

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده مهندسی

گروه مهندسی مکانیک

عنوان پایان نامه:

## تحلیل غیر فوریه ارتعاش حرارتی در تیر دو سر مفصل

نگارنده:

علیرضا شیرشاد

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته

مهندسی هوافضا، گرایش سازه‌های هوایی

استاد راهنما:

دکتر حمید اختراعی طوسی

اسفندماه ۱۳۹۱

# اظهارنامه

اینجانب علیرضا شیرشاد دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی هوافضا گرایش سازه های هوایی دانشکده فنی مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد نویسنده رساله/پایان نامه تحلیل غیر فوریه ارتعاش حرارتی در تیر دو سر مفصل ، تحت راهنمایی دکتر حمید اختراعی طوسی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این رساله/پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در رساله/پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه فردوسی مشهد » و یا « Ferdowsi University of Mashhad » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله/پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از رساله/پایان نامه رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این رساله/پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این رساله/پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ امضای دانشجو

## مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در رساله/پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.
- متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده وجود داشته باشد.



## صور تجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان نامه آقای علیرضا شیرشاد دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی هوافضا گرایش سازه های هوایی در ساعت ..... روز ...../...../..... در محل کلاس ۲۱۲ دانشکده مهندسی با حضور امضا کنندگان ذیل تشکیل گردید. پس از بررسی های لازم، هیأت داوران پایان نامه نامبرده را با نمره به عدد ..... به حروف ..... و با درجه ..... مورد تأیید قرار داد.

عنوان رساله

### تحلیل غیر فوریه ارتعاش حرارتی در تیر دو سر مفصل

امضا

هیأت داوران

- داور: دکتر بهروز حسنی  
دانشیار گروه مهندسی مکانیک دانشگاه فردوسی مشهد
- داور: دکتر حمید معین فرد  
استادیار گروه مهندسی مکانیک دانشگاه فردوسی مشهد
- داور و نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر مجید معاونیان  
دانشیار گروه مهندسی مکانیک دانشگاه فردوسی مشهد
- استاد راهنما: دکتر حمید اختراعی طوسی  
دانشیار گروه مهندسی مکانیک دانشگاه فردوسی مشهد
- مدیر گروه: دکتر حمید نیازمند  
دانشیار گروه مهندسی مکانیک دانشگاه فردوسی مشهد

تقدیم به مادرم

او که مویش سپیدی گرفت تا رویم سپید بماند،

او که فروغ نگاهش و گرمی کلامش سرمایه های جاودانی زندگانیم است.

## تشکر و قدردانی

بر خود لازم می بینم از زحمات جناب آقای دکتر اختراعی طوسی که در این مدت باعث زحمت و رنجش ایشان شدم، قدردانی نمایم. همینطور از آقای مهندس سلمان علیمردانی که راهنمایی‌های ایشان در مرحله برنامه نویسی در طول انجام پایان‌نامه کمک شایانی به اینجانب نموده است، تشکر می‌نمایم.



بسمه تعالی  
 مشخصات پایان نامه تحصیلی مقطع کارشناسی ارشد  
 دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان پایان نامه: تحلیل غیر فوریه ارتعاش حرارتی در تیر دو سر مفصل

نام نویسنده: علیرضا شیرشاد

نام استاد راهنما: دکتر حمید اختراعی طوسی

دانشکده: مهندسی	گروه: مهندسی مکانیک	رشته تحصیلی: مهندسی هوافضا- سازه‌های هوایی
-----------------	---------------------	--

تاریخ تصویب: ۱۳۹۱/۹/۲۸	تاریخ دفاع:
------------------------	-------------

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد	● دکتری ○	تعداد صفحات: ۹۸
----------------------------	-----------	-----------------

چکیده پایان نامه:

تغییر ناگهانی دما در یک محیط و به دنبال آن شوک کرنشی حاصل، منشاء ایجاد ارتعاش است. در اغلب موارد دامنه این ارتعاش کوچک و آثار آن معمولاً توسط میرائی سازه‌ای حذف می‌شود. در برخی موارد نظیر مطالعه شوک حرارتی در مقیاس نانو، تحلیل غشاءها و یا حرکات دقیق ماهواره ها و سفینه ها در مدار، این نوع ارتعاش و آثار آن قابل ملاحظه است. در این راستا این پایان نامه پدیده ارتعاش صفحات نازک را در اثر انتقال حرارت غیر فوریه‌ای بررسی می نماید. بدین منظور ابتدا معادلات انتقال گرما در حالت غیر فوریه برای یک تیغه متوازی السطوح حل می‌شود. جواب به صورت سری‌های فوریه‌ای دو تکه ارائه خواهد شد. با استفاده از میدان توزیع دمای حاصل از تحلیل حرارتی غیر فوریه و در نظر گرفتن الگوی غیر کوپله (تغییر مکان کوچک) در تحلیل ترمومکانیکی معادله ارتعاش یک تیر با شرایط مرزی دو سر مفصل در اثر این پدیده در طول زمان مطالعه می شود. بدین منظور تغییر مکان تیر شامل دو قسمت مکانیکی و حرارتی در نظر گرفته می‌شود و عبارت حرارتی که با استفاده از تحلیل انتقال حرارت غیر فوریه‌ای بدست می‌آید در قالب کرنش حرارتی به مدل ترموالاستیک تیر مرتبط می‌شود. معادله حاصل با استفاده از روش تفاضل محدود حل می‌شود. نتایج در قالب منحنیهای توزیع غیر فوریه دما و توزیع امواج ارتعاشی ارائه و بررسی می‌شود. همچنین برای مقایسه این پدیده با نرم‌افزار اجزاء محدود آباکوس (Abaqus CAE) شبیه‌سازی می‌شود.

امضای استاد راهنما:.....	کلید واژه:
تاریخ:.....	۱. ارتعاش حرارتی ۲. انتقال حرارت غیر فوریه ۳. تیر ۴. حل بسته تحلیلی ۵. عدد ورنوت

## فهرست مطالب:

۱	فصل اول: مقدمه	۱
۱-۱	مقدمه	۲
۲-۱	تاریخچه:	۶
۱-۲-۱	پدیده انتقال حرارت غیرفوریه‌ای:	۷
۲-۲-۱	ارتعاشات ناشی از گرما (TIV):	۱۲
۳-۱	مراحل پژوهش و طبقه بندی گزارش	۲۲
۲	فصل دوم: انتقال حرارت فوریه و غیرفوریه	۲۵
۱-۲	مقدمه ای بر این فصل:	۲۶
۲-۲	انتقال حرارت فوریه:	۲۶
۳-۲	انتقال حرارت غیرفوریه	۲۹
۳	فصل سوم: ارتعاش حرارتی تیرها	۳۶
۱-۳	مقدمه‌ای بر فصل	۳۷
۲-۳	کمانش حرارتی تیرها	۳۷
۳-۳	ارتعاش خمشی تیرها	۴۰
۱-۳-۳	مدهای طبیعی تیر تحت تأثیر ارتعاش خمشی	۴۴
۴-۳	ارتعاش ناشی از انتقال حرارت غیر فوریه ای:	۵۰
۱-۴-۳	روش تفاضل محدود:	۵۱
۵-۳	نرم افزار اجزاء محدود آباکوس (Abaqus CAE):	۶۲
۱-۵-۳	توانایی ها	۶۳



۷۱	اصول آنالیز.....	۲-۵-۳
۷۳	تماس‌ها CONTACT:.....	۳-۵-۳
۷۵	<b>فصل چهارم: نتایج و بررسی آنها.....</b>	<b>۴</b>
۷۶	نتایج بدست آمده از جواب معادله انتقال حرارت فوریه:.....	۱-۴
۷۷	نتایج بدست آمده از جواب معادله انتقال حرارت غیر فوریه:.....	۲-۴
۷۹	عوامل موثر بر خطای گیبس.....	۳-۴
۸۰	خطا در تحلیل انتقال حرارت فوریه‌ای.....	۴-۴
۸۰	توزیع خطای انتشار در طول زمان.....	۴-۴-۱
۸۲	تأثیر ضخامت جداره بر خطای تحلیل فوریه.....	۴-۴-۲
۸۲	نتایج بدست آمده از حل معادله ارتعاش حرارتی غیر فوریه با استفاده از روش تفاضل محدود:.....	۵-۴
۸۴	بررسی پدیده ارتعاش ناشی از حرارت با استفاده از نرم‌افزار آباکوس (Abaqus CAE).....	۶-۴
۸۸	<b>فصل پنجم: نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات.....</b>	<b>۵</b>
۹۳	فهرست مراجع.....	
۹۵	پیوست.....	

## فهرست اشکال:

- شکل ۱-۱: شرایط کرانی دمایی..... ۵
- شکل ۲-۱: پیشروی حرارت در طول زمان در اثر پالس لیزر از یک سمت قطعه [۱۱] ..... ۸
- شکل ۳-۱: شمایی از استوانه تحت عملیات اسپارک [۱۰]..... ۹
- شکل ۴-۱: دمای بدست آمده برای استوانه بر اساس مدل غیرفوریه‌ای در  $Fo=0.5$  و  $Ve=0.7$  [۱۰] ... ۱۰
- شکل ۵-۱: دمای استوانه در امتداد محور مرکزی با استفاده از مدل غیرفوریه‌ای در اعداد ورنوت مختلف [۱۰] ..... ۱۰
- شکل ۶-۱: مقایسه پاسخ دمایی سطح داخلی و خارجی کره  $X_i=0.3, Fo=0.2$  [۱۲] ..... ۱۱
- شکل ۷-۱: تأثیرات عدد ورنوت بر پاسخ دمایی در سطح خارجی کره در  $X_i=0.3, Fo=0.2$  [۱۲] ..... ۱۱
- شکل ۸-۱: اختلاف فاز بین سطوح داخلی و خارجی بر حسب تابع عدد ورنوت [۱۲] ..... ۱۲
- شکل ۹-۱: نسبت دامنه بر حسب تابع عدد ورنوت [۱۲] ..... ۱۲
- شکل ۱۰-۱: تلسکوپ فضایی هابل به همراه SA3 [۱۴]..... ۱۴
- شکل ۱۱-۱: SA3 بر روی پایه نصب شده برای انجام آزمایش [۱۴] ..... ۱۴
- شکل ۱۲-۱: مدل سایش در درگیری روتور و استاتور [۲۰] ..... ۱۶
- شکل ۱۳-۱: مقدار جابجایی روتور برای مدل تماسی شکل (۱۲-۱) [۲۰] ..... ۱۶
- شکل ۱۴-۱: نمای مش بندی شده روتور [۲۰] ..... ۱۶
- شکل ۱۵-۱: نمودار ۳ بعدی ممان خمشی [۲۰]..... ۱۷
- شکل ۱۶-۱: تیر s-s به همراه سنسورهای پیروالکترونیک [۲۱]..... ۱۸
- شکل ۱۷-۱: نمودار ولتاژ پیزوالکترونیک بر حسب دما [۲۱] ..... ۱۸
- شکل ۱۸-۱: نمودار میرایی کنترلر LQR [۲۱] ..... ۱۹
- شکل ۱۹-۱: نمودار میرایی کنترلر PPF [۲۱] ..... ۱۹
- شکل ۲۰-۱: تیر دو سر مفصل با اعمال گرما از یک سمت [۲۲] ..... ۲۰

- شکل ۱-۲۱: نمایی از یک فضا پیما و Boom آن [۲۳] ..... ۲۱
- شکل ۱-۲۲: مدل کردن Boom به یک تیر گیردار با جرم متمرکز در انتهای آن [۲۳] ..... ۲۲
- شکل ۲-۱: شرایط کرانی در انتقال حرارت یک بعدی ..... ۳۰
- شکل ۲-۲: ایجاد پدیده گیس در یک تابع متناوب و جواب نهایی آن ..... ۳۵
- شکل ۳-۱: کرنش تیر در اثر حرارت و ایجاد ارتعاش ..... ۳۸
- شکل ۳-۲: بارگذاری خمشی روی تیر [۲۴] ..... ۴۱
- شکل ۳-۳: بارگذاری گسترده روی تیر دو سر مفصل [۲۴] ..... ۴۵
- شکل ۳-۴: مدهای ارتعاشی و فرکانس‌های آن [۲۴] ..... ۴۸
- شکل ۳-۵: تابع  $f(x)$  [۲۵] ..... ۵۱
- شکل ۳-۶: فلوجارت تحلیل در نرم‌افزار آباکوس ..... ۶۴
- شکل ۳-۷: یک میله تحت یک نیروی محوری ..... ۶۵
- شکل ۳-۸: نمایی از یک تیر ۲ المانی ..... ۶۶
- شکل ۳-۹: دیاگرام آزاد هر یک از گره‌ها ..... ۶۶
- شکل ۳-۱۰: مدل ۴ گره‌ای، در حالت آغازی نیروی به انتهای آزاد تیر وارد می‌شود ..... ۶۸
- شکل ۳-۱۱: اثر نیرو روی المان ۱ ..... ۶۹
- شکل ۳-۱۲: کرنش روی المان ۱ ..... ۶۹
- شکل ۳-۱۳: کرنش روی المان ۲ ..... ۷۰
- شکل ۳-۱۴: فلوجارت آنالیز ..... ۷۲
- شکل ۴-۱: نمودار انتقال حرارت فوریه ای یک بعدی در راستای زمان ..... ۷۶
- شکل ۴-۲: نمودار انتقال حرارت غیر فوریه ای یک بعدی در راستای زمان در  $Ve = 0.015$  ..... ۷۷
- شکل ۴-۳: نمودار انتقال حرارت غیر فوریه ای یک بعدی در راستای زمان در  $Ve = 0.022$  ..... ۷۷
- شکل ۴-۴: نمودار انتقال حرارت غیر فوریه ای یک بعدی در راستای زمان در  $Ve = 0.03$  ..... ۷۸

- شکل ۴-۵: نمودار انتقال حرارت غیر فوریه ای یک بعدی در راستای زمان در  $Ve=0.045$  ..... ۷۹
- شکل ۴-۶: نمودار انتقال حرارت غیر فوریه ای یک بعدی در راستای زمان در  $Ve=0.06$  ..... ۷۹
- شکل ۴-۷: اثر تعداد جملات بسط بر خطای گیبس ..... ۸۰
- شکل ۴-۸: نمودار پیشروی جبهه حرارت در اختلاف دمای  $T=0/075^{\circ}C$  ..... ۸۱
- شکل ۴-۹: نمودار تفاضل نسبی بین دو حالت فوریه و غیر فوریه در طول زمان اختلاف دمایی  $T=0/075^{\circ}C$  ..... ۸۱
- شکل ۴-۱۰: ارتعاشات ناشی از انتقال حرارت غیر فوریه ای بر روی تیر دوسر مفصل با استفاده از نرم افزار متلب (MATLAB) در  $Ve=0.03$  ..... ۸۳
- شکل ۴-۱۱: تغییرات ماکزیمم دامنه عرضی بر حسب عدد ورنوت ..... ۸۴
- شکل ۴-۱۲: مدل طراحی شده برای تیر دو سر مفصل ..... ۸۵
- شکل ۴-۱۳: فرآیند گرم شدن قطعه در طول زمان ..... ۸۶
- شکل ۴-۱۴: بررسی ارتعاش ناشی از حرارت با استفاده از نرم افزار آباکوس ..... ۸۶
- شکل ۴-۱۵: بررسی مود اول ارتعاش حرارتی در وسط غشاء با استفاده از نرم افزار آباکوس ..... ۸۷
- شکل ۴-۱۶: مقایسه ارتعاشات عرضی بین دو حل نیمه تحلیلی و نرم افزار آباکوس ..... ۸۷

نمادها			
نماد	نام فارسی	نام انگلیسی	واحد
q	گرمای بوجود آمده	Heat	J
T	دمای سطوح	Temperature	K
K	ضریب هدایت حرارتی	Thermal Conductivity	J.m/K
c	ظرفیت ویژه حرارتی	Specific heat capacity	J/kg.K
t	متغیر زمانی	Time	s
x	متغیر مکانی	Displacement	m
E	مدول الاستیک	Elastic modulus	Pa
$\nu$	خیز عرضی تیر	Bending Deformation	m
Ve	عدد ورنوت	Vernote number	-
Fo	عدد فوریه (متغیر بی بعد شده زمان)	Fourier number	-
y	خیز تیر	Deformation	m
M	گشتاور	Torque	N.m
B	پهنای تیر	Breadth	m
L	طول تیر	Length	m
H	عرض تیر	Width	m
$h_i$	گام مکانی	Position increment	m
$k_j$	گام زمانی	Time increment	s

i	شمارنده مکانی	Position index	-
j	شمارنده زمانی	Time index	-
<b>علائم یونانی</b>			
نماد	نام فارسی	نام انگلیسی	واحد
$\rho$	چگالی	Density	Kg/m <sup>3</sup>
$\nabla T$	گرادیان دما	Temperature gradient	-
$\alpha$	قابلیت پخش حرارتی	Thermal diffusivity	m <sup>2</sup> /s
$\tau$	زمان آرامش	Relaxation time	s
$\mu$	جرم واحد طول	Mass per unit length	Kg/m
$\xi$	موقعیت بی بعد	Dimensionless position	-
$\theta$	دمای سطوح	Temperature	K
$\varepsilon$	کرنش ایجاد شده	Strain	-
$\alpha_i$	ضریب انبساط حرارتی	Thermal expansion	1/K
$\sigma$	تنش	Stress	Pa

# فصل اول: مقدمه

## فصل اول: مقدمه

### ۱-۱ مقدمه

در زندگی روزمره و کاربردهای صنعتی با مواردی مواجه می‌شویم که تغییرات دمای اشیاء موجب ایجاد لرزش، ارتعاش یا صدا می‌شود. این پدیده در شرایطی که محیط مادی از یک سو انعطاف پذیر بوده و از سوی دیگر حساسیت آن به دما یعنی ضریب انبساط طولی آن زیاد باشد (مانند ارتعاش در پانل‌ها و غشاءهای فلزی) آشکارتر است. به دلیل کوچک بودن دامنه و آثار این نوع ارتعاش معمولاً مطالعه آن در کانون توجه قرار نمی‌گیرد. نیازها و ظرافت موجود در طراحی‌های نوین و فن‌آوری‌های پیشرفته مطالعه این قبیل پدیده‌ها را الزام آور نموده است. یک نمونه ویژه از آثار زیان‌بار ارتعاش ناشی از حرارت لرزش‌های ایجاد شده در تجهیزات فضایی است و نمونه دیگر، ارتعاشات حرارتی در مقیاس‌های میکرو و نانو در فن‌آوری‌های جدید ریزساختاری <sup>۱</sup> MEMS و <sup>۲</sup> NEMS است که می‌تواند در عملکرد

<sup>۱</sup> Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)

<sup>۲</sup> Nano Electro Mechanical Systems (NEMS)



این ساختارهای میکروسکوپی موثر باشد. انتقال حرارت ناشی از پرتوافشانی های لیزری نیز میتواند منشأ ارتعاشاتی از این گونه باشد.

در ریشه یابی ارتعاشات حرارتی توجه به دو عامل اصلی ضرورت دارد. یکی از این عوامل پدیده های میدانی انتقال حرارت است که خود بر مبنای نظریه های مختلف به دو صورت عمده فوریه و غیرفوریه به صورت مدل‌های ریاضی ارائه میشود. عامل دیگر رفتار ارتجاعی محیط های جامد است که موجب می‌شود. انبساط های ناچیز حرارتی به موتوری برای شروع ارتعاش تبدیل شود. به دلیل نقش محوری حرارت برخی از ویژگی‌های این پدیده به شرح زیر معرفی می‌شود.

در انتقال گرما، هدایت گرمایی، حالتی از جابجایی انرژی درون یا بین بدنه اجسام است که بر اثر شار حرارتی رخ می‌دهد. هدایت به معنای انتقال انرژی جنبشی ذرات ماده جاذب حرارت است. هدایت در همه شکل‌های ماده یعنی در جامدها، مایعها، گازها و پلاسماها صورت می‌گیرد. گرما خودبه‌خود تمایل دارد از جسمی با دمای بیشتر به جسمی با دمای کمتر شارش یابد. در نبود شارهای حرارت خارجی، تغییرات دما در طول زمان به تعادل گرمایی میل می‌کند. در هدایت، بر خلاف همرفت و تابش گرمایی، گرما از درون خود جسم انتقال می‌یابد. در جامدات، انتقال انرژی و هدایت بر پایه مدل الکترونی ماده یعنی بر اثر ترکیب لرزش مولکول‌های ساختار بلوری صورت می‌پذیرد. در گازها و مایعات، هدایت نتیجه برخورد و پخش مولکول‌های در حال حرکت تصادفی است. در علوم مهندسی، جابجایی گرما شامل فرآیندهای تابش گرمایی، همرفت و گاهی جابجایی جرم می‌شود و اغلب بیش از یکی از این فرآیندها در حال رخ دادن است.

تئوری کلاسیک هدایت حرارتی که اغلب از آن به عنوان قانون هدایت فوریه نام می‌برند، شار حرارتی را مستقیماً با گرادیان دما به صورت خطی مرتبط می‌سازد. قانون فوریه یک قانون پدیدار شناختی است، یعنی بدون استناد به مفاهیم اولیه و به طور مستقیم از رفتار پدیده‌ها استنتاج می‌گردد. بر مبنای مدل فوریه، حرارت در محیط هادی با سرعت بینهایت منتشر می‌شود. علیرغم اینکه مدل هدایت فوریه یک فیزیک غیر واقعی یعنی پخش ناگهانی انرژی حرارتی را معرفی می‌کند، برای اکثر

کاربردهای مهندسی در زندگی روزمره تقریب بسیار خوبی از این مدل است [۱]. مدل انتقال حرارت فوری که مبتنی بر یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ است به نوبه خود از تلفیق دو معادله پایه شامل قانون فوری و اصل تعادل حرارتی به شرح زیر است.

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (1-1)$$

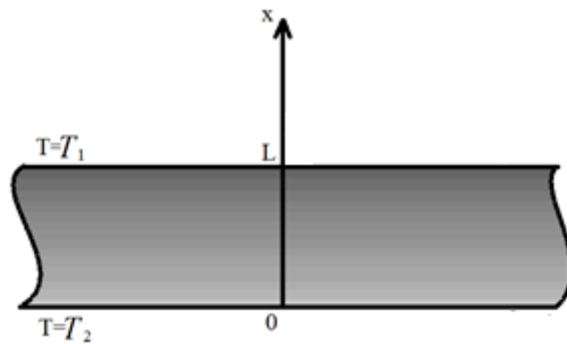
$$\nabla \cdot \mathbf{q} = -\rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-1)$$

که در رابطه بالا  $k$  ثابت هدایت حرارتی،  $\mathbf{q}$  بردار شار حرارتی،  $\rho$  چگالی،  $c$  ظرفیت ویژه حرارتی می باشد.

از ترکیب رابطه (۱-۱) و (۲-۱) معادلات انتقال حرارت زیر بدست می آید.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3-1)$$

متناسب با زمینه پژوهش این پایان نامه، حل معادله (۳-۱) در قسمت های بعد برای هندسه نشان داده شده در شکل (۱-۱) ارائه خواهد شد. در شکل (۱-۱) یک تیغه مسطح در بالا و پایین در دماهای مختلف قرار دارد (در اینجا  $\Delta T = 1$  است). نتیجه اعمال معادله (۳-۱) به استخراج سیر زمانی رسیدن از یک شرایط کرانی تا حالت پایدار منتهی می شود.



شکل ۱-۱: شرایط کرانی دمایی

بسیاری از تحقیقات نشان می‌دهد که مدل فوریه دارای ضعف‌های متعددی می‌باشد. مهمترین ضعف آن اتکا به پیش فرض سرعت انتشار حرارت نامحدود است. کاتانو و ورنوت در سال ۱۹۵۸ مدلی را ارائه دادند که بر محدود بودن سرعت انتشار حرارت استوار است [۱]. ساختار غیر متراکم ماده باعث ایجاد یک تأخیر در پاسخ بین شار حرارتی و گرادیان دما می‌گردد. این تأخیر می‌تواند نمایانگر زمان لازم برای انباشت انرژی هنگام تبادل حرارت بین اجزا ساختاری ماده باشد. در طی این تأخیر، شار گرمایی به تدریج خود را با آنچه مدل فوریه پیش‌بینی می‌کند تطبیق می‌دهد [۲]. مطابق آنچه کاتانو و ورنوت پیشنهاد نموده‌اند ترتیب استخراج معادله انتقال حرارت غیرفوریه‌ای به صورت زیر است. ابتدا معادلات هدایت و انرژی به صورت رابطه (۴-۱) در نظر گرفته می‌شود.

$$\mathbf{q} + \tau \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -k \nabla \theta \quad (4-1)$$

حال اگر معادله (۴-۱) را با معادله (۲-۱) ترکیب کنیم معادله انتقال حرارت غیر فوریه‌ای به

صورت رابطه (۵-۱) بدست خواهد آمد :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \alpha \Delta \theta \quad (5-1)$$

در این معادله  $\alpha$  قابلیت پخش حرارتی و  $\tau$  ضریب آرامش<sup>۱</sup> می‌باشد. اگر معادله (۵-۱) را با همان شرایط مرزی معرفی شده در شکل (۱-۱) حل کنیم در قیاس با تحلیل فوریه نتایج متفاوتی بدست می‌آید. این نتایج در فصل بعد به تفضیل معرفی می‌شود. حال باید از نتایج معادله (۵-۱) برای بدست آوردن ارتعاشات ناشی از این پدیده استفاده کنیم. بدین منظور معادله ارتعاش برای یک تیر دو سر مفصل به صورت زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$EI \frac{\partial^4 v_T}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v_T}{\partial t^2} = 0 \quad (۶-۱)$$

در معادله بالا  $E$  مدول الاستیسیته،  $\mu$  جرم واحد طول و  $v_t$  خیز کل تیر می‌باشد. در این معادله خیز تیر خود ترکیبی از دو بخش شامل خیز ناشی از عوامل مکانیکی و خیز ناشی از عوامل حرارتی می‌باشد. یعنی،

$$v_T = v_m + v_\theta \quad (۷-۱)$$

نحوه شبیه سازی پدیده ارتعاش غشاء در قالب معادله ارتعاش یک بعدی (۶-۱) نیز در فصل بعد معرفی می‌شود.

## ۲-۱ تاریخچه:

این بخش به دو قسمت تقسیم می‌شود. در قسمت نخست به طور اختصاصی به معرفی پیشینه تحلیل های حرارتی و مثالهای کاربردی از آن پرداخته می‌شود. در قسمت بعد پدیده های ارتعاشی و ارتعاشات ناشی از گرما همراه با مصادیق آن معرفی می‌شود.

<sup>۱</sup> Relaxation Time