بسمه تعالی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

آنالیز، شناسایی و کنترل بهینه‌ی سیستم‌های خطی تأخیری چندگانه با استفاده از توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس

سخنران: فرزانه اکبری

زمان: یک‌شنبه ۳۱ /۶ /۹۲ ساعت ۱۷
مکان: سالن خوارزمی دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱– دکتر حمیدرضا مرزبان

۲– دکتر رضا مختاری

۳– دکتر مهدی تاتاری

۴– دکتر سید قهرمان طاهریان

چکیده

سیستم‌های تأخیری در بسیاری از شاخه‌های علوم و فنون کاربرد دارند، از این نظر آنالیز، شناسایی و کنترل بهینه این رده از سیستم‌ها از اهمیت بسزایی برخوردار است که در رده‌بندی مهمی از سیستم‌های کنترل جای می‌گیرند. پدیده‌هایی نظیر رشد جمعیت، شبکه‌های عصبی، خطوط انتقال، فرایندهای صنعتی و ... با استفاده از معادلات دیفرانسیل تأخیری مدل‌سازی می‌شوند. در بیشتر موارد فرآیند مربوط به پاسخ تحلیلی سیستم‌های تأخیری فوق‌العاده مشکل است، بدین لحاظ روش‌های عددی به‌خصوص در دو دهه‌ی اخیر مبتنی بر چندجمله‌ای‌های متعامد و چندجمله‌ای‌های تیلور و همچنین توابع متعامد مورد توجه بسیاری از محققین و مهندسین برای حل این‌گونه از سیستم‌ها قرار گرفته‌است.
هدف این پایان‌نامه، استفاده از یک روش عددی موثر و کارا مبتنی بر توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس برای آنالیز و شناسایی معادلات دیفرانسیل تأخیری چندگانه‌ی خطی و هم‌چنین کنترل بهینه‌ی سیستم‌های تأخیری چندگانه خطی با تابعی معیار درجه دوم است. ابتدا توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس معرفی شده و سپس با استفاده از روش مستقیم و ماتریس‌های عملیاتی انتگرال، حاصل‌ضرب و تأخیر، سیستم تأخیری به یک دستگاه معادلات خطی تبدیل می‌شود که حل آن به مراتب ساده‌تر از حل مساله‌ی اصلی است. برای نشان دادن دقت، قابلیت و کارایی روش مذکور مثال‌های متعددی بیان می‌شود.

واژه‌های کلیدی: چندجمله‌ای‌های لژاندر، توابع بلاک-پالس، توابع ترکیبی، ماتریس عملیاتی تأخیر

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

آنالیز، شناسایی و کنترل بهینه‌ی سیستم‌های خطی تأخیری چندگانه با استفاده از توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

فرزانه اکبری

استاد راهنما
دکتر حمیدرضا مرزبان

شهریور ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی خانم فرزانه اکبری
تحت عنوان

آنالیز، شناسایی و کنترل بهینه‌ی سیستم‌های خطی تأخیری چندگانه با استفاده از توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس

در تاریخ ۳۱ /۶ /۹۲ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما	دکتر حمیدرضا مرزبان
۲– استاد مشاور	دکتر رضا مختاری
۳– استاد داور۱	دکتر مهدی تاتاری
۴– استاد داور۲	دکتر سید قهرمان طاهریان

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده　　دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

خداوند متعال را سپاسگزارم که به سبب رحمت واسعه اش توفیق علم آموزی را نصیبم کرد و در مرحله ی دیگری از تحصیل و زندگیم همراهم بود.

از اولین و بزرگترین معلمانم پدر و مادر مهربانم و یگانه خواهرم که همواره مشوق و راهنمایم بوده اند و دلگرمی هایشان سختی این مسیر را برایم هموار نمود نهایت سپاس را دارم.

صمیمانه از استاد راهنمای بزرگوار و عزیزم آقای دکتر حمیدرضا مرزبان که شاگردی در محضر ایشان بزرگترین افتخار زندگیم بود، به خاطر تمام مساعدت ها، زحمات، پیگیری ها و راهنمایی های بسیار ارزنده و بی دریغشان در تمامی مراحل تحقیق و نگارش این پایان نامه و اینکه جبران قطره ای از زحمت ها و محبت هایشان برایم قابل تصور نیست، نهایت تشکر و امتنان را دارم.

از استاد مشاور گرامی جناب آقای دکتر رضا مختاری که در محضرشان نیز کسب علم نموده ام و از اساتید ارجمند آقای دکتر تاتاری و آقای دکتر طاهریان که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را بر عهده داشته اند تشکر فراوان دارم.

در پایان دست تمامی کسان و مخصوصاً دوستان عزیزم که در گذر زندگی چراغی فرا راهم داشتند به

گرمی می‌فشارم.

شهریور ۱۳۹۱

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

چکیده

سیستم‌های تأخیری در بسیاری از شاخه‌های علوم و فنون کاربرد دارند، از این نظر آنالیز، شناسایی و کنترل بهینه این رده از سیستم‌ها از اهمیت بسزایی برخوردار است که در رده‌بندی مهمی از سیستم‌های کنترل جای می‌گیرند. پدیده‌هایی نظیر رشد جمعیت، شبکه‌های عصبی، خطوط انتقال، فرایندهای صنعتی و ... با استفاده از معادلات دیفرانسیل تأخیری مدل‌سازی می‌شوند. در بیشتر موارد فرآیند مربوط به پاسخ تحلیلی سیستم‌های تأخیری فوق‌العاده مشکل است، بدین لحاظ روش‌های عددی به‌خصوص در دو دهه‌ی اخیر مبتنی بر چندجمله‌ای‌های متعامد و چندجمله‌ای‌های تیلور و همچنین توابع متعامد مورد توجه بسیاری از محققین و مهندسین برای حل این‌گونه از سیستم‌ها قرار گرفته‌است.

هدف این پایان‌نامه، استفاده از یک روش عددی موثر و کارا مبتنی بر توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس برای آنالیز و شناسایی معادلات دیفرانسیل تأخیری چندگانه‌ی خطی و هم‌چنین کنترل بهینه‌ی سیستم‌های تأخیری چندگانه خطی با تابعی معیار درجه دوم است. ابتدا توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس معرفی شده و سپس با استفاده از روش مستقیم و ماتریس‌های عملیاتی انتگرال، حاصل‌ضرب و تأخیر، سیستم تأخیری به یک دستگاه معادلات خطی تبدیل می‌شود که حل آن به مراتب ساده‌تر از حل مساله‌ی اصلی است. برای نشان دادن دقت، قابلیت و کارایی روش مذکور مثال‌های متعددی بیان می‌شود.

واژه‌های کلیدی: چندجمله‌ای‌های لژاندر، توابع بلاک-پالس، توابع ترکیبی، ماتریس عملیاتی تأخیر

فصل ۱

مقدمه

کل پدیده‌های طبیعی در حال تأخیر هستند، در حقیقت این گونه پدیده‌ها آنی انجام نمی‌گیرند. تأخیر پدیده‌های فیزیکی در مرحله‌ی بین عمل و عکس‌العمل رخ می‌دهند که ساده‌ترین نوع طبیعی آن سیستم عصبی انسان در پاسخ‌گویی به محرک‌ها است. اکثر پدیده‌های فیزیکی دارای رفتاری وابسته به زمان و همراه با تأخیر و محدودیت‌های گوناگونی هستند از این رو تجزیه و تحلیل این سیستم‌ها مورد توجه بسیاری از پژوهشگران بوده است. از آنجا که سیستم‌های تأخیری اغلب پیچیده هستند، بنابراین تعیین پاسخ تحلیلی این سیستم‌ها دربرخی موارد دشوار و اغلب امکان‌ناپذیر است.

سیستم‌های تأخیری زمان پیوسته توسط معادلات دیفرانسیلی توصیف می‌شوند، که معروف‌ترین نوع این‌گونه معادلات، معادلات دیفرانسیلی انتگرال است که توسط ولترا [۳۸] بیان شده است.

برای اولین بار در سال ۱۹۳۷، سیستم‌های تأخیری توسط کلندر [۵] مورد مطالعه قرار گرفت و در سال ۱۹۶۴، بیتمن [۲]، نظریه کنترل و ارتباط آن با زمان‌های تأخیر را مطرح و هم‌چنین، ویس در سال ۱۹۵۹ [۴۲] و چامسکی در سال ۱۹۶۰ [۱۰]، در این زمینه کتاب‌هایی را به رشته تحریر درآورده‌اند.

به‌طور کلی یک مساله‌ی کنترل به کمک دو متغیر وابسته به زمان، توصیف می‌شود که عبارتند از متغیر وضعیت $X(t)$، که رفتار سیستم را در هر مرحله بیان می‌کند و متغیر کنترل $U(t)$، که تکامل تدریجی سیستم را از یک مرحله به مرحله بعدی نشان می‌دهد.

مسایل کنترل به سه دسته‌ی آنالیز سیستم، شناسایی سیستم و کنترل بهینه سیستم تقسیم می‌شوند. در آنالیز سیستم، متغیرهای کنترل، $U(t)$ به عنوان ورودی سیستم با مقادیر معلوم هستند و هدف تعیین بردار وضعیت سیستم، $X(t)$ است. در شناسایی سیستم هدف تعیین پارامترهای سیستم است، زمانی که بردار وضعیت و کنترل معلوم باشند. در کنترل بهینه، بردار وضعیت و کنترل هر دو مجهول هستند و هدف تعیین سیگنال‌های کنترل $U(t)$ به‌گونه‌ای که در محدودیت‌های فیزیکی موجود صدق کند و هم‌چنین تابعی عملکرد را بیشینه یا کمینه کند. حل برخی از این‌گونه مسایل به روش تحلیلی گاهی پیچیده و یا حتی امکان‌ناپذیر است، بنابراین استفاده از روش‌های عددی می‌تواند چاره‌ساز باشد. در این پایان‌نامه، با استفاده از روش مستقیم و ماتریس‌های عملیاتی انتگرال، تأخیر و حاصل‌ضرب، سیستم

دینامیکی به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌شود که از حل آن جواب تقریبی سیستم حاصل می‌شود.
توابع متعامد به سه دسته‌ی توابع قطعه‌ای ثابت، چندجمله‌ای‌های متعامد و توابع سینوسی-کسینوسی تقسیم‌بندی می‌شوند. توابع والش و توابع بلاک-پالس از نوع توابع قطعه‌ای ثابت هستند که در دامنه‌ی تعریف خود دارای ناپیوستگی می‌باشند. چندجمله‌ای‌های متعامد شامل چندجمله‌ای‌های لاگر، چندجمله‌ای‌های لژاندر، چندجمله‌ای‌های چبیشف هستند و توابع سینوسی-کسینوسی شامل سری‌های فوریه می‌باشند.
مثال‌هایی با استفاده از روش مستقیم و مجموعه‌های متعامد برای حل سیستم‌های دینامیکی در مراجع، [۱۱] در سال ۱۹۹۵ و [۴۰] در سال ۱۹۸۸، برای چندجمله‌ای‌های چبیشف، [۱۴] در سال ۱۹۸۱ و [۱۵] در سال ۱۹۸۵، برای توابع بلاک-پالس [۱۶] در سال ۱۹۸۳، برای چندجمله‌ای‌های لاگر، [۶] در سال ۱۹۸۵، و [۷] در سال ۱۹۸۵، برای چندجمله‌ای‌های لژاندر، [۸] در سال ۱۹۷۸، و [۹] در سال ۱۹۸۲، برای توابع والش و [۳۱] در سال ۱۹۸۸، برای سری‌های فوریه بیان و [۳۲] در سال ۱۹۸۸، و [۳۳] در سال ۱۹۸۹، نیز کاربرد چندجمله‌ای‌های تیلور و فوریه در حل مسایل حساب تغیرات خطی به کمک روش مستقیم مطرح شده است.
توابع دارای ناپیوستگی را با توابع متعامد پیوسته ، هم‌چنین توابع پیوسته را با توابع قطعه‌ای ثابت نمی‌توان به خوبی تقریب زد. بنابراین استفاده از توابع ترکیبی که یک پایه از توابع متعامد پیوسته و یک پایه از توابع قطعه‌ای ثابت را با یکدیگر ترکیب می‌کند، حوزه‌ی جدیدی ایجاد کرده، به‌طوری‌که از ویژگی‌های هر دو سیستم، توابع قطعه‌ای ثابت و توابع متعامد پیوسته به طور همزمان بهره می‌گیرد. از آنجایی که پاسخ سیستم‌های تأخیری ناهموار هستند، بنابراین با استفاده از توابع ترکیبی رفتار دینامیکی سیستم را به درستی می‌توان شبیه‌سازی کرد. هدف این پایان‌نامه استفاده از توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس در آنالیز، شناسایی و کنترل بهینه سیستم‌های خطی تأخیری متغیر با زمان با تابعی معیار درجه دوم است. تاکنون توابع ترکیبی مختلفی مطرح شده و در حل مسایل مختلف مورد استفاده قرار گرفته که از آن جمله می‌توان به توابع ترکیبی چبیشف-بلاک پالس [۳۶] در سال ۲۰۰۱، توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس [۲۴] در سال ۲۰۰۴، توابع ترکیبی تیلور و بلاک-پالس [۲۵] در سال ۲۰۰۵ و [۲۶] در سال ۲۰۰۶ اشاره کرد.
به منظور نشان دادن قابلیت کاربرد، دقت و کارایی روش مورد استفاده مثال‌های متعددی در زمینه آنالیز، شناسایی و کنترل بهینه به همراه مدل‌سازی، نتایج، شکل‌ها و شرایط لازم بهینگی مربوط به کنترل بهینه ارایه شده است.

۱.۱ مروری بر فصل‌های دیگر

در یک نگاه کلی ساختار این پایان‌نامه به شرح زیر می‌باشد.
فصل اول به معرفی توابع بلاک-پالس و مجموعه توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس و هم‌چنین به بررسی ویژگی‌های و معرفی عملگرهای این توابع ترکیبی اختصاص داده شده است.
در فصل دوم پس از ارایه مقدمه‌ای کوتاه در مورد آنالیز سیستم، مساله آنالیز یک سیستم خطی تأخیری چندگانه معرفی می‌شود، سپس به حل مساله با استفاده از توابع ترکیبی پایه پرداخته شده و در ادامه با ارایه مثال‌هایی، عملکرد، کاربرد و دقت روش مورد استفاده بررسی می‌شود.

در فصل سوم به شناسایی سیستم تأخیری چندگانه خطی پرداخته می‌شود که ابتدا شناسایی سیستم تأخیری معرفی و با استفاده از روش مستقیم به تخمین پارامترهای مجهول پرداخته و در ادامه مثال‌هایی در این زمینه مطرح می‌شود.

در فصل چهارم ضمن معرفی یک سیستم تأخیری چندگانه خطی با تابعی معیار درجه دوم به توضیح روش مستقیم با استفاده از توابع ترکیبی لژاندر–بلاک پالس پرداخته می‌شود. سپس این سیستم مدل‌سازی شده و شرایط لازم بهینگی این‌گونه از سیستم‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه مثال‌هایی متنوع از مسایل کنترل بهینه سیستم‌های تأخیری چندگانه خطی با تابعی معیار درجه دوم ارایه می‌شود که نتایج به‌دست آمده از حل آن‌ها کارایی و دقت بسیار چشم گیر روش مورد بررسی را نشان می‌دهد. با استفاده از شرایط لازم بهینگی برای مسایلی که اطلاعی از جواب دقیق آن‌ها نداریم، همگرایی روش، مورد بررسی قرار داده می‌شود.

فصل ششم مربوط به برنامه‌های کامپیوتری فصل‌های دوم، سوم و چهارم پایان‌نامه است که در ابتدای فصل برنامه‌های کلی که در حل تمام مسایل مورد نیاز است توضیح داده شده و سپس به برنامه‌های کامپیوتری مربوط به مثال‌های حل شده در فصول گذشته اختصاص داده می‌شود.

در پیوست به برخی مفاهیم مربوط به ماتریس‌ها و ویژگی‌های توابع لژاندر که در این پایان نامه مورد استفاده قرار گرفته‌اند پرداخته می‌شود.

فصل ۲

توابع ترکیبی

این فصل از سه بخش تشکیل شده است در بخش اول به توضیح مفاهیم اولیه در مورد توابع بلاک-پالس پرداخته [۱۸]، بخش دوم توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس را معرفی کرده [۲۳] و در بخش آخر عملگرهای این توابع ترکیبی مورد بررسی قرار داده می‌شود.

۱.۲ توابع بلاک-پالس

توابع بلاک-پالس، توابع متعامد قطعه‌ای ثابت هستند که نخستین بار توسط هارموث در سال ۱۹۶۹ معرفی شده‌اند. اما تا سال ۱۹۷۶ این توابع کاربرد چندانی نداشتند و قبل از آن توابع والش در حل مسایل کنترل کاربرد داشته که پیاده‌سازی مساله با این توابع در برخی موارد، باعث ایجاد عبارت‌های پیچیده‌ای می‌شدند. اما توابع بلاک-پالس چنین ساختاری را ندارند و با توجه به داشتن خواص توابع قطعه‌ای ثابت بسیار ساده تعریف می‌شوند، توابع بلاک-پالس در حل معادلات عادی، کسری و ... بسیار کاربرد دارند، یک مثال کاربردی از توابع بلاک-پالس استفاده از این توابع در محاسبه انتگرال ریمان می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۲

با تقسیم کردن بازه‌ی $[0,1]$ به N قسمت، یک افراز یکنواخت در نظر گرفته و تابع $\phi_n(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\phi_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}), \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت}. \end{cases}$$

تابع $\phi_n(t)$ در بازه‌ی کلی‌تری مانند $[0, t_f)$، به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$\phi_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [(\frac{n-1}{N})t_f, (\frac{n}{N})t_f), \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت}. \end{cases}$$

به‌طوری که $n = 1, 2, \dots, N$ و N عدد صحیح مثبت دلخواه است. $\Phi = \{\phi_1(t), \dots, \phi_N(t)\}$ یک مجموعه‌ی توابع بلاک-پالس روی بازه‌ی $[0, t_f)$ نامیده می‌شود و هر یک از زیربازه‌های $[(\frac{i-1}{N})t_f, (\frac{i}{N})t_f]$، iامین بلاک است.
▲

به‌عنوان مثال مجموعه‌ی Φ به ازای $N = 6$ بر روی بازه‌ی $[0, 3)$ به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود. که مجموعه Φ شامل $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_6(t)$ می‌باشد. در شکل ۱.۲ این مجموعه رسم شده است.

$$\phi_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت}, \end{cases} \qquad \phi_2(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\frac{1}{2}, 1), \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت}, \end{cases}$$

$$\phi_3(t) = \begin{cases} 1, & t \in [1, \frac{3}{2}), \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت}, \end{cases} \qquad \phi_4(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\frac{3}{2}, 2), \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت}, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\phi_5(t) = \begin{cases} 1, & t \in [2, \frac{5}{2}), \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت}, \end{cases} \qquad \phi_6(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\frac{5}{2}, 3), \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت}. \end{cases}$$

۱.۱.۲ ویژگی‌های توابع بلاک-پالس

توابع بلاک-پالس دارای سه خاصیت مجزا بودن، تعامد و کامل بودن روی بازه‌ی $[0, 1)$ هستند.

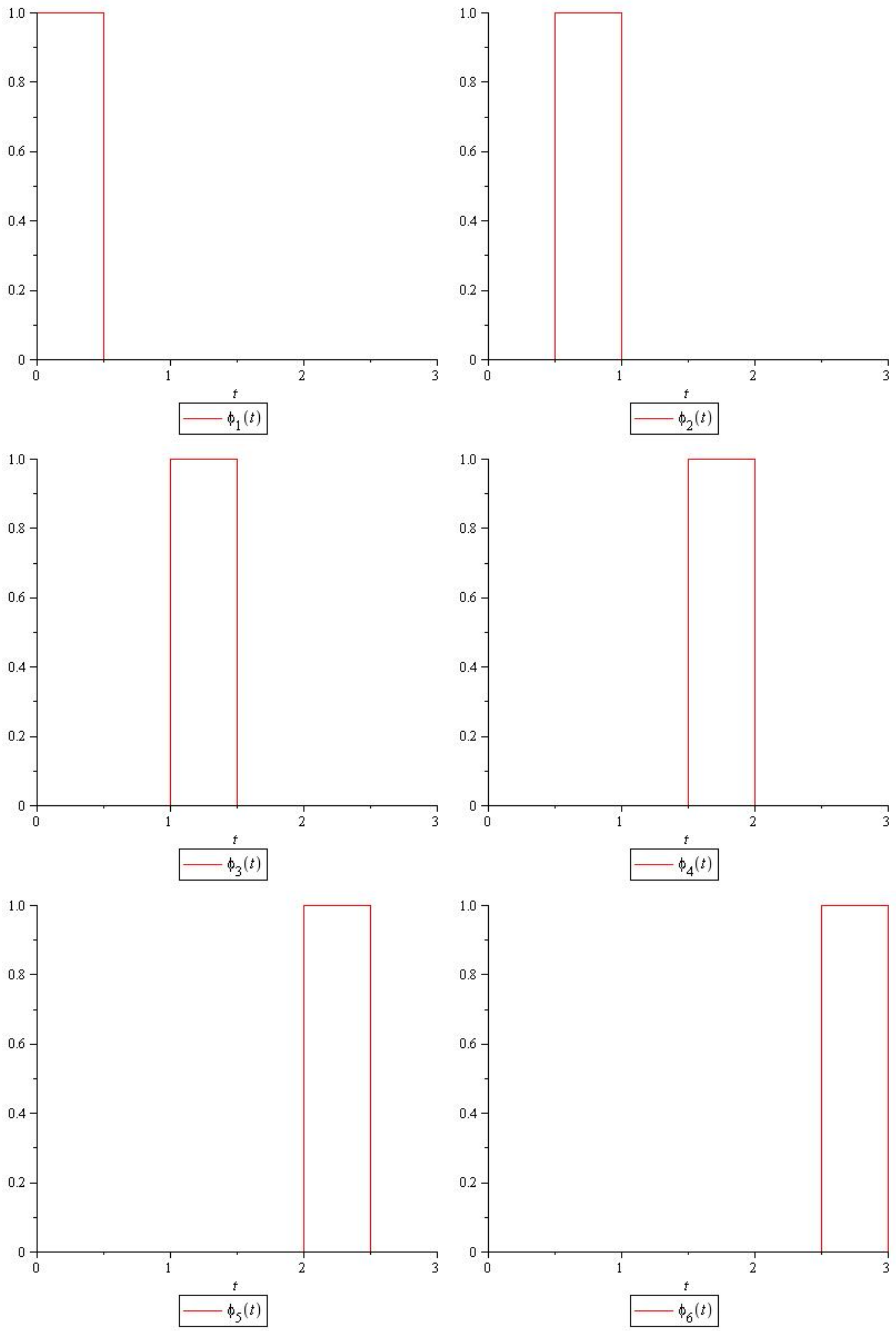
۱- مجزابودن

توابع بلاک-پالس از یکدیگر مجزا هستند، زیرا

$$\phi_i(t)\phi_j(t) = \begin{cases} \phi_i(t), & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

۲- تعامد

تعامد نتیجه‌ای از خاصیت مجزا بودن است، از آن‌جایی که تابع وزن توابع بلاک-پالس روی بازه‌ی $[0, 1)$، یک



شکل ۲.۱: نمودار مجموعه‌ی توابع بلاک-پالس به ازای $N = ۶$
روی بازه‌ی $[۰, ۳)$

است و با توجه به تعریف ضرب داخلی در یک فضای نرم‌دار داریم

$$\int_{0}^{t_f} \Big(\phi_i(t)\phi_j(t)\Big)\mathrm{d}t = \begin{cases} h, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

به‌طوری‌که $h=\frac{t_f}{N}$، نرم افراز است.

۳- کامل‌بودن

کامل بودن توابع بلاک-پالس در فضای هیلبرت $\mathcal{L}^2[0,t_f]$ توسط تولستوف [۱۸] ثابت شده است.

۲.۲ توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس

با توجه به ساختار چندجمله‌ای‌های لژاندر-بلاک پالس می‌توان توابع ترکیبی متعامدی ایجاد کرد که دارای ویژگی‌های توابع بلاک-پالس و چندجمله‌ای‌های لژاندر است.
بازه $[0,t_f)$ را در نظر بگیرید که به N قسمت مساوی تقسیم شده است. حال چندجمله‌ای‌های لژاندر در هر یک از این زیربازه‌ها تعریف می‌شود. از آنجا که چندجمله‌ای‌های لژاندر در بازه $[-1,1]$ متعامد هستند، باید به دنبال یک نگاشت خطی باشیم که هر یک از زیربازه‌های $[(\frac{n-1}{N})t_f,(\frac{n}{N})t_f)$، $n=1,2,\dots,N$ را به $[-1,1]$ انتقال دهد. این نگاشت خطی از محاسبه‌ی α و β در عبارت زیر محاسبه می‌گردد. که حاصل مساوی $\frac{2N}{t_f}t-2n+1$ است

$$[(\frac{n-1}{N})t_f,(\frac{n}{N})t_f) \qquad \xrightarrow{(\alpha t+\beta)} \qquad [-1,1]\ .$$

تعریف ۱.۲.۲

توابع ترکیبی $b_{nm}(t)$، $n=1,2,\dots,N$ و $m=0,1,\dots,M-1$ بر روی فاصله $[0,t_f)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$b_{nm}(t)=\begin{cases} P_m\Big(\frac{2N}{t_f}t-2n+1\Big), & t\in\Big[(\frac{n-1}{N})t_f,(\frac{n}{N})t_f\Big), \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت}, \end{cases} \tag{۲.۲}$$

به‌طوری‌که n و m به ترتیب، درجه توابع بلاک-پالس و چندجمله‌ای‌های لژاندر می‌باشد و $P_m(\frac{2N}{t_f}t-2n+1)$ چندجمله‌ای لژاندر مرتبه m است که هر زیربازه‌ها را به $[-1,1]$ نگاشت می‌دهد. اگر $m=0$ در نظر گرفته شود، آنگاه b_{nm}ها دقیقا همان توابع بلاک-پالس می‌شوند. ▲

۱.۲.۲ ویژگی‌های توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس

این بخش به بررسی مهم‌ترین خواص توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس می‌پردازد که باعث سادگی و دقت در حل مسایل با استفاده از این توابع ترکیبی می‌شود.

۱- **تعامد**

از آنجایی که توابع بلاک-پالس و چندجمله‌ای‌های لژاندر دارای خاصیت تعامد هستند، بنابراین توابع ترکیبی حاصل نیز خاصیت تعامد را دارند.

۲- **کامل بودن**

توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس با تابع وزن یک دارای خاصیت کامل بودن در فضای هیلبرت $\mathcal{L}^{2}[0,t_f]$ هستند [۱۸].

۲.۲.۲ بسط توابع بر حسب توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس

با توجه به کامل بودن توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس در فضای هیلبرت $\mathcal{L}^{2}[0,t_f]$ هر تابع دلخواه f متعلق به این فضا را می‌توان بر حسب این توابع ترکیبی بسط داد، یعنی داریم

$$f(t) \simeq \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} b_{nm}(t) = C^{T} B(t), \tag{۳.۲}$$

البته این بسط یک تقریب برای تابع $f(t)$ است. مقدار دقیق بسط زمانی است که حدود سری‌ها بی‌نهایت باشند. برای راحتی، سری به شکل برداری نمایش داده‌می‌شود. یعنی بردارهای C و $B(t)$ به صورت زیر هستند

$$C = [c_{1,0}, \dots, c_{1,M-1}, \dots, c_{2,0}, \dots, c_{2,M-1}, \dots, c_{N,0}, \dots, c_{N,M-1}]^{T}, \tag{۴.۲}$$

$$B(t) = [b_{1,0}(t), \dots, b_{1,M-1}(t), \dots, b_{2,0}(t), \dots, b_{2,M-1}(t), \dots, b_{N,0}(t), \dots, b_{N,M-1}(t)], \tag{۵.۲}$$

بردار (۵.۲)، بردار پایه نامیده می‌شود.
ضرایب بسط c_{nm} از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$c_{nm} = \frac{< f(t), b_{nm}(t) >}{< b_{nm}(t), b_{nm}(t) >}, \tag{۶.۲}$$

که $<\ ,\ >$ حاصل‌ضرب داخلی در فضای هیلبرت $\mathcal{L}^{۲}[۰, t_f]$ است، یعنی

$$c_{nm} = \frac{\int_{\frac{n-۱}{N}t_f}^{\frac{n}{N}t_f} f(t).P_m(\frac{۲N}{t_f}t - ۲n + ۱)\,\mathrm{d}t}{\int_{\frac{n-۱}{N}t_f}^{\frac{n}{N}t_f} \left(P_m(\frac{۲N}{t_f}t - ۲n + ۱)\right)^{۲}\mathrm{d}t} \ . \tag{۷.۲}$$

۳.۲ عملگرهای توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس

در این بخش به معرفی برخی از عملگرهای توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس که در حل سیستم‌های تأخیری چندگانه کاربرد دارد، می‌پردازیم.

۱.۳.۲ ماتریس عملیاتی انتگرال

انتگرال بردار پایه $B(t)$ روی بازه‌ی $[۰, t_f)$ به صورت زیر تقریب زده می‌شود

$$\int_{۰}^{t} B(t')\,\mathrm{d}t' \simeq PB(t) \ . \tag{۸.۲}$$

به‌طوری‌که P یک ماتریس $MN \times MN$ است و ماتریس عملیاتی انتگرال نامیده می‌شود [۲۳]

$$P = \begin{bmatrix} E & H & H & \dots & H \\ O & E & H & \dots & H \\ O & O & E & \dots & H \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & E \end{bmatrix}, \tag{۹.۲}$$

که در آن ماتریس صفر O، H و E ماتریس‌هایی با ابعاد $M \times M$ هستند، به‌طوری‌که

$$H = \frac{t_f}{N}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \end{bmatrix}, \tag{۱۰.۲}$$