$L(f) = L_+(f) \cup L_-(f).$$

با توجه به تعاریف بالا داریم

$$\overline{Per(f)} \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset CR(f).$$

لزوما $Per(f)$ در M بسته نیست، در حالی که بوضوح می توان دید $L(f)$ ، $\Omega(f)$ و $CR(f)$ مجموعه هایی بسته و f ـ پایا می باشند. $A \subset M$ یک مجموعه f ـ پایاست، هرگاه $f(A) = A$.

تعریف ۱.۱.۱۰.

*فرض کنید X یک فضای متریک باشد. $\mathcal{R} \subset X$ را مجموعه **مانده ای** در X نامیم، هرگاه شامل اشتراک شمارایی از زیرمجموعه های باز و چگال در X باشد. بوضوح اشتراک شمارایی از مجموعه های مانده ای، مانده ای است.*

تعریف ۱.۱.۱۱.

هرگاه برای هر دو مجموعه باز و ناتهی U و V در M

۱. *عدد طبیعی k وجود داشته باشد، به طوری که $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ در این صورت، f را **ترایا توپولوژیکی** نامند.*

۲. *عدد طبیعی $n_\circ$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $n \geq n_\circ$، $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ در این صورت، f را **آمیخته توپولوژیکی** نامند.*

قضیه ۱.۱.۱۲.

f ترایا توپولوژیکی است، اگر وتنها اگر یک زیر مجموعه مانده ای مانند $\mathcal{R}$ در M موجود باشد، به قسمی که برای هر $x \in \mathcal{R}$، $\overline{\mathcal{O}(x)} = M$.

برهان. ر. ک. به [۲۲].

□

تعریف ۱.۱.۱۳.

هر گاه زیر مجموعه ترایای Λ از M شامل هر مجموعه ترایا مانند T که

$$T \cap \Lambda \neq \emptyset$$

*باشد، در این صورت Λ را **ترایای بیشین** گوییم.*

۲.۱ مجموعه های هذلولوی

اسمیل [۱] در سال ۱۹۶۰ یکی ازمفاهیم اساسی در سیستم های مشتق پذیر به نام مجموعه های هذلولوی را بیان کرد، که دسته مهمی از سیستم ها را توصیف می کرد. دینامیک این سیستم ها رفتار پیچیده اما قابل فهم را از خود نشان می دهند. آنچه در این سیستم ها مهم است، این است که این نوع از سیستم ها به وسیله راستاهای انقباضی و انبساطی مشخص می شوند. حال به تعریف دقیق تری از این مفهوم می پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱.

*فرض کنید $\Lambda \subset M$ یک مجموعه بسته و fـ پایا باشد. Λ یک مجموعه **هذلولوی** برای f نامیده می شود، هرگاه ثابت های $C > 0$ ، $0 < \lambda < 1$ و خانواده ای از زیر فضاهای $E^s(x)$ و $E^u(x)$ از T_xM، برای هر $x \in \Lambda$ وجود داشته باشند، به طوری که*

۱. $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$

۲. $E^s(x)$ و $E^u(x)$ تحت Df_x پایا باشند، به عبارتی

$$Df_xE^s(x) = E^s(f(x)) \quad , \quad Df_xE^u(x) = E^u(f(x))$$

۳. برای هر $v^s \in E^s(x)$ و $n \geq 0$، $\|Df_x^n v^s\| \leq C\lambda^n \|v^s\|$

برای هر $v^u \in E^u(x)$ و $n \geq 0$، $\|Df_x^{-n} v^u\| \leq C\lambda^n \|v^u\|$

تعریف ۲.۲.۱.

*اگر تمام منیفلد هذلولوی باشد، f را **آناسوف** گوییم.*

از این پس، در سراسر این بخش به استثنای موارد ذکر شده، فرض می کنیم، Λ یک مجموعه هذلولوی برای f با ثابت های $C > 0$ و $0 < \lambda < 1$ باشد.

گزاره ۳.۲.۱.

زیر فضاهای E^s و E^u روی Λ به طور پیوسته تغییر می کنند.

برهان. فرض کنید $x_n \in \Lambda$ دنباله ای همگرا به x_0 و $w_{1,n}, \ldots, w_{k,n}$ یک پایه متعامد یکه برای $E^s(x_n)$ باشد (می توان فرض کرد بعد $E^s(x_n)$ ثابت است). چون $T_{x_n}M$ فضایی فشرده است، لذا برای $j = 1, \ldots, k$، $w_{j,n} \to w_{j,0}$. از طرفی با توجه به پیوستگی تابع $x \to T_xM$ و همگرایی x_n به x_0 داریم

$$T_{x_n}M \longrightarrow T_{x_0}M$$

[۱] Smale

پس $w_{j,\circ} \in T_{x_\circ}M$، وقتی $j = ۱, \ldots, k$.

بنا به بسته بودن شرط (۳) در تعریف ۱.۲.۱ هر بردار متعامد یکه $w_{۱,\circ}, \ldots, w_{k,\circ}$ در $E^s(x_\circ)$ قرار می گیرد.

بنابراین

$$\mathrm{dim}E^s(x_\circ) \geq k = \mathrm{dim}E^s(x_n)$$

با بحثی مشابه می توان نشان داد

$$\mathrm{dim}E^u(x_\circ) \geq \mathrm{dim}E^u(x_n)$$

حال، بنا به آنچه در بالا گفتیم و شرط (۱) در تعریف ۱.۲.۱ داریم

$$\mathrm{dim}E^s(x_\circ) = \mathrm{dim}E^s(x_n) \ , \ \mathrm{dim}E^u(x_\circ) = \mathrm{dim}E^u(x_n) \tag{۱.۱}$$

از طرف دیگر

$$< w_{۱,n}, \ldots, w_{k,n} > \longrightarrow < w_{۱,\circ}, \ldots, w_{k,\circ} >$$

بنابراین

$$E^s(x_n) \longrightarrow < w_{۱,\circ}, \ldots, w_{k,\circ} >$$

که $< w_{۱,\circ}, \ldots, w_{k,\circ} >$ زیر فضایی از $E^s(x_\circ)$ می باشد. لذا با توجه به رابطه (۱.۱) داریم

$$E^s(x_\circ) = < w_{۱,\circ}, \ldots, w_{k,\circ} >$$

در نتیجه، زیر فضای E^s روی Λ پیوسته است. به طور مشابه، پیوستگی E^u نیز اثبات می شود.

□

قضیه ۴.۲.۱.

متر ریمانی ρ روی M، ثابت های $C = ۱$ و λ' که $\circ < \lambda < \lambda' < ۱$ وجود دارند، به طوری که برای هر $x \in \Lambda$،

۱. $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$

۲. *$E^s(x)$ و $E^u(x)$ تحت Df_x پایا هستند.*

۳. *برای هر $v^s \in E^s(x)$ و $n \geq \circ$ $|||Df_x^n v^s||| \leq \lambda' |||v^s|||$*

برای هر $v^u \in E^u(x)$ و $n \geq \circ$ $|||Df_x^{-n} v^u||| \leq \lambda' |||v^u|||$.

*که در آن $|||.|||$ نرم القا شده توسط ρ است و **نرم سازگار** نامیده می شود.*

یاد آوری می کنیم C و λ ثابت های هذلولوی در تعریف ۱.۲.۱ می باشند.

برهان. ر. ک. به [۲۲].

□

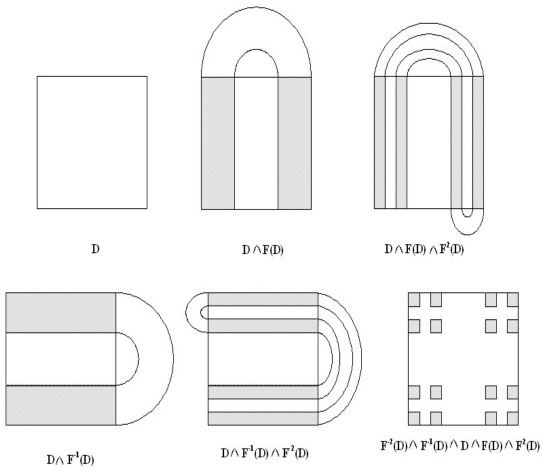
۱.۲.۱ مثال هایی از یک مجموعه هذلولوی

۱. نقطه ثابت $p \in M$ یک نقطه **ثابت هذلولوی** برای f است، هرگاه قدر مطلق تمام مقادیر ویژه Df_p مخالف یک باشد.

۲. نقطه متناوب $p \in M$ با دوره تناوب k یک نقطه **متناوب هذلولوی** برای f است، هرگاه قدر مطلق تمام مقادیر ویژه Df_p^k مخالف یک باشد.

در حالت خاص، هرگاه قدر مطلق تمام مقادیر ویژه Df_p^k، کوچکتر از یک باشد، p **جاذب** ، بزرگتر از یک باشد، p **دافع** و اگر قدر مطلق برخی مقادیر ویژه بزرگتر و برخی کوچکتر از یک باشد، p **زینی** نامیده می شود.

۳. فرض کنید $D = [۰, ۱] \times [۰, ۱]$ یک مربع واحد در $\mathbb{R}^۲$ باشد. با توجه به شکل ۱.۱



شکل ۱.۱: نعل اسب

$$\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} F^n(D)$$

یک مجموعه هذلولوی است، زیرا دیفیومورفیسم $F : D \to \mathbb{R}^۲$ که نگاشت **نعل اسب اسمیل** نامیده می شود خطی بوده، همچنین به طور افقی انقباضی و به طور عمودی انبساطی می باشد.

اسمیل نشان داد، نگاشت F روی Λ با نگاشت انتقال $\sigma(x_n) = x_{n+۱}$ روی فضای نمادین $\Sigma(۲)$ مزدوج می باشد، که

$$\Sigma(۲) = \{x : x = (\dots, x_{-۱}, x_۰, x_۱, \dots), x_i \in \{۱, ۲\}\}.$$

همچنین، نگاشت مزدوج نگاشتی پیوسته، مشتق پذیر و دارای معکوس پیوسته است.برای جزییات بیشتر به [۲۲] رجوع کنید.

۴. فرض کنید A یک ماتریس از $GL_n(\mathbb{Z})$ و نگاشت $L_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ یک خود ریختی القایی باشد. در این صورت داریم $L_A(\mathbb{Z}^n)=\mathbb{Z}^n$

حال رابطه هم ارزی $\sim$ روی $\mathbb{R}^n$ رابه صورت زیر تعریف می کنیم

$$x\sim y \iff x-y\in\mathbb{Z}^n$$

بنابراین، فضای خارج قسمتی $\mathbb{R}^n/\sim$ یک چنبره n ـ بعدی مانند

$$\mathbb{T}^n\cong\mathbb{S}^1\times\ldots\times\mathbb{S}^1$$

می باشد. فرض کنیم، نگاشت تصویر $\pi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{T}^n$ به گونه ای باشد که

$$x\mapsto[x]=\{y\in\mathbb{R}^n\ :\ x\sim y\}$$

لذا نگاشت القا شده $f_A:\mathbb{T}^n\to\mathbb{T}^n$ توسط L_A یک دیفیومورفیسم است و

$$f_A([x])=f_A\circ\pi(x)=\pi\circ L_A(x)=[Ax]$$

اکنون، با فرض اینکه قدر مطلق مقادیر ویژه A مخالف یک باشد، $\mathbb{T}^n$ برای f_A هذلولوی است. به عبارتی، f_A یک دیفیومورفیسم آناسوف روی $\mathbb{T}^n$ است که یک **خود ریختی هذلولوی چنبره** نامیده می شود.

فرض کنید Λ یک مجموعه هذلولوی باشد. بنا به پیوستگی می توان زیر فضاهای E^s و E^u رابه زیر فضاهایی پیوسته مانند $\tilde{E}^s$ و $\tilde{E}^u$ روی یک همسایگی از Λ مانند $U(\Lambda)$ گسترش داد، که لزوما Df پایا نیستند.سپس با استفاده از مخروط ها به یک تجزیه هذلولوی برای یک مجموعه پایای بیشین موضعی روی یک همسایگی از Λ می رسیم. اکنون به بیان دقیقتری از آنچه گفتیم، می پردازیم.

اگر $x\in U(\Lambda)$ و $v\in T_xM$ قرار می دهیم $v=v^s+v^u$ که $v^s\in\tilde{E}^s(x)$ و $v^u\in\tilde{E}^u(x)$. فرض کنید متر همان متر سازگار با ثابت λ باشد. برای هر $\alpha>0$ مخروط های پایدار و ناپایدار با اندازه α را به ترتیب به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\mathcal{C}^s_\alpha(x)=\{v\in T_xM:\|v^u\|\leq\alpha\|v^s\|\}$$

و

$$\mathcal{C}^u_\alpha(x)=\{v\in T_xM:\|v^s\|\leq\alpha\|v^u\|\}.$$

برای هر $\epsilon>0$ تعریف می کنیم $\Lambda_\epsilon=\{x\in U:d(x,\Lambda)<\epsilon\}$

در گام اول نشان می دهیم، برای هر $\alpha>0$ عدد مثبت $\epsilon=\epsilon(\alpha)$ وجود دارد، به قسمی که برای $i=-1,0,1$ ، $f^i(\Lambda_\epsilon)\subset U(\Lambda)$ و هر $x\in\Lambda_\epsilon$

$$Df_x\mathcal{C}^u_\alpha(x)\subset\mathring{\mathcal{C}}^u_\alpha(f(x))\qquad,\qquad Df^{-1}_{f(x)}\mathcal{C}^s_\alpha(f(x))\subset\mathring{\mathcal{C}}^s_\alpha(x)$$

برای اثبات فرض کنیم $v \in \mathcal{C}^u_\alpha(x)$ لذا $\|v^s\| \leq \alpha \|v^u\|$ پس

$$\frac{\|Df_x v^s\|}{\|Df_x v^u\|} \leq \frac{\lambda \|v^s\|}{1/\lambda \|v^u\|} \leq \alpha . \lambda^2 \leq \alpha$$

لذا $Df_x v \in \mathring{\mathcal{C}}^u_\alpha(f(x))$. به طریق مشابه

$$Df^{-1}_{f(x)} \mathcal{C}^s_\alpha(f(x)) \subset \mathring{\mathcal{C}}^s_\alpha(x)$$

در گام بعدی ثابت می کنیم، برای هر $\delta > 0$ اعداد مثبت δ و ϵ وجود دارند، به طوری که به ازای هر $i = 1, 0, -1$ $f^i(\Lambda_\epsilon) \subset U(\Lambda)$ و هر $x \in \Lambda_\epsilon$

$$\|Df^{-1}_x v\| \leq (\lambda + \delta)\|v\| \qquad , \qquad v \in \mathcal{C}^u_\alpha(x)$$

و

$$\|Df_x v\| \leq (\lambda + \delta)\|v\| \qquad , \qquad v \in \mathcal{C}^s_\alpha(x)$$

اثبات با توجه به پیوستگی و بنا به گام قبلی برای یک α به اندازه کافی کوچک و$\epsilon = \epsilon(\alpha)$ واضح است.

اکنون در گام آخر به بیان قضیه زیر که از اهمیت خاصی برخوردار است، می پردازیم.

قضیه ۵.۲.۱.

فرض کنید Λ یک مجموعه فشرده و f ـ پایا باشد. همچنین برای هر $x \in \Lambda$ زیر فضاهای پیوسته $\tilde{E}^s(x)$ و $\tilde{E}^u(x)$ چنان موجود باشند، که

$$\tilde{E}^s(x) \oplus \tilde{E}^u(x) = T_x M$$

علاوه بر این فرض کنیم، برای هر $\alpha > 0$ مخروط های $\mathcal{C}^s_\alpha(x)$ و $\mathcal{C}^u_\alpha(x)$ در خواص زیر صدق کنند

۱. $$Df_x \mathcal{C}^u_\alpha(x) \subset \mathcal{C}^u_\alpha(f(x)) \qquad , \qquad Df^{-1}_{f(x)} \mathcal{C}^s_\alpha(f(x)) \subset \mathcal{C}^s_\alpha(x)$$

۲. $$\|Df_x v\| < \|v\| \, , \; v \in \mathcal{C}^s_\alpha(x) \qquad , \qquad \|Df^{-1}_x v\| < \|v\| \, , \; v \in \mathcal{C}^u_\alpha(x)$$

در این صورت Λ یک مجموعه هذلولوی است.

برهان. بنا به فشردگی Λ و فضای $T_x M$ می توان $0 < \lambda < 1$ را چنان یافت که

$$\|Df_x v\| \leq \lambda \|v\| \, , \; v \in \mathcal{C}^s_\alpha(x) \qquad , \qquad \|Df^{-1}_x v\| \leq \lambda \|v\| \, , \; v \in \mathcal{C}^u_\alpha(x).$$

اکنون می توان دید برای هر $x \in \Lambda$ زیر فضاهای

$$E^s(x) = \bigcap_{n \geq 0} Df^{-n}_{f^n(x)} \mathcal{C}^s_\alpha(f^n(x))$$

و

$$E^u(x) = \bigcap_{n\geq 0} Df^n_{f^{-n}(x)} \mathcal{C}^u_\alpha(f^{-n}(x))$$

در تعریف مجموعه هذلولوی باثابت λ و $C = 1$ صدق می کنند.

□

حال قضیه فوق و گام های اول و دوم آنچه گفتیم را نتیجه می دهد.

نتیجه ۶.۲.۱. *یک همسایگی $\mathcal{U}$ از f وجود دارد، به طوری که هر $g \in \mathcal{U}$ دارای یک نقطه متناوب منحصر بفرد p_g بادوره تناوب p است که به آن تداوم* ***p*** *گوییم.*

تعریف ۷.۲.۱. *فرض کنید $x \in M$ یک نقطه متناوب با دوره تناوب k باشد.*

۱. ***مجموعه های پایدار و ناپایدار*** *f در نقطه x، به ترتیب عبارتند از*

$$W^s(x) = \{y \ : \ f^{kn}(y) \to x \ (n \to \infty)\}$$

و

$$W^u(x) = \{y \ : \ f^{-kn}(y) \to x \ (n \to \infty)\}$$

۲. *برای هر $\epsilon > 0$،* ***مجموعه های به طور موضعی پایدار و ناپایدار*** *f در نقطه x، به ترتیب عبارتند از*

$$W^s_\epsilon(x) = \{y \ : \ d(f^{kn}(y), x) < \epsilon \ (n > 0)\}$$

و

$$W^u_\epsilon(x) = \{y \ : \ d(f^{-kn}(y), x) < \epsilon \ (n > 0)\}$$

قضیه ۸.۲.۱. ***(منیفلد های پایدار برای مجموعه های هذلولوی)***

عدد مثبت ϵ وجود دارد، به طوری که برای هر $x \in \Lambda$:

۱. *$W^s_\epsilon(x)$ یک زیر منیفلد C^rـ نشانده از M با بعد $E^s(x)$ است.*

۲. *$W^s(x)$ یک زیر منیفلد غوطه ور از M با بعد $E^s(x)$ است .*

۳. $T_xW^s(x) = T_xW^s_\epsilon(x) = E^s(x)$

۴. $W^s(x) = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-n}(W^s_\epsilon(x))$

برهان. ر. ک. به [۱۹].

□

قضیه ۱.۲.۹.

فرض کنید $E^s \oplus E^u$ یک تجزیه هذلولوی برای Λ باشد. در این صورت اعداد $1 > \mu > 0$ و $0 < \epsilon$ چنان موجودند، که برای هر $x \in \Lambda$

۱. *برای هر $y \in W^s_\epsilon(x)$* $\quad d(f(x), f(y)) \leq \mu d(x, y)$

۲. *$W^s_\epsilon(x)$ به طور پیوسته با $p \in \Lambda$ تغییر می کند.*

آن چه گفتیم برای $W^u_\epsilon(x)$ نیز بر قرار است.

برهان. ر. ک. به [۵].

□

قضیه ۱.۲.۱۰. **(گربمن- هارتمن[۲])**

فرض کنید $p \in M$، یک نقطه ثابت هذلولوی برای f باشد. در این صورت، عدد مثبت ϵ و همسایگی U از صفر در T_pM وجود دارند، به قسمی که

$$Df_p \circ h = h \circ f$$

که $h : N_\epsilon(p) \to U$ یک همیومورفیسم است.

برهان. ر. ک. به [۱۹].

□

در واقع این قضیه بیان می کند، نزدیک یک نقطه ثابت هذلولوی، رفتار f روی M با رفتار Df روی T_pM یکسان است.

تعریف ۱.۲.۱۱.

فرض کنید S و N دو C^r ـ زیر منیفلد از M باشند و $p \in S \cap N$ در این صورت

۱. *هرگاه داشته باشیم*

$$T_pN + T_PS = T_PM$$

در این صورت اشتراک S و N را در p ***قاطع*** *نامیم و به صورت $p \in N \pitchfork S$ نشان می دهیم.*

۲. *هر گاه داشته باشیم*

$$T_pN + T_PS \neq T_PM \;\;,\;\; T_pN \cap T_pS = 0$$

در این صورت اشتراک S و N را در p ***شبه ـ قاطع*** *نامند.*

---

[۲] Grobman-Hartman

۳. هرگاه داشته باشیم

$$T_pN + T_PS \neq T_PM \ , \ \dim T_pN + \dim T_PS \geq \dim M$$

*در این صورت اشتراک S و N را در p **مماسی** نامند.*

قضیه ۱.۲.۱۲.

اعداد مثبت ϵ و δ وجود دارند، به طوری که برای هر $x, y \in \Lambda$ هرگاه $d(x,y) < \delta$ آن گاه

$$W^s_\epsilon(x) \pitchfork W^u_\epsilon(y) = [x,y]_{\epsilon,\delta}$$

یک مجموعه تک نقطه ای می باشد.

برهان. همانطور که گفتیم، $W^s_\epsilon(x)$ و $W^u_\epsilon(x)$ در x به ترتیب مماس بر $E^s(x)$ و $E^u(x)$ هستند،همچنین به طور پیوسته با x در C^1 ـ توپولوژی تغییر می کنند. واضح است $\epsilon > 0$ وجود دارد، به قسمی که برای هر $x \in \Lambda$ اشتراک قاطع مجموعه های $W^s_\epsilon(x)$ و $W^u_\epsilon(x)$ نقطه تنهای x است. از این رو عدد مثبت $\delta(x)$ چنان موجود است که اگر $y \in \Lambda$ و $d(x,y) < \delta(x)$ آن گاه اشتراک قاطع $W^s_\epsilon(x)$ و $W^u_\epsilon(y)$ در یک نقطه ی تنها است، حال چون Λ فشرده است، δ را می توان از x مستقل انتخاب کرد.

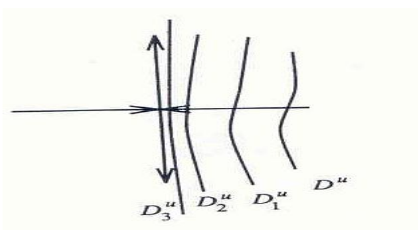
□

تعریف ۱.۲.۱۳.

*در قضیه فوق اگر $[x,y]_{\epsilon,\delta} \in \Lambda$ آن گاه گوییم Λ دارای **ساختار ضرب موضعی** است.*

قضیه ۱.۲.۱۴. **(λ ـ لم)**

فرض کنید p یک نقطه متناوب هذلولوی باشد. برای هر دیسک مانند B در $W^u(p)$ و هر $x \in W^s(p)$ و هر دیسک مانند D که با $W^s(p)$ در x اشتراک قاطع دارد، N ی چنان وجود دارد که اگر $n > N$ آن گاه $f^n(D)$ شامل دیسکی است که در C^1 ـ توپولوژی به B نزدیک است.



شکل ۱.۲: λ ـ لم

برهان. ر. ک. به [۱۹]. □

قضیه ۱.۲.۱۵.

فرض کنید p و q نقاط متناوب هذلولوی برای f باشند، همچنین

$$x \in W^s(p) \pitchfork W^u(q) \qquad , \qquad y \in W^s(q) \pitchfork W^u(p)$$

در این صورت x و y هر دو ناسرگردانند.

برهان. اثبات با ۲ بار به کار گیری λ ـ لم بوضوح برقرار است. □

تعریف ۱.۲.۱۶.

*گوییم f در **شرط A** صدق می کند، هرگاه*

۱. $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$

۲. *مجموعه $\Omega(f)$ هذلولوی باشد.*

قضیه ۱.۲.۱۷.

اگر f در شرط A صدق کند، در این صورت $\Omega(f)$ دارای ساختار ضرب موضعی است.

برهان. فرض کنید ϵ و δ ثابت های مذکور در قضیه ۱.۲.۱۲ برای $\Omega(f)$ باشند، همچنین فرض کنیم $x, y \in \Omega(f)$ که $d(x,y) < \delta$. اگر x و y هر دو متناوب باشند،آن گاه بنا به قضیه ۱.۲.۱۵

$$W^s_\epsilon(x) \pitchfork W^u_\epsilon(y) \qquad , \qquad W^s_\epsilon(y) \pitchfork W^u_\epsilon(x)$$

نا سرگردانند.در غیر این صورت دنباله های متناوب x_n همگرا به x و y_n همگرا به y موجودند، که

$$W^s_\epsilon(x_n) \pitchfork W^u_\epsilon(y_n) \qquad , \qquad W^s_\epsilon(y_n) \pitchfork W^u_\epsilon(x_n)$$

نا سرگردان خواهند بود.از این رو بنا به پیوستگی مجموعه های موضعی پایدار و ناپایدار

$$W^s_\epsilon(x_n) \pitchfork W^u_\epsilon(y_n) \to W^s_\epsilon(x) \pitchfork W^u_\epsilon(y)$$

پس

$$W^s_\epsilon(x) \pitchfork W^u_\epsilon(y) \qquad , \qquad W^s_\epsilon(y) \pitchfork W^u_\epsilon(x)$$

در $\Omega(f)$ قرار می گیرند.اکنون اثبات رابا توجه به $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$ به پایان می رسانیم.

□

قضیه ۱.۲.۱۸. (**تجزیه طیفی**)

فرض کنید f در شرط A صدق کند. در این صورت یک تجزیه برای $\overline{Per(f)}$ مانند

$$\overline{Per(f)} = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_s$$

وجود دارد، به طوری که هر $P_1, \ldots, P_s$ بسته، f ـ پایا،مجزاو ترایا توپولوژیکی است. هر یک از P_j ها مجموعه پایه ای f نامیده می شود.

برهان. ر. ک. به [۲۲].

□

تعریف ۱.۲.۱۹.

*فرض کنید $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \ldots \cup \Lambda_s$ یک تجزیه طیفی برای Λ باشد. یک **s ـ دور** از Λ دنباله ای مانند $\{\Lambda_{i_0}, \Lambda_{i_1}, \ldots, \Lambda_{i_s}\}$ است، به طوری که ۱ یا ۲ برقرار باشد.*

۱. *برای* $1 \leq j \neq k \leq s-1$

$$\Lambda_{i_0} = \Lambda_{i_0}\ ,\ \Lambda_{i_j} \neq \Lambda_{i_k}$$

۲. *برای* $0 \leq j \leq s-1$

$$W^u(\Lambda_{i_{j-1}}) \cap W^s(\Lambda_{i_j}) \neq \emptyset$$

و

$$W^s(\Lambda_{i_{j-1}}) \cap W^u(\Lambda_{i_j}) \neq \emptyset$$

چنانچه شرط ۱ و ۲ برقرار نباشند، گوییم Λ بدون دور است.

تعریف ۱.۲.۲۰.

فرض کنید $\Lambda \subset M$ یک مجموعه بسته و f ـ پایا باشد. $f|_\Lambda$ را

۱. ***انبساطی** نامند، هرگاه ثابت $\alpha > 0$ که ثابت انبساطی برای f نامیده می شود، وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $x, y \in \Lambda$ و هر $n \in \mathbb{Z}$ اگر داشته باشیم*

$$d(f^n(x), f^n(y)) < \alpha$$

آن گاه $x = y$